Άνοδος κυλίνδρου σε κεκλιμένο επίπεδο.

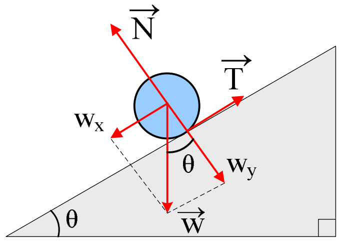
Ένας κύλινδρος μάζας 30kg και ακτίνας R=0,4m αρχίζει να ανεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ =30°. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, έχοντας αρχική ταχύτητα $υ_0$=10m/s. Μετά από μετατόπιση κατά x=15m, ο άξονας του κυλίνδρου έχει ταχύτητα $υ_1$.

i) Πόση επιβράδυνση έχει ο άξονας του κυλίνδρου;
ii) Βρείτε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
iii) Πόση είναι η ταχύτητα $υ_1$;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=\frac{1}{2}mR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, παρουσιάζονται στο διπλανό σχήμα. Γιατί αλήθεια η τριβή έχει φορά προς τα πάνω;



i) Για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε (δουλεύουμε με τα μέτρα των δυνάμεων και επιταχύνσεων):

$w_x - T = ma_{cm}$ ή $mgημθ - T = ma_{cm}$ (1)

ii) Για την περιστροφική κίνηση έχουμε:

$T \cdot R = Iα_{γων}$ ή $TR=\frac{1}{2}mR^2 \cdot α_{γων}$ ή $T= \frac{1}{2}mRα_{γων}$ και επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχουμε $T=\frac{1}{2}ma_{cm}$ (2).

Από την (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$mgημθ= \frac{3}{2}m\, a_{cm}. \text{ ή } a_{cm}=\frac{2}{3}\, gημθ=\frac{2}{3}\, 10\, \frac{1}{2}\, m/s^2= \frac{10}{3}\, m/s^2 .$$

Άρα για την τριβή προκύπτει $T= \frac{1}{2}\, ma_{cm} = 50N$.

iii) Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα με βάση τις εξισώσεις κίνησης. Εδώ όμως θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας.

Για τη μεταφορική κίνηση:

$$\frac{1}{2}\, mυ_1^2 - \frac{1}{2}\, mυ_0^2 = W_{wx} + W_{wy} + W_T + W_N \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}\, mυ_1^2 - \frac{1}{2}\, mυ_0^2 = -mgημθ \cdot x + T \cdot x \text{ ή } υ_1=\sqrt{υ_0^2 + \frac{2(T - mgημθ)}{m}x} = 0$$

Αν δουλέψουμε με βάση την στροφική κίνηση, παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\, Iω^2 - \frac{1}{2}\, I\, ω_0^2 = W_T \text{ ή } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot ω^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot ω_0^2 = - TRθ \text{ ή}$$

$$\frac{1}{4}\, mυ_1^2 - \frac{1}{4}\, mυ_0^2 = -Tx, \text{ αφού } θR=x \text{ και } ωR=υ \;\rightarrow υ_1=0$$

Ερώτηση: Γιατί το έργο της ροπής είναι αρνητικό;

Αν εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ για τη συνολική κίνηση έχουμε:

$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}I\,\omega_0^2 = W_{wx}$ (3) αφού το έργο της στατικής τριβής είναι συνολικά μηδέν, μιας και δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.

Από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega_0^2 = -mg\eta\mu\theta\cdot x$ ή

$2\upsilon_1^2 + \upsilon_1^2 - 2\upsilon_0^2 - \upsilon_0^2 = -4g\eta\mu\theta\cdot x$ ή $3\upsilon_1^2 - 3\upsilon_0^2 = -4\,g\eta\mu\theta\cdot x$ ή

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{4}{3}g\eta\mu\theta x} = \sqrt{100 - \frac{4}{3}10\frac{1}{2}15} = 0$$

Και αν εφαρμόζαμε την αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας;

Πρώτα- πρώτα ισχύει αφού στο σώμα ασκείται τριβή;

Η απάντηση είναι ναι. Και τούτο γιατί η τριβή είναι ΣΤΑΤΙΚΗ, οπότε δεν αφαιρεί ενέργεια για να την μετατρέψει σε κάποια άλλη μορφή, όπως είναι η θερμότητα.

Έτσι έχουμε:

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I\,\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I\,\omega_1^2 + mgh$,

όπου υ=ωR και h=χημθ, με αντικατάσταση παίρνουμε:

$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega^2_1 + mg\chi\eta\mu\theta$ ή

$2\upsilon_0^2 + \upsilon_0^2 = 2\upsilon_1^2 + \upsilon_1^2 + 4g\chi\eta\mu\theta$ ή

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{4}{3}gx\eta\mu\theta} = \sqrt{100 - \frac{4}{3}10\cdot 15\cdot\frac{1}{2}} = 0$$

Ποια λύση θα επιλέγατε;