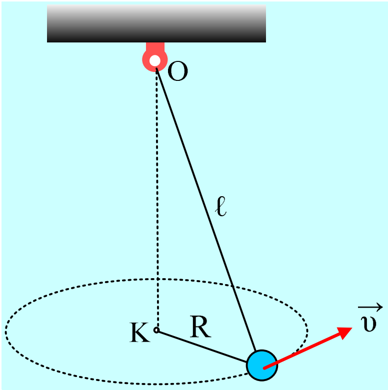
Η στροφορμή παραμένει σταθερή;

Ένα υλικό σημείο Σ μάζας 2kg είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $\ell=2{,}5\sqrt{5}$ m και διαγράφει οριζόντιο κύκλο, κέντρου Κ και ακτίνας R=2,5m, όπως στο σχήμα, όπου το άλλο άκρο του νήματος έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Ο.



Ζητούνται:

i) Η ταχύτητα του Σ.

ii) Η στροφορμή του Σ ως προς τα σημεία Κ και Ο. Να σχεδιαστούν τα αντίστοιχα διανύσματα.

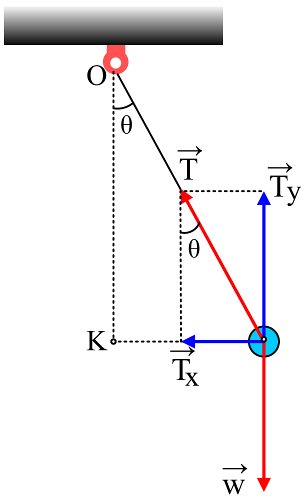
iii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το Κ και ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός ως προς το Ο;

iv) Να βρεθεί η μεταβολή της στροφορμής σε χρόνο ίσο με τη μισή περίοδο περιστροφής, ως προς τα σημεία Κ και Ο.

Δίνεται ότι η ταχύτητα του Σ είναι κάθετη τόσο στην ακτίνα R, όσο και στο νήμα και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ.



Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, οπότε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow$$

$$T_y=mg\rightarrow$$

$$T\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=mg \quad (1)$$

Ενώ:

$$T_x=T\cdot\eta\mu\theta=m\frac{\upsilon^2}{R}$$

Αλλά $\eta\mu\theta=\frac{R}{\ell}=\frac{2{,}5}{2{,}5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ δηλαδή η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφη είναι ίση με 45°.

Άρα

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{T} \cdot \eta\mu\theta \cdot \mathrm{R}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{gR\varepsilon\phi\theta}$$

και με αντικατάσταση υ= 5m/s.

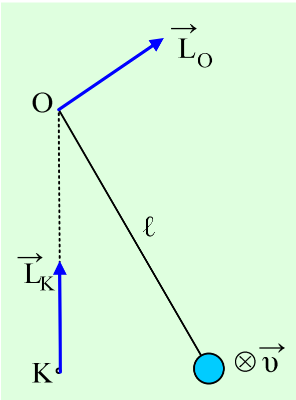
ii) Ως προς το κέντρο Κ του κύκλου έχουμε:

$$L_K = m\upsilon R = 25\ kg \cdot m^2/s$$

Αντίστοιχα ως προς το Ο παίρνουμε:

$$L_o = m\upsilon \cdot \ell = 25\sqrt{2} kgm^2 / s.$$

Αν πάρουμε το σώμα στη θέση όπου το επίπεδο ΟΚΣ να ταυτίζεται με το επίπεδο της σελίδας, τότε τα διανύσματα των στροφορμών είναι όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου η στροφορμή στο Ο είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η ταχύτητα και το μήκος ℓ του νήματος.



iii) Για το σημείο Κ:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \mathrm{T}_y \cdot R - w \cdot R = 0$$

Η στροφορμή του υλικού σημείου δηλαδή ως προς το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς παραμένει σταθερή.

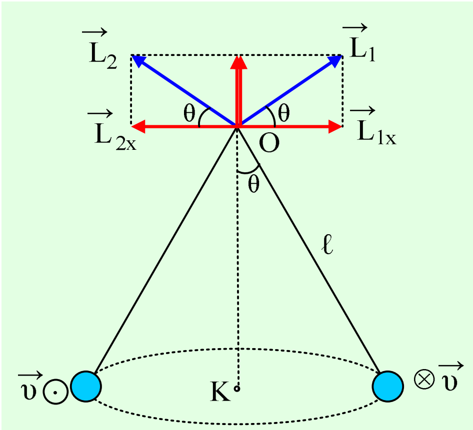
Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το Ο (θεωρούμε τις αριστερόστροφες ροπές ως θετικές) είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = -w \cdot R = -50 kg \cdot m^2 / s^2$$

Το δε διάνυσμα, του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής (αναφερόμενοι στο παραπάνω σχήμα) είναι κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα, έχει δηλαδή την ί-δια φορά με το διάνυσμα της ταχύτητας.

iv) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, η στροφορμή του σώματος ως προς το Κ παραμέ-νει σταθερή, αφού για κάθε θέση ο ρυθμός μεταβολής της είναι μηδενικός. Ας το πούμε αλλιώς: Η στροφορμή ως προς το Κ παραμένει σταθερή και σε κατεύθυνση και σε μέτρο, αφού δεν αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας. Συνεπώς δεν έχουμε μεταβολή στροφορμής ως προς το Κ.

Ο αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής ως προς το σημείο πρόσδεσης Ο, μπορούμε να την υπολογίσουμε με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος, όπου έχουμε πάρει το σώμα σε δύο αντιδιαμετρικές θέσεις Α και Β. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι αντίστοιχες στροφορμές ως προς το Ο.



Τα μέτρα των δύο στροφορμών είναι ίσα, $L_1=L_2=m\upsilon\ell$, οπότε ίσες θα είναι και οι συνιστώσες τους, τόσο στον κατακόρυφο άξονα y, όσο και στον οριζόντιο x. Εξάλλου η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της στροφορμής με τον οριζόντιο άξονα, είναι ίση με τη γωνία θ που σχηματίζει το νήμα με τη κατακόρυφη (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές). Έτσι παίρνουμε:

$$\Delta L_y=L_{1y}-L_{2y} = L\eta\mu\theta-L\eta\mu\theta=0$$

Εξάλλου:

$$|L_{1x}|=|L_{2x}|=m\upsilon\ell\sigma\upsilon\nu\theta=25\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 45^\circ \mathrm{kgm}^2/s=25\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

Ενώ

$$\Delta\vec{L}_x=\vec{L}_{2x}-\vec{L}_{1x}\ \text{ή}$$

$$\Delta\vec{L}_x=\vec{L}_{2x}+(-\vec{L}_{1x})\ \text{ή}$$

$$\Delta L_x=-|L_{2x}|-|L_{1x}|=-2\cdot|L_{1x}|=-2\cdot 25\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}=-50\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

Συνεπώς έχουμε οριζόντια μεταβολή της στροφορμής στην κατεύθυνση του διανύσματος L_{2x} με μέτρο 50 kg·m²/s.

Σχόλια.

1) Η κατακόρυφη συνιστώσα της στροφορμής ως προς το σημείο Ο έχει μέτρο:

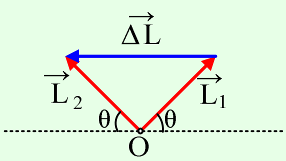
$$L_x=L\eta\mu\theta=25\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}kgm^2/s=25kgm^2/s$$

Όσο δηλαδή είναι και η στροφορμή ως προς το κέντρο Κ της τροχιάς.

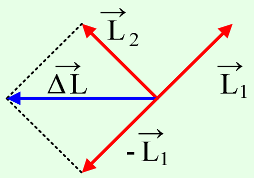
Πραγματικά ως προς οποιοδήποτε σημείο του κατακόρυφου άξονα που περνά από το Κ αν πάρουμε τη συνιστώσα της στροφορμής πάνω στον άξονα, θα βρούμε να έχει μέτρο όσο και η αντίστοιχη στροφορμή ως προς το Κ.

2) Ως προς το σημείο Ο το σώμα έχει στροφορμή σταθερού μέτρου. Αλλάζει όμως η κατεύθυνση του διανύσματος και κατά συνέπεια μεταβάλλεται η στροφορμή. Τη μεταβολή αυτή της στροφορμής, την προκαλεί η ροπή του βάρους ως προς το σημείο Ο. Σε κάθε θέση η ροπή του βάρους στιγμιαία έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας, συνεπώς την ίδια κατεύθυνση έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ή αν θέλετε και η αντίστοιχη στοιχειώδης μεταβολή της στροφορμής.

3) Η μεταβολή της στροφορμής θα μπορούσε εναλλακτικά να υπολογιστεί είτε με τη βοήθεια του σχ. α είτε του σχ. β.



Σχ.α



Σχ.β

Όπου για τη μεταβολή λαμβάνουμε υπόψη ότι:

α) $\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \Rightarrow \vec{L}_2 = \vec{L}_1 + \Delta\vec{L}$ ή

β) $\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \vec{L}_2 + (-\vec{L}_1)$

και δουλεύοντας πλέον με το γνωστό τύπο για την εύρεση της συνισταμένης δύο δυνάμεων, που εδώ απλά καταλήγει σε ένα Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι ορθή.

Προτιμήθηκε η άσκηση να λυθεί με ανάλυση σε άξονες, αφού είναι αρκετά σύνηθες να προσθέτουμε διανύσματα αναλύοντάς τα σε άξονες, αλλά δεν το κάνουμε συχνά όταν θέλουμε να αφαιρέσουμε διανύσματα.

4) Ενώ κάθε στοιχειώδης μεταβολή της στροφορμής μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$d\vec{L} = \vec{\tau} \cdot \mathrm{dt}$$

Η μεταβολή της στροφορμής μεταξύ δύο αντιδιαμετρικών σημείων δεν θα μπορούσε να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\Delta L = \tau \cdot \Delta t$$

Αφού η ασκούμενη ροπή, έχει μεν σταθερό μέτρο, αλλά όχι σταθερή διεύθυνση, συνεπώς **δεν είναι σταθερή,** οπότε οι δύο παραπάνω σχέσεις δεν είναι ισοδύναμες.

dmargaris@sch.gr