

Κύλιση τροχού και με ολίσθηση

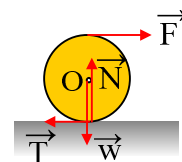
Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας $m=40\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κατόπιν τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,2$. Τραβώντας το νήμα ασκούμε στον κύλινδρο μια σταθερή οριζόντια δύναμη $F=120\text{N}$.

- i) Ποια η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- ii) Βρείτε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
- iii) Αν το μέτρο της δύναμης ήταν $F=300\text{N}$, ποια η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου;

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.



Γιατί η τριβή είναι προς τα αριστερά;

Η αλήθεια είναι ότι δεν μπορούμε να προβλέψουμε τη φορά της. Έστω λοιπόν ότι είναι προς τα αριστερά

Δουλεύουμε με τα μέτρα των δυνάμεων και των ροπών.

Στον κατακόρυφο άξονα ο κύλινδρος ισορροπεί $\rightarrow \Sigma F=0 \rightarrow N=w=400\text{N}$.

Για την μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{\text{cm}} \rightarrow F - T = m \cdot a_{\text{cm}} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση και παίρνοντας θετική φορά, αυτήν που στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού, έχουμε:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\text{γων}} \rightarrow F \cdot R + T \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \rightarrow F + T = \frac{1}{2} m \cdot R \cdot \alpha_{\text{γων}} \quad (2)$$

Τι κάνει ο κύλινδρος; Κυλιέται μόνο ή και ολισθαίνει; Η εκφώνηση δεν αναφέρει.

Ας υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει οπότε θα ισχύει και η βασική σχέση σύνδεσης μεταξύ γραμμικών και γωνιακών μεγεθών:

$$a_{\text{cm}} = \alpha_{\text{γων}} \cdot R \quad (3)$$

- i) Οι εξισώσεις (1), (2) και (3) αποτελούν ένα σύστημα η λύση του οποίου μας δίνει τα αναζητούμενα μεγέθη.

$$\text{Η (2) εξαιτίας της (3) γίνεται } F + T = \frac{1}{2} m \cdot a_{\text{cm}} \quad (4)$$

και με πρόσθεση της (1) και (4) λαμβάνουμε:

$$2F = \frac{3}{2} m \cdot a_{\text{cm}} \rightarrow a_{\text{cm}} = \frac{4F}{3m} \quad (5) \rightarrow a_{\text{cm}} = 4\text{m/s}^2.$$

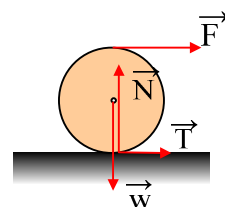
Από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

$$\alpha_{\text{γων}} = \frac{a_{\text{cm}}}{R} = 8\text{rad/s}^2.$$

- ii) Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$T = F - m \cdot a_{\text{cm}} \rightarrow T = 120 - 40 \cdot 4 \text{ N} = -40 \text{ N}.$$

Επειδή η τριβή προέκυψε αρνητική, σημαίνει ότι η τριβή έχει φορά προς τα δεξιά. Το σωστό σχήμα δηλαδή είναι αυτό που φαίνεται



στο διπλανό σχήμα. Άλλωστε από τη σχέση (5) φαίνεται ότι η επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι μεγαλύτερη από αυτή που θα μπορούσε να προκαλέσει μόνη της η δύναμη F. Θα πρέπει να υπάρχει και άλλη δύναμη προς τα δεξιά,

Το ερώτημα που ανακύπτει είναι αν είναι σωστή η υπόθεση που κάναμε, ότι ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Το ελέγχουμε υπολογίζοντας το μέτρο της οριακής στατικής τριβής.

$$T_{op} = \mu_s \cdot N = 0,2 \cdot 400N = 80N$$

Προφανώς η τριβή που βρήκαμε είναι στατική, αφού $40N < 80N$, οπότε δεν υπάρχει ολίσθηση.

iii) Για τιμή της δύναμης $F=300N$ και με την υπόθεση ότι ισχύουν όλες οι παραπάνω προϋποθέσεις βρίσκουμε:

$$a_{cm} = \frac{4F}{3m} = 10m/s^2 \text{ και } T = F - m \cdot a_{cm} = 300N - 40 \cdot 10N = -100N$$

Δηλαδή μέτρου 100N με φορά προς τα δεξιά. Όμως η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής υπολογίσαμε ότι είναι 80N, άρα ο κύλινδρος δεν μπορεί να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

Αφού όμως ο κύλινδρος ολισθαίνει η τριβή έχει μέτρο $T_{ολ}=T_{op}=80N$, οπότε:

Για τη μεταφορική κίνηση:

$$F+T = m \cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F+T}{m} = 9,5 m/s^2$$

Ενώ για τη στροφορική κίνηση:

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R - T \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2(F-T)}{m R} = 22rad/s^2.$$

Ας προσέξουμε ότι τώρα $a_{cm} \neq \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ πράγμα αναμενόμενο αφού ο κύλινδρος ολισθαίνει.