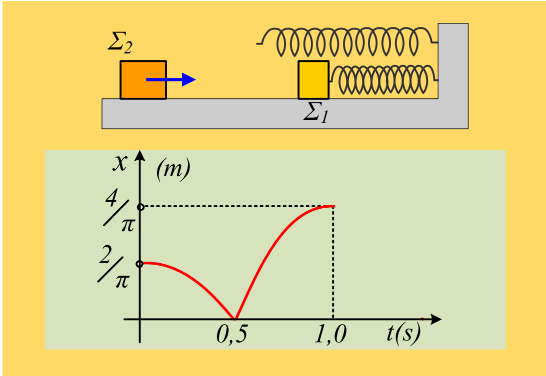
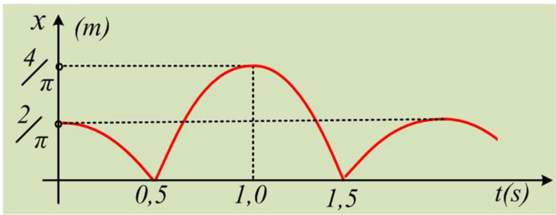
Το διάγραμμα απομάκρυνσης και δυο κρούσεις.



Ένα σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=2\cdot\pi^2\approx 20N/m$ και συγκρατείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας συμπιέσει το ελατήριο κατά $(2/\pi)m$. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου πλησιάζοντας το σώμα Σ_1. Σε μια στιγμή $t_0=0$, αφήνουμε το Σ_1 να ταλαντωθεί και στο διπλανό σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή $t_2=1s$, όπου μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά του για πρώτη φορά, μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2.

i) Να βρεθεί η μάζα του σώματος Σ_1, καθώς και η ταχύτητά του ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2.

ii) Υποστηρίζεται ότι η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων μπορεί να είναι πλαστική. Να εξετάσετε αν αυτό μπορεί να ισχύει.

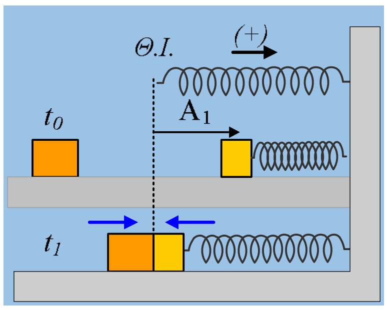


iii) Παρακολουθώντας την παραπέρα κίνηση του σώματος Σ_1, διαπιστώνουμε ότι η απομάκρυνση, από τη θέση ισορροπίας του, μεταβάλλεται συνολικά όπως στο διπλανό σχήμα. Αν οι κρούσεις μεταξύ των σωμάτων είναι ελαστικές:

α) Ποια η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 πριν την πρώτη του κρούση με το Σ_1 και ποια αμέσως μετά την κρούση;

β) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Σ_2 και η τελική του ταχύτητα.

Απάντηση:



i) Με βάση τη γραφική παράσταση, το σώμα ξεκινά από απομάκρυνση $x_0=\pi/2$ m, θετικής τιμής, οπότε έχουμε πάρει την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική. Εξάλλου αυτή η αρχική απομάκρυνση είναι και η μέγιστη, αφού το σώμα Σ_1 ξεκινά από την ηρεμία, έχουμε δηλαδή το σώμα να ξεκινάει από θέση πλάτους και να ταλαντώνεται με πλάτος $A_1=(2/\pi)m$ και να χρειάζεται χρόνο $t_1=0{,}5s$ για να φτάσει στη θέση ισορροπίας, θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, όπου μεταβάλλεται απότομα η κίνησή του, λόγω κρούσης και επιστρέφει ξανά κινούμενο προς τα δεξιά. Με βάση αυτά το χρονικό διάστημα t_1 είναι ίσο με το ¼ Τ, οπότε $T=4t_1=2s$ και παίρνουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \rightarrow \quad (1)$$

$$m_1 = \frac{kT^2}{4\pi^2} = \frac{2\pi^2 \cdot 2^2}{4\pi^2} kg = 2kg$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 πριν την κρούση, συνδέεται με το πλάτος με τη σχέση:

$$\upsilon_1 = A_1 \cdot \omega = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{T} = 2m/s.$$

Μετά την κρούση, βλέπουμε ότι το σώμα Σ_1 εκτελεί μια νέα ταλάντωση με διπλάσιο πλάτος, συνεπώς ξεκινά από τη θέση ισορροπίας του (δεν αλλάζει αυτή…) με ταχύτητα:

$$\upsilon'_1 = A_2\omega = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{T} = 4m/s.$$

Να σημειωθεί ότι η ταχύτητα αυτή είναι θετική, αφού το σώμα κινείται ξανά προ τα δεξιά (απομακρυνόμενο από την Θ.Ι.), ενώ δεν έχει αλλάξει η περίοδος ταλάντωσης, αφού χρειάζεται επίσης χρονικό διάστημα Δt=0,5s για να φτάσει σε θέση πλάτους.

ii) Αν η κρούση ήταν πλαστική, θα είχαμε στη συνέχεια μια ταλάντωση του συσσωματώματος με μάζα m_1+m_2, και κατά συνέπεια θα είχαμε και μεταβολή στην περίοδο της ταλάντωσης, με βάση την εξίσωση (1), πράγμα που δεν συμβαίνει εδώ, αφού με βάση το διάγραμμα απαιτείται χρονικό διάστημα για τη μετάβαση από τη θέση ισορροπίας στην μέγιστη απομάκρυνση, ίσο με 0,5s, ίσο δηλαδή με το ¼ της αρχικής περιόδου του σώματος Σ_1.

iii) Με βάση το δεύτερο (συνολικό) διάγραμμα της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1, βλέπουμε ότι έχουμε και δεύτερη κρούση (απότομη αλλαγή της κίνησης..) τη χρονική στιγμή t_2=1,5s, όταν το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του (x=0).

α) Αυτό σημαίνει ότι μετά την πρώτη κρούση το σώμα Σ_2 έμεινε ακίνητο στη θέση αυτή. Αλλά τότε από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας, πριν και μετά την πρώτη κρούση παίρνουμε, αφού K'_2=0:

$$K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 \rightarrow$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_1 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$K_2 = \frac{1}{2}2 \cdot 4^2J - \frac{1}{2}2 \cdot 2^2J = 12J$$

β) Μετά την δεύτερη κρούση, βλέπουμε ότι το σώμα Σ_1 ξεκινά μια $3^η$!!! ταλάντωση με το ίδιο πλάτος με την πρώτη ταλάντωση (2/π)m, πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητά του μετά την κρούση έχει φορά προς τα δεξιά και μέτρο $\upsilon_1''=\upsilon_1$= 2m/s, ενώ ελάχιστα πριν την κρούση αυτή, κινείται προς τη θέση ισορροπίας του, (προς τα αριστερά) με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{1\pi}'$=4m/s. Αλλά για την ταχύτητα του σώματος Σ_1 μετά την κεντρική και ελαστική $2^η$ κρούση του ισχύει:

$$\upsilon''_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon'_{1\pi} \rightarrow$$

$$2 = \frac{2 - m_2}{2 + m_2}(-4) \rightarrow m_2 = 6\text{kg}$$

Αλλά τότε παίρνοντας την εξίσωση για την ταχύτητά του μετά την 2η κρούση, θα έχουμε:

$$\upsilon''_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon'_{1\pi} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 6}(-4)m/s = -2m/s$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το Σ_2 μετά την δεύτερη κρούση θα κινηθεί προς τα αριστερά, με κινητική ενέργεια, όση είχε και πριν την πρώτη κρούση, ενώ και το Σ_1 θα συνεχίσει να ταλαντώνεται με ενέργεια επίσης ίση με αυτήν που είχε αρχικά… Σαν να μην συνέβη… τίποτα!!!

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να απαντήσουμε στο τελευταίο ερώτημα χρησιμοποιώντας και τους τύπους της ελαστικής κρούσης, για την πρώτη κρούση. Το αποφύγαμε για «οικονομία» στις αριθμητικές πράξεις…

dmargaris@gmail.com