ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4$^{\text{Ο}}$: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Σε ένα ρολόι θέλουμε το άκρο του ωροδείκτη και το άκρο του λεπτοδείκτη να έχουν την ίδια ταχύτητα λόγω περιστροφής (γραμμική ταχύτητα). Αν συμβολίσουμε με ℓ_ω το μήκος του ωροδείκτη και με ℓ_λ το μήκος του λεπτοδείκτη, τότε για το λόγο των μηκών ισχύει

α) $\dfrac{\ell_\omega}{\ell_\lambda} = 1$

β) $\dfrac{\ell_\omega}{\ell_\lambda} = \dfrac{1}{12}$

γ) $\dfrac{\ell_\omega}{\ell_\lambda} = 12$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

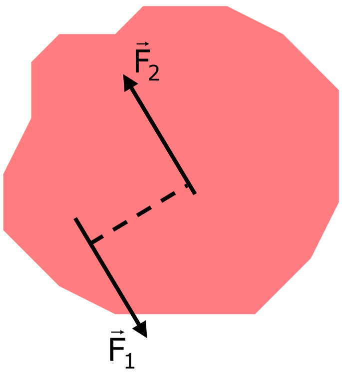
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι γραμμικές ταχύτητες των δύο άκρων δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $\upsilon_\omega = \omega_\omega \ell_\omega$ και $\upsilon_\lambda = \omega_\lambda \ell_\lambda$. Παίρνοντας υπόψη ότι: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ και ότι $T_\omega = 12\text{h}$, $T_\lambda = 1\text{h}$ προκύπτει:

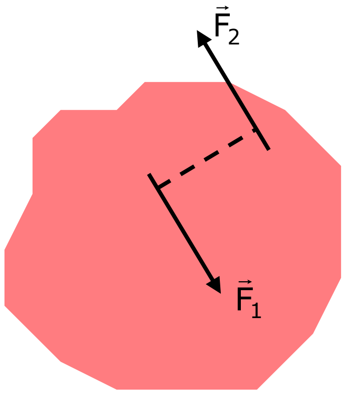
$$\upsilon_\omega = \upsilon_\lambda \;\Rightarrow\; \omega_\omega \ell_\omega = \omega_\lambda \ell_\lambda \Rightarrow \frac{2\pi}{T_\omega}\ell_\omega = \frac{2\pi}{T_\lambda}\ell_\lambda \Rightarrow \frac{\ell_\omega}{\ell_\lambda} = \frac{T_\omega}{T_\lambda} \;\Rightarrow \frac{\ell_\omega}{\ell_\lambda} = 12$$

Ερώτηση 3.

Στο σχήμα (α) φαίνεται ένα ελεύθερο στερεό, το οποίο στρέφεται υπό την επίδραση του ζεύγους δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.



(α)



(β)

Αν μετακινήσουμε τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετακινώντας παράλληλα τους φορείς των δυνάμεων, όπως φαίνεται στο σχήμα (β), χωρίς να μεταβάλλουμε τη μεταξύ τους απόσταση, τότε το στερεό:

α) στρέφεται όπως και στο σχήμα α.

β) στρέφεται αντίστροφα από το σχήμα α.

γ) ισορροπεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ροπή ζεύγους δύναμης είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και εξαρτάται μόνο από το μέτρο των δυνάμεων και την απόσταση μεταξύ των φορέων τους. Στο σχήμα (β) δεν έχουμε μεταβάλλει ούτε το μέτρο των δυνάμεων, ούτε την απόσταση μεταξύ των φορέων τους. Επομένως, η ράβδος στο σχήμα (β), υπό την επίδραση της ίδιας ροπής του ζεύγους δύναμης, θα κάνει ό,τι έκανε και στο σχήμα (α), δηλαδή, θα στρέφεται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

Ερώτηση 8.

Ο ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M του σχήματος (α) μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $\frac{1}{2}MR^2$ και επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μάζα ενός τμήματος του δίσκου είναι ανάλογη της επιφάνειας που καλύπτει.

(α) (β)

Αφαιρούμε από το δίσκο ένα κυκλικό τμήμα ακτίνας $r = \frac{R}{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου που σχηματίστηκε είναι:

α) $\frac{3}{8}MR^2$.

β) $\frac{7}{16}MR^2$.

γ) $\frac{15}{32}MR^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

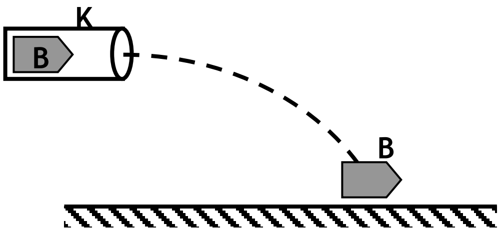
Η ροπή αδράνειας I του δακτυλίου που σχηματίστηκε είναι $I = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2$, όπου m η μάζα του κυκλικού τμήματος που αφαιρέθηκε.

Η μάζα του κυκλικού τμήματος που αφαιρέθηκε είναι ανάλογη της επιφάνειας που καλύπτει. Επομένως:

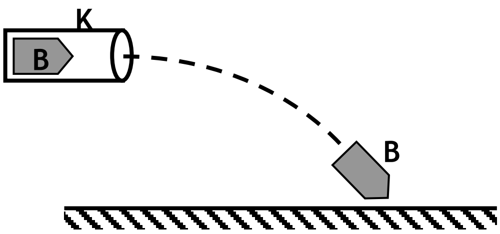
$$\frac{m}{M} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow m = M\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2}{R^2} \Rightarrow m = \frac{M}{4}$$

Ερώτηση 14.

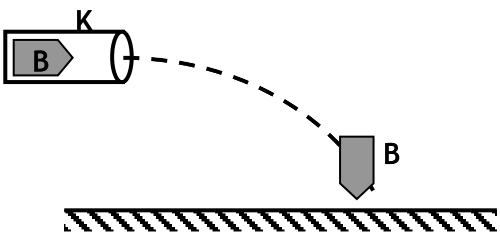
Από το κανόνι Κ εκτοξεύεται οριζόντια ένα βλήμα Β. Το βλήμα, ακολουθώντας παραβολική τροχιά, φτάνει στο έδαφος. Αγνοώντας την επίδραση του αέρα, και θεωρώντας το βλήμα ελεύθερο στερεό, το σχήμα που δείχνει σωστά τον τρόπο με τον οποίο το βλήμα συναντά το έδαφος είναι:



(α)



(β)



(γ)

α) το σχήμα α.

β) το σχήμα β.

γ) το σχήμα γ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

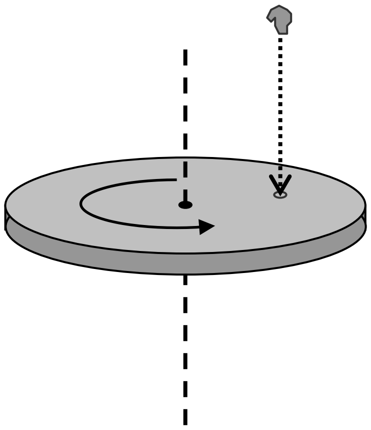
<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Το βλήμα ως ελεύθερο στερεό μπορεί να περιστραφεί μόνο γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Από τη στιγμή που το βλήμα Β φεύγει από το

Ερώτηση 16.

Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που περνά από το κέντρο του. Από μικρό ύψος αφήνουμε ένα κομμάτι πλαστελίνης να πέσει και να κολλήσει πάνω στο δίσκο. Το συσσωμάτωμα δίσκου - πλαστελίνης που προκύπτει περιστρέφεται σε σχέση με το δίσκο



α) πιο αργά.

β) με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

γ) πιο γρήγορα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η συνολική εξωτερική ροπή στο σύστημα δίσκος - πλαστελίνη είναι μηδέν, επομένως η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$L_{αρχ} = L_{τελ} \quad \Rightarrow \quad I_{αρχ} \cdot ω_{αρχ} = I_{τελ} \cdot ω_{τελ} \quad \Rightarrow \quad ω_{τελ} = \frac{I_{αρχ} \cdot ω_{αρχ}}{I_{τελ}}$$

Επειδή η επικόλληση της πλαστελίνης αυξάνει τη ροπή αδράνειας, θα ισχύει

$I_{τελ} > I_{αρχ}$, επομένως $ω_{τελ} < ω_{αρχ}$.

Ερώτηση 18.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Πετάμε μια μπάλα του μπάσκετ κατακόρυφα προς τα πάνω με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτή να περιστρέφεται καθώς ανέρχεται. Στο χρονικό διάστημα που η μπάλα ανέρχεται, η γωνιακή της ταχύτητα

α) αυξάνεται.

β) μειώνεται.

γ) παραμένει σταθερή.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η μπάλα είναι ένα ελεύθερο στερεό και ανερχόμενη θα περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Η μόνη δύναμη που ασκείται στη μπάλα, αφού χάσει την επαφή με το χέρι, είναι το βάρος της, το οποίο έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας και δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή. Αφού η συνολική ροπή που ασκείται στη μπάλα είναι μηδέν, η γωνιακή της ταχύτητα θα παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησής της.

Ερώτηση 19.

Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονά. Η κινητική ενέργεια του τροχού είναι K. Αν διπλασιάσουμε τη στροφορμή του τροχού, τότε η κινητική του ενέργεια θα γίνει

α) $2K$.

β) $4K$.

γ) $8K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η στροφορμή ενός στερεού ως προς σταθερό άξονα δίνεται από τον τύπο: $L = I\omega$.

Η κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης δίνεται από τον τύπο: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

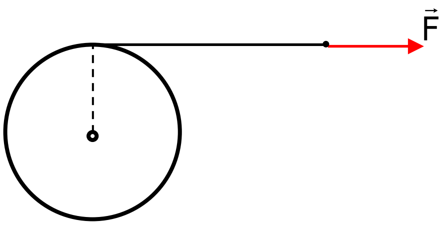
Με πράξεις έχουμε:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\frac{I^2\omega^2}{I} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{L^2}{2I}$$

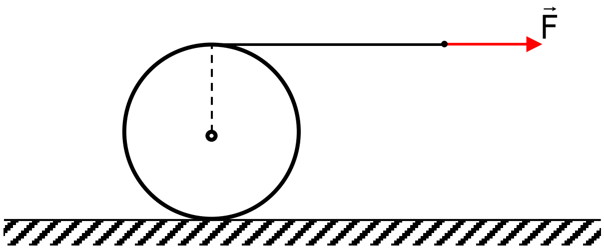
$$K' = \frac{L'^2}{2I} \quad \Rightarrow \quad K' = \frac{(2L)^2}{2I} \quad \Rightarrow \quad K' = 4\cdot\frac{L^2}{2I} \quad \Rightarrow \quad K' = 4K$$

Ερώτηση 21.

Ο άξονας του αρχικά ακίνητου ομογενή τροχού του σχήματος (α) είναι ακλόνητος. Γύρω από τον τροχό έχει τυλιχθεί πολλές φορές αβαρές νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στον τροχό. Στην ελεύθερη άκρη του νήματος ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$, η οποία προσφέρει στον τροχό έργο W και μετά καταργείται. Στο σχήμα (β) ένας ίδιος αρχικά ακίνητος τροχός κυλίεται υπό την επίδραση της ίδιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$, η οποία προσφέρει στον τροχό το ίδιο έργο W όπως και στη περίπτωση (α) και μετά καταργείται. Η γωνιακή ταχύτητα, μόλις καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}$, είναι:



(α)



(β)

α) μεγαλύτερη στον τροχό α.

β) μεγαλύτερη στον τροχό β.

γ) ίση στους δύο τροχούς.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

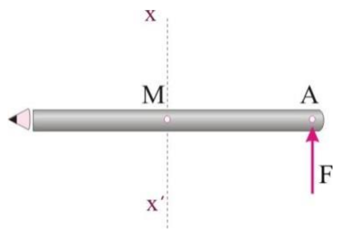
Η κινητική ενέργεια του τροχού (α) δίνεται από τον τύπο: $K_\alpha = \frac{1}{2} I\omega_\alpha{}^2$.

Η κινητική ενέργεια του τροχού (β) δίνεται από τον τύπο: $K_\beta = \frac{1}{2} I\omega_\beta{}^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}{}^2$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, το έργο W και στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο. Στη β΄ περίπτωση το έργο μοιράζεται σε στροφική και μεταφορική κινητική ενέργεια, ενώ στην α΄ περίπτωση γίνεται όλο στροφική, επομένως ισχύει: $\frac{1}{2} I\omega_\alpha{}^2 > \frac{1}{2} I\omega_\beta{}^2 \Rightarrow \omega_\alpha > \omega_\beta$.

Ερώτηση 25.

Το μολύβι του σχήματος μπορεί να κινείται ελεύθερα πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Ασκούμε την ίδια δύναμη F δύο φορές, μία στο άκρο Α και μία στο μέσο Μ. Το κέντρο μάζας του μολυβιού θα διανύσει το μήκος του τραπεζιού



α. σε μικρότερο χρόνο όταν η δύναμη ασκείται στο μέσον Μ.

β. σε μικρότερο χρόνο όταν η δύναμη ασκείται στο άκρο Α.

γ. στον ίδιο χρόνο και στις δύο περιπτώσεις.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή πρόταση είναι η (γ).

Για τη μελέτη της μεταφορικής κίνησης ενός σώματος θεωρούμε ότι οι δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας. Έτσι, στις δύο περιπτώσεις το κέντρο μάζας δέχεται την ίδια συνισταμένη δύναμη, $\Sigma F_{cm} = F$, οπότε θα αποκτήσει και την ίδια επιτάχυνση, $\alpha_{cm} = F/m$. Συνεπώς διανύει την ίδια απόσταση στον ίδιο χρόνο, $\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t^2$.

Ερώτηση 27.

Ένας αθλητής καταδύσεων κατά την εκτέλεση ενός άλματος κατάφερε συμπτύσσοντας τα άκρα του να μειώσει την ροπή αδράνειας του στο μισό της αρχικής τιμής της. Η μεταβολή αυτή είχε ως συνέπεια η κινητική του ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης να

α. διπλασιαστεί.

β. παραμείνει σταθερή.

γ. τετραπλασιαστεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή πρόταση είναι η (α).

Ο αθλητής στη διάρκεια του άλματος μπορεί να θεωρηθεί ένα ελεύθερο στερεό. Τα ελεύθερα στερεά περιστρέφονται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους. Η μόνη δύναμη που ασκείται στον αθλητή είναι το βάρος του, του οποίου η ροπή ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίση με μηδέν, με συνέπεια κατά την εκτέλεση του άλματος η στροφορμή (L) του αθλητή να διατηρείται σταθερή.

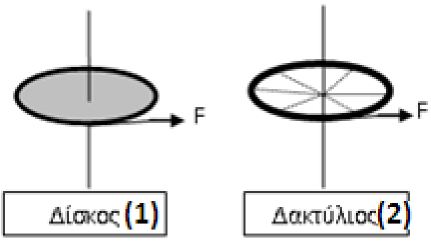
Η σχέση της στροφικής κινητικής ενέργειας γράφεται:

$$K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I^2\omega^2}{I} \Rightarrow K_{\sigma\tau\rho} = \frac{L^2}{2I}$$

Σύμφωνα με την τελευταία σχέση, αφού ο αριθμητής διατηρείται σταθερός και ο παρονομαστής υποδιπλασιάζεται η $K_{\sigma\tau\rho}$ διπλασιάζεται.

Ερώτηση 30.

Ο δίσκος και ο δακτύλιος του σχήματος είναι αρχικά ακίνητοι και έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες. Με τη βοήθεια νημάτων που είναι τυλιγμένα στις περιφέρειές τους ασκούμε εφαπτομενικά την ίδια δύναμη F μέχρι να ξετυλιχτεί νήμα ίδιου μήκους d και στα δύο σώματα. Το πηλίκο των κινητικών ενεργειών $\frac{K_1}{K_2}$ που θα αποκτήσουν ο δίσκος και ο δακτύλιος αντίστοιχα είναι



α. 1

β. $\frac{1}{2}$

γ. 2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή πρόταση είναι η (α).

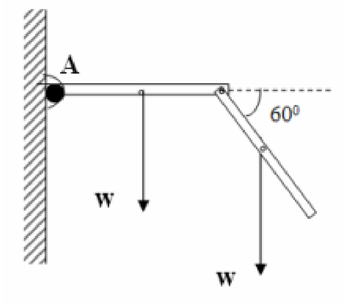
Επειδή ξετυλίχτηκε νήμα ίδιου μήκους , το έργο της δύναμης είναι ίδιο και στα δύο σώματα $W_F = F \cdot d$.

Με βάση το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F \Rightarrow K_{τελ} = F \cdot d$, άρα και τα δύο σώματα αποκτούν ίσες κινητικές στροφικές ενέργειες.

Ερώτηση 35.

Δύο ίδιες ομογενείς ράβδοι μήκους ℓ και μάζας m, είναι ενωμένες, όπως φαίνεται στο σχήμα και το σύστημά τους μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση Α σε κατακόρυφο επίπεδο. Αν g η επιτάχυνση της βαρύτητας, το μέτρο της συνολικής ροπής που δέχεται το σύστημα των ράβδων είναι



α. $\Sigma\tau = \dfrac{5mg\ell}{3}$.

β. $\Sigma\tau = \dfrac{7mg\ell}{4}$.

γ. $\Sigma\tau = 2mg\ell$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

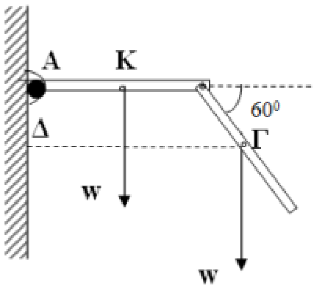
<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Οι ράβδοι έχουν ίσα βάρη, με μοχλοβραχίονες ως προς το Α, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΔΓ αντίστοιχα. Άρα

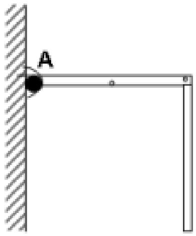
$$\Sigma\tau = w\cdot(\mathrm{AK}) + w\cdot(\Gamma\Delta) \Rightarrow$$

$$\Sigma\tau = mg\frac{\ell}{2} + mg\left(\ell + \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu 60^0\right) = mg\frac{\ell}{2} + mg\left(\ell + \frac{\ell}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = mg\frac{\ell}{2} + mg\frac{5\ell}{4} = \frac{7mg\ell}{4}.$$



Ερώτηση 38.

Δύο ίδιες ομογενείς ράβδοι μήκους ℓ και μάζας m, είναι ενωμένες κάθετα, όπως φαίνεται στο σχήμα και το σύστημά τους μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση Α σε κατακόρυφο επίπεδο. Αν η ροπή αδράνειας ράβδου μήκους ℓ και μάζας m ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2$, τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος των ράβδων ως προς το Α είναι



α. $I_A = \frac{5}{3} m\ell^2$.

β. $I_A = \frac{4}{3} m\ell^2$.

γ. $I_A = \frac{17}{12} m\ell^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας ενός συστήματος σωμάτων προσθέτουμε τη ροπή αδράνειας του κάθε επιμέρους σώματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα προσθέσουμε τις ροπές αδράνειας των δύο ράβδων ως προς το σημείο Α.

Η πρώτη ράβδος, η οριζόντια, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner θα έχει

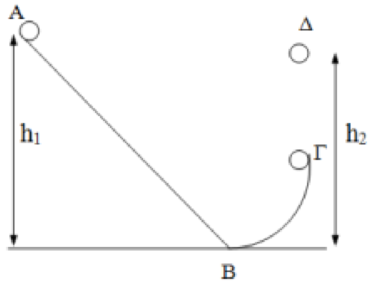
$$I_{1,A} = I_{cm} + m(MA)^2 = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} m\ell^2 .$$

Η δεύτερη ράβδος, η κατακόρυφη, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner θα έχει

$$I_{2,A} = I_{cm} + m(KA)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \ell^2\right] = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\frac{5\ell^2}{4} = \frac{16}{12} m\ell^2 = \frac{4}{3} m\ell^2 .$$

Ερώτηση 41.

Ένα μικρό δαχτυλίδι με τη μάζα του όλη συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στο σημείο Α του κεκλιμένου επίπεδου του διπλανού σχήματος, κάνοντας κύλιση, χωρίς να ολισθαίνει και μόλις φτάσει στο σημείο Β εισέρχεται, χωρίς απώλεια ενέργειας, σε οδηγό σχήματος τεταρτημορίου, όπως στο σχήμα, συνεχίζοντας να κάνει κύλιση. Όταν φτάσει στο σημείο Γ, συνεχίζει την κίνησή του μέχρι το σημείο Δ, όπου σταματάει την άνοδό του. Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Δ προκύπτει ότι το τελικό ύψος h_2, που φτάνει στιγμιαία το δαχτυλίδι και το αρχικό ύψος h_1, που το αφήσαμε συνδέονται με τη σχέση



α. $h_2 = h_1$.

β. $h_2 < h_1$.

γ. $h_2 > h_1$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κίνησή του δαχτυλιδιού από το σημείο Α μέχρι το Γ είναι κύλιση , χωρίς ολίσθηση και χωρίς απώλειες ενέργειας. Από το Γ μέχρι το Δ η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη μεταφορική και ομαλή στροφική, καθώς η μόνη δύναμη που ασκείται είναι το βάρος, που δεν προκαλεί ροπή, αφού ασκείται στο κέντρο μάζας του δακτυλιδιού. Στο σημείο Δ που σταματάει η άνοδος του σώματος, αυτό συνεχίζει να περιστρέφεται.

Η μηχανική ενέργεια του δαχτυλιδιού παραμένει σταθερή καθόλη τη διάρκεια της κίνησης.

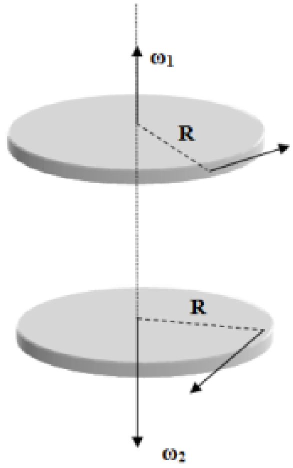
Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη θέση Α στη θέση Δ έχουμε

$E_A = E_\Delta \Rightarrow mgh_1 = mgh_2 + K_\pi$. (Θεωρήσαμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτήν του δαπέδου).

Άρα $mgh_1 > mgh_2 \Rightarrow h_1 > h_2$.

Ερώτηση 44.

Δύο όμοιοι οριζόντιοι δίσκοι, ροπής αδράνειας Ι, περιστρέφονται αντίρροπα γύρω από κοινό κατακόρυφο άξονα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι γωνιακές τους ταχύτητες έχουν σχέση $\omega_1 = 2\omega_2$. Κάποια στιγμή οι δύο δίσκοι έρχονται σε επαφή και συνεχίζουν να περιστρέφονται σαν ένας δίσκος με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega_2 / 2$. Η απώλεια ενέργειας του συστήματος Q είναι



α. $Q = \frac{3}{5} I \cdot \omega_2{}^2$.

β. $Q = \frac{9}{4} I \cdot \omega_2{}^2$.

γ. $Q = \frac{3}{4} I \cdot \omega_2{}^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η απώλεια ενέργειας του συστήματος Q είναι η διαφορά της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο δίσκων μείον την τελική. Η αρχική είναι:

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega_1{}^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega_2{}^2 = \frac{1}{2} I \cdot (2\omega_2)^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega_2{}^2 = \frac{5}{2} I \cdot \omega_2{}^2.$$

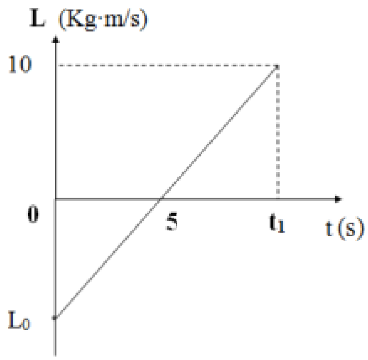
Η τελική κινητική ενέργεια είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} I_{o\lambda} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}(2I) \cdot \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} I \cdot \omega_2{}^2.$$

Άρα $Q = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{5}{2} I \cdot \omega_2{}^2 - \frac{1}{4} I \cdot \omega_2{}^2 = \frac{9}{4} I \cdot \omega_2{}^2 \Rightarrow Q = \frac{9}{4} I \cdot \omega_2{}^2$

Ερώτηση 48.

Ένα στερεό σώμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Το διάγραμμα που περιγράφει πώς μεταβάλλεται η στροφορμή του σώματος σε σχέση με το χρόνο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στο χρονικό διάστημα από 0 έως τη χρονική στιγμή t_1, το συνολικό έργο των ροπών που ασκούνται στο στερεό σώμα είναι μηδέν.



Η αρχική στροφορμή του σώματος είναι

α. $L_0 = -10\ Kg \cdot m/s$

β. $L_0 = -20\ Kg \cdot m/s$

γ. $L_0 = -5\ Kg \cdot m/s$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

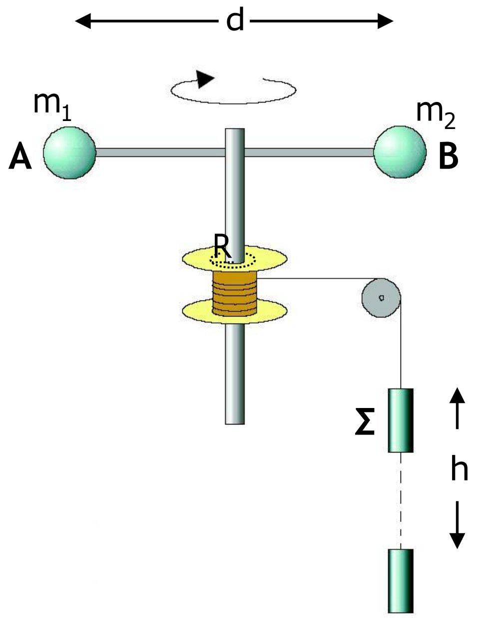
Εφόσον στο χρονικό διάστημα από 0 έως τη χρονική στιγμή t_1, το συνολικό έργο των ροπών που ασκούνται στο στερεό σώμα είναι μηδέν, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος θα είναι επίσης μηδέν. Έστω ω_0 και ω η αρχική και η τελική γωνιακή ταχύτητα του τις χρονικές στιγμές 0 και t_1. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας θα είναι

$$W = K_{τελ} - K_{αρχ} = 0 \Rightarrow K_{τελ} = K_{αρχ} \Rightarrow \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega_0^{\ 2} \Rightarrow \omega = \pm\omega_0 . \quad \textbf{(1)}$$

Η αρχική στροφορμή του σώματος είναι $L_0 = I \cdot \omega_0$ και η τελική $L = I \cdot \omega = 10 Kg \cdot m/s$, όπως φαίνεται από το διάγραμμα. Σύμφωνα με τη σχέση **(1)** θα είναι $L_0 = -L = -10 Kg \cdot m/s$.

Άσκηση 2.

Η οριζόντια και ομογενής ράβδος ΑΒ του σχήματος έχει μήκος $d = 2\,m$ μάζα $M = 3\,kg$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο σωλήνα που περνά από το κέντρο της. Στο σωλήνα έχει προσαρμοστεί, σταθερά, ένας μικρός κύλινδρος ακτίνας $R = 0{,}1\,m$. Γύρω από τον κύλινδρο είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό νήμα, στην ελεύθερη άκρη του οποίου αναρτάται, μέσω τροχαλίας, ένα σώμα Σ. Στα άκρα Α και Β της ράβδου έχουν στερεωθεί δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = 1\,kg$ και $m_2 = 2\,kg$ αντίστοιχα. Ο σωλήνας, ο κύλινδρος, η τροχαλία και το νήμα θεωρούνται αβαρή. Το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο.



Αρχικά όλη η διάταξη είναι ακίνητη. Τη στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ αφήνεται να κινηθεί και η ράβδος ξεκινά να περιστρέφεται. Το νήμα ασκεί στον κύλινδρο σταθερή ροπή μέτρου $\tau = 16\,Nm$.

Να βρείτε:

α) Τη συνολική ροπή αδράνειας $I_{ολ}$ του συστήματος της ράβδου και των δύο σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου.

β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $a_γ$ του παραπάνω συστήματος.

γ) Το ύψος h κατά το οποίο έχει κατέλθει το σώμα Σ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{10\pi}\,s$.

δ) Τον αριθμό των περιστροφών $N_{στρ}$ της ράβδου στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{12}Md^2$, $g = 10\,\frac{m}{s^2}$.

Λύση

α) Η συνολική ροπή αδράνειας ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ροπών αδράνειας της ράβδου ΑΒ, του σφαιριδίου Α και του σφαιριδίου Β ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου:

$$I_{ολ} = \frac{1}{12}Md^2 + m_1\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad I_{ολ} = \frac{1}{12}\cdot 3kg\cdot(2m)^2 + 1kg\cdot(1m)^2 + 2\cdot(1m)^2 \quad \Rightarrow$$
$$I_{ολ} = 4\,kgm^2$$

β) Η μόνη ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι η ροπή της τάσης του νήματος. Ο κύλινδρος και ο σωλήνας είναι αβαρή, άρα δεν έχουν ροπή αδράνειας. Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για το σύστημα ράβδου - σφαιριδίων, έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_{ολ}a_{\gamma} \quad \Rightarrow \quad a_{\gamma} = \frac{\Sigma\tau}{I_{ολ}} = \frac{16\,Nm}{4kgm^2} \Rightarrow \quad a_{\gamma} = 4\,\frac{rad}{s^2}$$

γ) Το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο, έτσι όταν ο κύλινδρος στραφεί κατά γωνία $\Delta\theta$, θα ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\Delta s = R\cdot\Delta\theta$ και το σώμα Σ θα κατέβει κατά $\Delta h = \Delta s$. Άρα έχουμε $\Delta h = R\cdot\Delta\theta$. Διαιρώντας 1ο και 2ο μέλος με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt που απαιτήθηκε για την παραπάνω μεταβολή παίρνουμε:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon = R\cdot\omega,$$

όπου υ συμβολίζει την ταχύτητα με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ.

Παίρνοντας ρυθμούς μεταβολής της τελευταίας σχέσης προκύπτει:

$$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = R\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = R\cdot a_{\gamma}$$

όπου α συμβολίζει την επιτάχυνση με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ.

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\alpha = 4\frac{rad}{s}\cdot 0{,}1m \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}4\,\frac{m}{s^2}$$

Από την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση του Σ έχουμε:

$$h = \frac{1}{2}\alpha t_1^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}\cdot 0,4\frac{m}{s^2}(\sqrt{10\pi}\,s)^2 \quad \Rightarrow \quad h = 2\pi\, m$$

δ) Από την ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση του συστήματος ράβδου - σφαιριδίων έχουμε:

$$\theta_1 = \frac{1}{2}a_\gamma t_1^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{1}{2}\cdot 4\frac{rad}{s^2}(\sqrt{10\pi}\,s)^2 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 20\pi\, rad$$

Για τον αριθμό περιστροφών ισχύει:

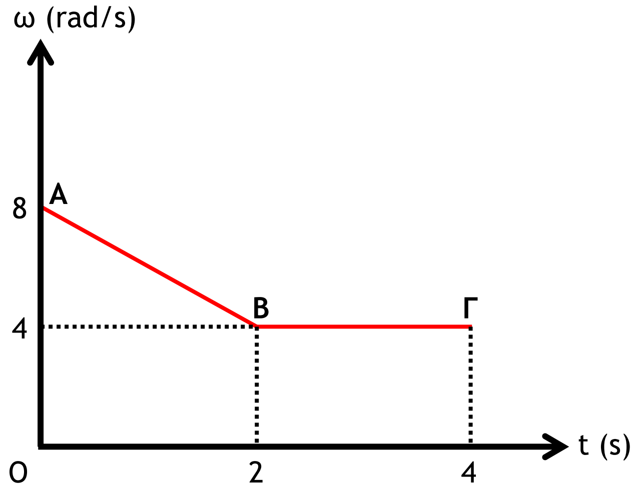
$$N_{\sigma\tau\rho} = \frac{\theta}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad N_{\sigma\tau\rho} = \frac{20\pi}{2\pi}\frac{rad}{rad/\sigma\tau\rho o\varphi.} \quad \Rightarrow \quad N_{\sigma\tau\rho} = 10 \text{ στροφές.}$$

Εναλλακτικά, η γωνία στροφής θ_1 θα μπορούσε να υπολογισθεί από το τόξο στροφής $s = \theta_1 \cdot R$, με δεδομένο ότι το μήκος του νήματος s που ξετυλίχθηκε ισούται με το ύψος h κατά το οποίο μετακινήθηκε το σώμα Σ:

$$h = \theta_1 \cdot R \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 20\pi\, rad\,.$$

Άσκηση 4.

Ένα στερεό Σ περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα ως προς τον οποίο παρουσιάζει ροπή αδράνειας $I = 0,2\,kgm^2$. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του στερεού Σ ως προς το χρόνο δίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί:



Να βρείτε:

α) την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1\,s$ και $t_3 = 3\,s$.

β) τον αριθμό των περιστροφών που εκτέλεσε το στερεό από $t_A = 0$ μέχρι $t_\Gamma = 4\,s$.

γ) την ισχύ της δύναμης που ασκείται στο στερεό τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\,s$.

δ) το μέτρο της στροφορμής του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή $t_B = 2\,s$.

<u>Λύση</u>

α) (βλ. σελίδα 109 του Σχολικού Βιβλίου)

Σε ένα διάγραμμα $\omega = \omega(t)$, η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης ισούται με την κλίση της καμπύλης.

Κίνηση ΑΒ:

Από $t_A = 0$ μέχρι $t_B = 2\,s$ η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\omega = f(t)$ είναι σταθερή, επομένως η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{d\omega}{dt}$ γράφεται:

$$a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{\omega_B - \omega_A}{t_B - t_A} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{4\frac{rad}{s} - 8\frac{rad}{s}}{2s - 0s} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu 1} = -2\frac{rad}{s^2}$$

Κίνηση ΒΓ:

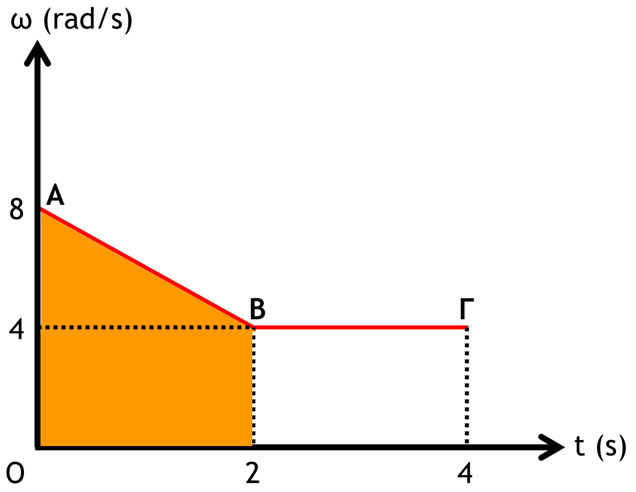
Από $t_B = 2\,s$ μέχρι $t_\Gamma = 4\,s$ η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\omega = f(t)$ είναι μηδέν, επομένως η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ είναι μηδέν:

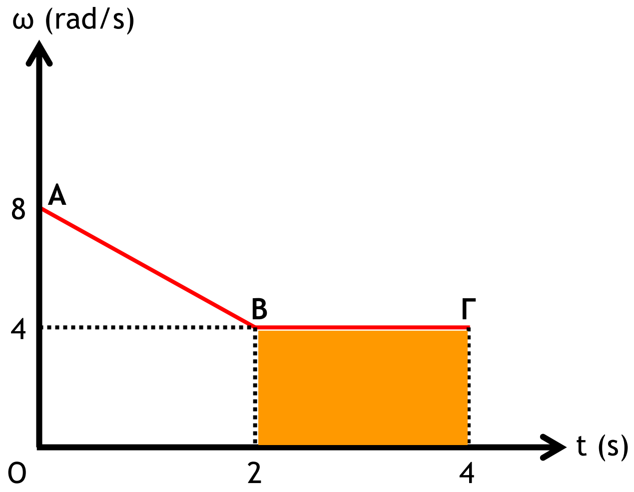
$$a_{\gamma\omega\nu 2} = 0$$

β) Σε ένα διάγραμμα $\omega = \omega(t)$, η γωνία στροφής ισούται με το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα του χρόνου t.

Από $t_A = 0$ μέχρι $t_B = 2\,s$ το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega = f(t)$ δίνει τη γωνία στροφής για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\theta_1 = \frac{(4+8)\cdot 2}{2}\,rad \Rightarrow \theta_1 = 12\,rad$$





Από $t_B = 2\,s$ μέχρι $t_\Gamma = 4\,s$ το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega = f(t)$ δίνει τη γωνία στροφής για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\theta_2 = 4 \cdot 2rad \Rightarrow \theta_2 = 8\,rad$$

$$\theta_{o\lambda} = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow \theta_{o\lambda} = 20\,rad$$

Ο αριθμός περιστροφών δίνεται από τον τύπο $N_{o\lambda} = \frac{\theta_{o\lambda}}{2\pi}$. Επομένως: $N_{o\lambda} = \frac{10}{\pi}$ στροφές.

γ) Η ισχύς της δύναμης δίνεται από τη σχέση: $P = \tau \cdot \omega$, όπου τ η ροπή της δύναμης και ω η γωνιακή ταχύτητα.

Από τον τύπο $a_{\gamma\omega\nu 1} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ υπολογίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\,s$:

$$a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad -2\frac{rad}{s^2} = \frac{\omega_1 - 8\frac{rad}{s}}{1s - 0s} \quad \Rightarrow \qquad \omega_1 = 6\frac{rad}{s}$$

Με αντικατάσταση στον τύπο $P = \tau \cdot \omega$ έχουμε:

$$P = \tau \cdot \omega_1 \quad \Rightarrow \quad P = I \cdot a_{\gamma\omega\nu 1} \cdot \omega_1 \quad \Rightarrow \quad P = 0,2kgm^2 \cdot (-2\frac{rad}{s^2}) \cdot (6\frac{rad}{s}) \quad \Rightarrow$$

$$P = -2,4\,W$$

δ) (βλ. σελίδα 122 του Σχολικού Βιβλίου)

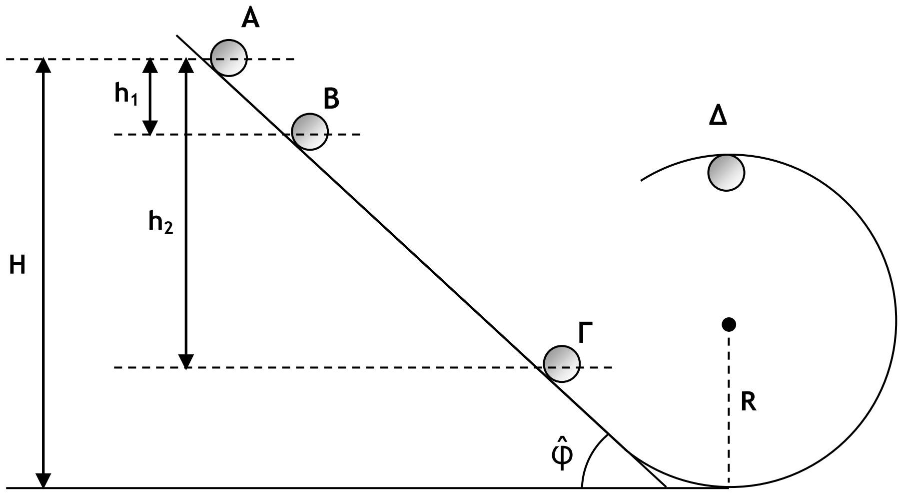
Για τη στροφορμή του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή $t_B = 2\,s$ έχουμε:

$$L = I \cdot \omega_B \quad \Rightarrow \quad L = 0,2kgm^2 \cdot 4\frac{rad}{s} \quad \Rightarrow \qquad L = 0,8\frac{kgm^2}{s}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Στη στροφική κίνηση, τα μεγέθη θ, ω, a_γ αντιστοιχούν στα μεγέθη x, υ, α της μεταφορικής κίνησης. Επομένως, το διάγραμμα $\omega - t$ αντιστοιχεί στο διάγραμμα $\upsilon - t$ που έχει μελετηθεί σε προηγούμενη τάξη.

Πρόβλημα 5.

Μια συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας $m = 0,7\,kg$ και ακτίνας r , αφήνεται από το σημείο Α ενός πλάγιου επιπέδου που σχηματίζει γωνία $\hat{\varphi}$ με το οριζόντιο δάπεδο. Το σημείο Α βρίσκεται σε ύψος $H = 84\,cm$ από το οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα καθώς κατέρχεται κυλιόμενη διέρχεται από τα σημεία Β και Γ που απέχουν από το σημείο Α κατακόρυφη απόσταση h_1 και h_2 αντίστοιχα, με $h_2 = 4h_1$. Μόλις η σφαίρα φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου, μπαίνει σε κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 28\,cm$. Η σφαίρα κυλιόμενη εντός της κυκλικής στεφάνης εκτελεί ανακύκλωση.



α) Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας, α_{cm} , της σφαίρας κατά την κίνησή της στο πλάγιο επίπεδο.

β) Να βρείτε το λόγο των μέτρων $\frac{L_B}{L_\Gamma}$ των στροφορμών της σφαίρας στις θέσεις Β και Γ.

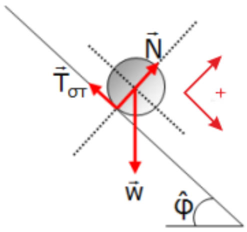
γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας υ_{cm} στο ανώτερο σημείο της στεφάνης (σημείο Δ στο σχήμα).

δ) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης N που δέχεται η σφαίρα από τη στεφάνη στο σημείο Δ.

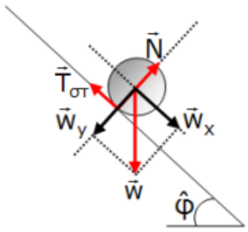
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$, $\eta\mu\hat{\varphi} = 0,7$. Η ακτίνα της σφαίρας r είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R της στεφάνης, $g = 10\,\frac{m}{s^2}$, Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα.

Στο σχήμα (α) φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα καθώς κατέρχεται στο πλάγιο επίπεδο. Στο σχήμα (β) έχει αναλυθεί το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες:



(α)



(β)

Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{α}_{cm} \Rightarrow w_x - T_{στ} = mα_{cm} \Rightarrow T_{στ} = mgημφ - mα_{cm} \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της σφαίρας ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma\vec{τ} = I\vec{a}_γ \Rightarrow T_{στ}\cdot r = \frac{2}{5}mr^2 a_γ \Rightarrow T_{στ} = \frac{2}{5}mra_γ$$

Επειδή η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη $α_{cm} = a_γ r$, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται $T_{στ} = \frac{2}{5}mα_{cm}$ (2)

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) έχουμε:

$$T_{στ} = mgημφ - mα_{cm} \Rightarrow \frac{2}{5}mα_{cm} + mα_{cm} = mgημφ \Rightarrow \frac{7}{5}α_{cm} = gημφ \Rightarrow$$

$$α_{cm} = \frac{5}{7}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,7 \Rightarrow α_{cm} = 5\frac{m}{s^2}$$

β) Για το λόγο $\frac{L_B}{L_Γ}$ των δύο στροφορμών ισχύει:

$$\frac{L_B}{L_Γ} = \frac{Iω_B}{Iω_Γ} \Rightarrow \frac{L_B}{L_Γ} = \frac{ω_B}{ω_Γ} \quad (3)$$

Τα ω_B, ω_Γ θα βρεθούν από τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ της θέσης Α και των θέσεων Β, Γ αντίστοιχα. Επειδή η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη $(\upsilon_{cm}=\omega r)$, η κινητική της ενέργεια μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}{}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}(mr^2\omega^2+\frac{2}{5}mr^2\omega^2) \Rightarrow K=\frac{1}{2}m(r^2\omega^2+\frac{2}{5}r^2\omega^2) \Rightarrow$$

$$K=\frac{7}{10}mr^2\omega^2 \text{ ή } K=\frac{7}{10}m\upsilon_{cm}{}^2 \quad (4),\ (5)$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β και γράφοντας την κινητική ενέργεια με τη μορφή της σχέσης (4) έχουμε (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Β):

$$U_B+K_B=U_A+K_A \Rightarrow 0+\frac{7}{10}mr^2\omega_B^2=mgh_1 \Rightarrow \omega_B^2=\frac{10}{7}\frac{g}{r^2}h_1 \Rightarrow \omega_B=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g}{7}h_1}$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Γ):

$$U_\Gamma+K_\Gamma=U_A+K_A \Rightarrow 0+\frac{7}{10}mr^2\omega_\Gamma^2=mgh_2 \Rightarrow \omega_\Gamma^2=\frac{10}{7}\frac{g}{r^2}h_2 \Rightarrow \omega_\Gamma=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g}{7}h_2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$\frac{L_B}{L_\Gamma}=\frac{\omega_B}{\omega_\Gamma}=\frac{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g}{7}h_1}}{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g}{7}h_2}} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma}=\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}=\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma}=\frac{1}{2}$$

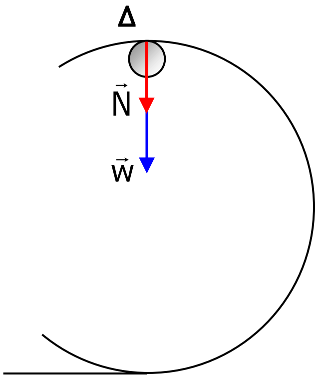
γ) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας, θέτοντας ως αρχική τη θέση Α και ως τελική τη θέση Δ. Λαμβάνοντας υπόψη ότι r<<R και γράφοντας την κινητική ενέργεια με τη μορφή της σχέσης (5), έχουμε:

$$U_\Delta+K_\Delta=U_A+K_A \Rightarrow mg2R+\frac{7}{10}m\upsilon_{cm}^2=mgH+0 \Rightarrow \upsilon_{cm}=\sqrt{\frac{10}{7}g(H-2R)} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{cm}=\sqrt{\frac{10}{7}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot(0,84m-0,56m)} \Rightarrow \upsilon_{cm}=\sqrt{\frac{100}{7}\cdot 0,28}\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_{cm}=2\frac{m}{s}$$

δ) Η σφαίρα φτάνοντας στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής διαδρομής, δέχεται συνισταμένη (κεντρομόλο) δύναμη στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma F\,(=F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}) = \frac{m{\upsilon_{cm}}^2}{R}$$



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στο σημείο Δ είναι το βάρος της $\vec{w}$ και η δύναμη από τη στεφάνη $\vec{N}$. Με αντικατάσταση έχουμε:

$$mg + N = \frac{m{\upsilon_{cm}}^2}{R} \quad \Rightarrow N = \frac{m{\upsilon_{cm}}^2}{R} - mg = \frac{0,7kg\cdot(2m/s)^2}{0,28m} - 0,7kg\cdot 10m/s^2 \Rightarrow$$

$$N = 3N$$

Πρόβλημα 9.

Ένα κομμάτι ξύλου μάζας $m = 0,5Kg$ είναι ακλόνητα στερεωμένο στο κάτω άκρο ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου μάζας $M = 2Kg$. Το συνολικό μήκος ράβδου και κομματιού από ξύλο είναι $r = 1m$. Το πάνω άκρο της ράβδου είναι συνδεμένο σε ακλόνητο σημείο Ο με τέτοιο τρόπο ώστε η ράβδος να μπορεί να στρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο Ο, χωρίς τριβές. Το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε κατακόρυφη θέση. Ένα μικρό σώμα Σ, μάζας $m_1 = 0,5Kg$, που ολισθαίνει σε λείο τεταρτοκύκλιο ακτίνας $r = 1m$, φτάνοντας στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα υ_0, προσπίπτει και σφηνώνεται στο ξύλο. Μετά την κρούση το σύστημα ράβδος - ξύλο - βλήμα εκτρέπεται ώστε η μέγιστη απόκλιση της ράβδου από την αρχική κατακόρυφη θέση της να είναι $\theta = 60^0$. Να υπολογίσετε:

α) τη ροπή αδράνειας του συστήματος σώμα - ξύλο – ράβδος.

β) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

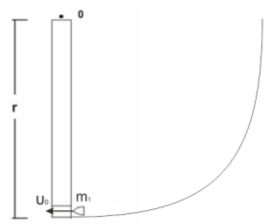
γ) το μέτρο της ταχύτητας υ_0 του βλήματος πριν την κρούση.

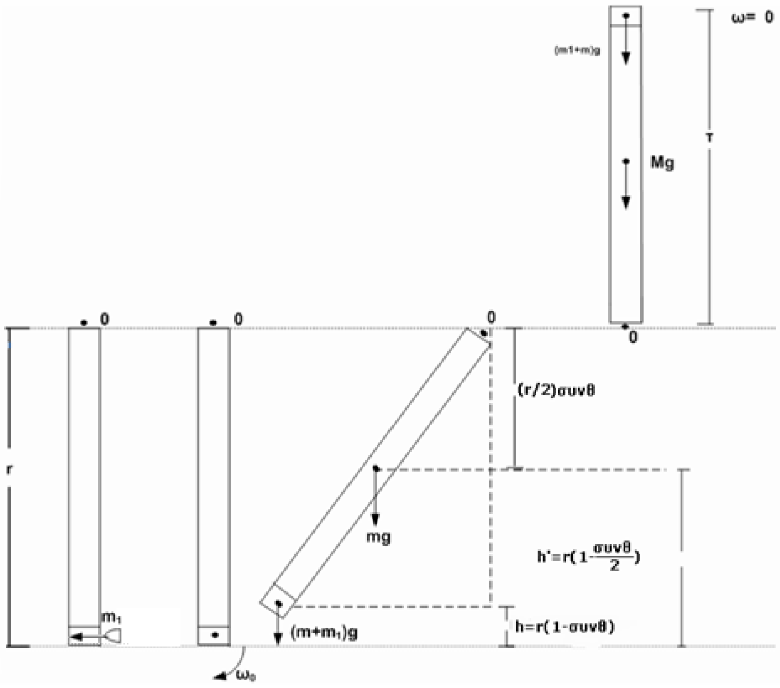
δ) Το ποσό της θερμότητας, που δημιουργήθηκε στη διάρκεια της κρούσης.

ε) το μέτρο της την ταχύτητας του βλήματος, ώστε το σύστημα βλήμα-ράβδος- ξύλο, να κάνει ανακύκλωση.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I = \frac{Mr^2}{12}$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\frac{m}{s^2}$, οι διαστάσεις του ξύλου και του βλήματος να θεωρηθούν αμελητέες, αντιστάσεις αέρα και τριβές αμελητέες.

<u>Λύση</u>





α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος σώμα - ξύλο - ράβδος ως προς τον άξονα περιστροφής Ο είναι ίση με: $I_{ολ(O)} = I_{ρ(O)} + I_{ξ(O)} + I_{σ(O)}$ (1)

Επειδή δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της, ενώ η ράβδος θα στραφεί ως προς το σημείο Ο, με το θεώρημα Steiner θα βρούμε τη ροπή αδράνειάς της ως προς το σημείο αυτό.

$$I_{ρ(O)} = \frac{Mr^2}{12} + M(\frac{r}{2})^2 = \frac{Mr^2}{3} \Rightarrow I_{ρ(O)} = \frac{2}{3}Kgm^2 \quad (2)$$

Η ροπή αδράνειας του σώματος $(I_σ)$ ως προς το Ο θα είναι:

$$I_{σ(O)} = m_1 r^2 = 0,5Kgm^2 \quad (3)$$

Η ροπή αδράνειας του ξύλου $(I_ξ)$ ως προς το Ο θα είναι:

$$I_{ξ(O)} = mr^2 = 0,5Kgm^2 \quad (4)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε την ολική ροπή αδράνειας του συστήματος $(I_{ολ})$ σώμα (m_1) - ξύλο - ράβδος, ως προς το Ο.

$$I_{ολ(O)} = (\frac{2}{3} + 0,5 + 0,5)kgm^2 \Rightarrow I_{ολ(O)} = \frac{5}{3}kgm^2 \quad (5)$$

β) Μετά την κρούση το σύστημα θα στραφεί γύρω από το σημείο Ο. Αφού δεν υπάρχουν τριβές η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Συνεπώς, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το κατώτερο σημείο της ράβδου, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, από τη στιγμή που ολοκληρώθηκε η κρούση μέχρις ότου η ράβδος σχηματίσει γωνία $\theta = 60^0$ με την κατακόρυφο:

$$\frac{Mgr}{2} + \frac{I_{ολ}\omega^2}{2} = (m + m_1)gh + Mgh' \quad (6)$$

όπου $h' = r[1 - (\frac{συνθ}{2})] = 0,75m$ (7)

και

$$h = r \cdot (1 - συνθ) = 0,5m \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας στην (6) τις (5), (7) και (8) βρίσκουμε $\omega = 2\sqrt{3}\ \frac{rad}{s}$.

γ) Το σώμα Σ ελάχιστα πριν την κρούση εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 1m$, άρα έχει στροφορμή ως προς τον άξονα Ο που βρίσκεται από τη σχέση:

$$L_{σωμ} = m_1 \upsilon_0 r = 0,5\upsilon_0 \ \text{(S.I.)} \quad (9)$$

Επειδή στη διάρκεια της κρούσης του σώματος με το ξύλο, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους είναι εσωτερικές και όλες οι άλλες δυνάμεις έχουν ροπή μηδέν ως προς το Ο, η στροφορμή του συστήματος σώμα-ξύλο - ράβδος διατηρείται, οπότε από την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετά)} \Rightarrow L_{σωμ(πριν)} = L_{συστ(μετά)} \Rightarrow 0,5\upsilon_0 = I_{ολ(O)}\omega \Rightarrow 0,5\upsilon_0 = \frac{5}{3}\omega \ \text{(SI)} \quad (10)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (10) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση του με το ξύλο.

$$0,5\upsilon_0 = \frac{5}{3}\omega \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{10}{3} \cdot 2\sqrt{3} m/s \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{20\sqrt{3}}{3} m/s$$

δ) $Q = \frac{m_1\upsilon_0^2}{2} - \frac{I_{ολ}\omega^2}{2} = \frac{0,5kg \cdot (\frac{20\sqrt{3}}{3} m/s)^2}{2} - \frac{\frac{5}{3}kgm^2(2\sqrt{3}rad/s)^2}{2} \Rightarrow$

$$Q = \frac{100}{3}J - 10J \Rightarrow Q = \frac{70}{3}J$$

ε) Έστω ότι το σώμα Σ έχει την κατάλληλη ταχύτητα υ_1 ώστε μετά την κρούση το σύστημα να έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1 ικανή ώστε να κάνει ανακύκλωση.

Για να κάνει ανακύκλωση θα πρέπει να φτάσει στο ψηλότερο σημείο με γωνιακή ταχύτητα ελάχιστα μεγαλύτερη από το μηδέν. Θα θεωρήσουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος στο ψηλότερο σημείο είναι μηδέν (αν είναι ακριβώς μηδέν θα ισορροπήσει στο σημείο αυτό).

Επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται για το σύστημα, γράφουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της κατώτερης και της υψηλότερης θέσης. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την κατώτερη θέση:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow U_{\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{Mgr}{2} + \frac{I_{o\lambda}\omega_1^2}{2} = (m + m_1)g2r + \frac{Mg3r}{2} .$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να έχει η ράβδος αμέσως μετά την κρούση, προκύπτει $\omega_1 = \sqrt{48}\,\frac{rad}{s}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (7) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση του με το ξύλο.

$$0,5\upsilon_1 = \frac{5}{3}\omega_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{10}{3}\cdot\sqrt{48}\,m/s \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{40\sqrt{3}}{3}\,m/s$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 12/05/2016

Επιμέλεια: Δημήτριος Κλαυδιανός, Παναγιώτης Μπετσάκος, Αντώνιος Παλόγος, Γεώργιος Παπαλεξίου, Ηλίας Ποντικός, Κωνσταντίνος Στεφανίδης, Παναγιώτης Τσουμάκης

Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Βασίλειος Ραυτόπουλος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης