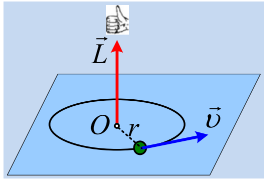
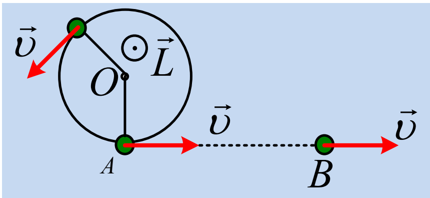
# *Στροφορμή. Μερικές όψεις…*

**_Ένα φυλλάδιο θεωρίας και μερικών εφαρμογών._**




Με βάση το σχολικό μας βιβλίο, ορίζουμε τη στροφορμή ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση κέντρου Ο, το διάνυσμα $\vec{L}$ το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, στο κέντρο Ο και έχει μέτρο L=mυr, ενώ η φορά της προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Αλλά η παραπάνω τοποθέτηση, αφήνει στο μυαλό του μαθητή την αντίληψη ότι για έχει ένα υλικό σημείο στροφορμή, θα πρέπει να εκτελεί κυκλική κίνηση, πράγμα που προφανώς δεν είναι σωστό. Αρκεί να δούμε την περίπτωση του παρακάτω σχήματος:



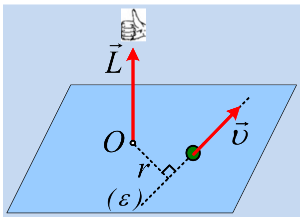

***κάτοψη***

Το υλικό σημείο μάζας m διαγράφει την οριζόντια κυκλική τροχιά του σχήματος και τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο Α, το νήμα κόβεται. Τι θα κάνει; Προφανώς θα κινηθεί ευθύγραμμα.

Πόση είναι η στροφορμή του ως προς το σημείο Ο, ελάχιστα πριν κοπεί το νήμα και πόση αμέσως μετά; Πόση είναι η στροφορμή του ως προς το σημείο Ο, τη στιγμή που περνά από το σημείο Β;

Ασκήθηκε κάποια ροπή στο σώμα που του άλλαξε τη στροφορμή στη θέση Α; Προφανώς όχι.

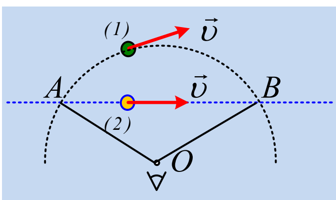
Οπότε αν, πριν κοπεί το νήμα το υλικό σημείο έχει στροφορμή ως προς το σημείο Ο, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τον αναγνώστη και μέτρο L=mυr, τότε και μετά το κόψιμο του νήματος και στη θέση Β, θα έχει την ίδια στροφορμή.




Αλλά τότε θα ήταν πολύ προτιμότερο, να ορίζαμε τη στροφορμή υλικού σημείου ως προς σημείο Ο, με βάση το διπλανό σχήμα, ως το διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν το σημείο Ο και ο φορέας της ταχύτητας (ευθεία ε) και r η απόσταση του Ο από την (ε).

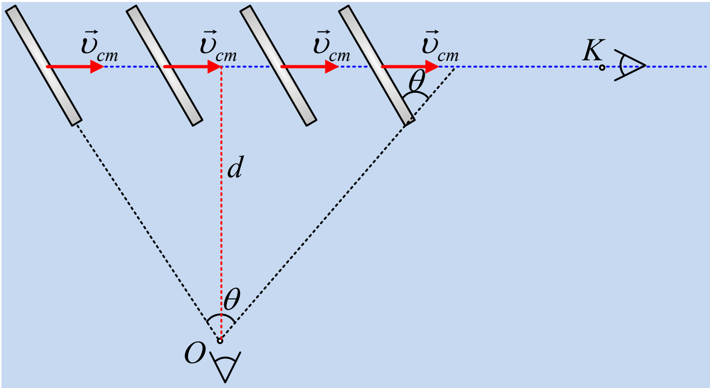
Αλλά πέρα από ορισμούς και συμβάσεις, ας εξετάσουμε και δυο περιπτώσεις για δούμε πόσο κατανοούμε την αναγκαιότητα «ανοίγματος» του ορισμού του βιβλίου μας.

Στο παρακάτω σχήμα το υλικό σημείο (1) εκτελεί κυκλική κίνηση κέντρου Ο, ενώ το (2) κινείται ευθύγραμμα από τη θέση Α μέχρι τη θέση Β.



Για έναν παρατηρητή στο Ο και τα δυο υλικά σημεία στρέφονται γύρω από το Ο, αφού θα πρέπει να «στρίψει» το πρόσωπό του, για να παρακολουθήσει, τόσο την μετακίνηση του κινητού (1) όσο και του κινητού (2).

Αλλά ας έρθουμε τώρα σε μια ράβδο (ένα στερεό) που εκτελεί μεταφορική κίνηση, κινούμενο ευθύγραμμα όπως στο σχήμα.

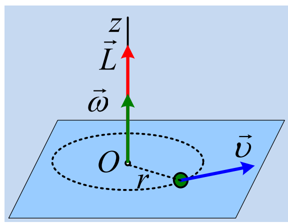



Για ένα παρατηρητή που βρίσκεται στο σημείο Ο «βλέπει» τη ράβδο να «στρέφεται» κατά γωνία θ παρότι αυτή δεν αλλάζει προσανατολισμό, οπότε υπολογίζει στροφορμή οφειλόμενη στη μεταφορική κίνηση με μέτρο $L_o=M\upsilon_{cm}\cdot d$. Αντίθετα για έναν παρατηρητή Κ στον φορέα της ταχύτητας, δεν υπάρχει καμιά «στροφή» συνεπώς η στροφορμή είναι μηδενική. Περίεργο να έχουμε στροφορμή για τον ένα παρατηρητή και όχι για τον άλλον; Όχι βέβαια, ας μην ξεχνάμε ότι το πρώτο χαρακτηριστικό κάθε κίνησης συνδέεται με το σύστημα αναφοράς μας. Απλά αξίζει να τονισθεί ότι η στροφορμή αυτή εξαρτάται από το σημείο **ως προς το οποίο** υπολογίζεται ενώ η ράβδος αντιμετωπίζεται ως υλικό σημείο.

## 1) *Και η στροφορμή κατά τον άξονα;*

Παραπάνω ορίσαμε τη στροφορμή ενός υλικού σημείου **ως προς το σημείο** Ο. Δηλαδή ορίζουμε τη στροφορμή ως προς σημείο και όχι ως προς άξονα!

Αλλά ας επιστρέψουμε στο υλικό σημείο που κινείται κυκλικά σε οριζόντιο κύκλο. Η στροφορμή είναι κατακόρυφη, οπότε θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι έχουμε περιστροφή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z και να μιλήσουμε για τη στροφορμή του υλικού σημείου **κατά τον** άξονα z.

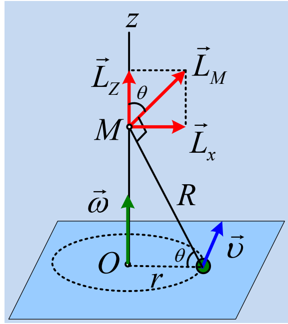



Το μέτρο της στροφορμής θα ήταν $L_z=m\upsilon\cdot r=mr^2\cdot\omega$ και η κατεύθυνσή της θα ήταν ίδια με την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας, όπως στο σχήμα, οπότε θα μπορούσαμε να γράψουμε για την στροφορμή:

$$\vec{L}_z=(mr^2)\vec{\omega}$$

Αναγνωρίζοντας την ποσότητα ($mr^2$) ως την ποσότητα που αντιστοιχεί στη ροπή αδράνειας!

Αλλά ας υπολογίσουμε τη στροφορμή της σημειακής μάζας όχι ως προς το σημείο Ο του άξονα, αλλά ως προς το σημείο Μ, όπως στο διπλανό σχήμα.




Η στροφορμή ως προς το σημείο Μ, είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζει το Μ και ο φορέας της ταχύτητας και μέτρο $L_M$=mυR.

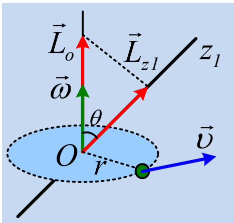
Αν αναλύσουμε την παραπάνω στροφορμή, η συνιστώσα της πάνω στον άξονα z έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο:

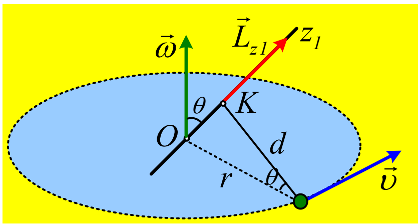
$$L_z=L_M\cdot\sigma\upsilon\nu\theta= m\upsilon R\cdot\frac{r}{R}=m\upsilon r$$

Ίση δηλαδή με τη στροφορμή όπως υπολογίστηκε ως προς το κέντρο του κύκλου Ο.

Συμπέρασμα: Ως προς όλα τα σημεία του άξονα, η στροφορμή του υλικού σημείου δεν είναι ίδια, αλλά αν πάρουμε την εκάστοτε συνιστώσα της πάνω στον άξονα, αυτή έχει σταθερή τιμή ίση με $L_z$=mυr. Τη στροφορμή αυτή υπολογίζουμε όταν αναφερόμαστε στη στροφορμή του υλικού σημείου **κατά** (ως προς) τον άξονα.

Θα μπορούσε όμως να μας ενδιαφέρει η στροφορμή του υλικού σημείου κατά τον άξονα $z_1$, ο οποίος δεν είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς αλλά σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, όπως στο δεξιό σχήμα.




Τότε, αναφερόμενοι στο σημείο Ο του άξονα $z_1$, ως προς το οποίο το υλικό σημείο έχει στροφορμή όπως στο πρώτο σχήμα με μέτρο $L_o$ =mυr, τότε η στροφορμή κατά τον άξονα $z_1$ θα είναι η συνιστώσα της στροφορμής $L_o$ στη διεύθυνση του άξονα $z_1$. Δηλαδή:

$$L_{z1}=L_o\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

Αλλά, ας πάρουμε μια θέση του υλικού σημείου, τη στιγμή που βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν η κάθετη στο επίπεδο και ο άξονας $z_1$ και ας φέρουμε την κάθετη στον άξονα $z_1$ από τη θέση που βρίσκεται το υλικό σημείο, η γωνία που σχηματίζει με την ακτίνα του κύκλου είναι επίσης θ (γωνίες με πλευρές κάθετες) και η παραπάνω σχέση γίνεται:

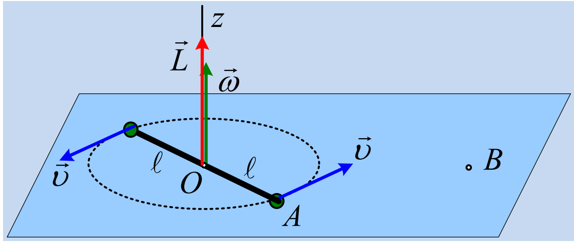
$$L_{z1}=L_o\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(mr^2)\omega\cdot\frac{d}{r}=m\upsilon\cdot d$$

Όπου d η απόσταση του υλικού σημείου από τον άξονα $z_1$.

Αξίζει να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι η στροφορμή **κατά** τον άξονα $z_1$ και η γωνιακή ταχύτητα, **δεν έχουν** την ίδια κατεύθυνση!

Στο βιβλίο την στροφορμή **κατά** έναν ορισμένο άξονα, την ονομάζει στροφορμή **ως προς** τον άξονα, έκφραση όχι ιδιαίτερα πετυχημένη, αφού η στροφορμή ορίζεται ως προς σημείο (στο παραπάνω παράδειγμα ως προς το σημείο Ο ή ως προς το σημείο Κ).

### *2) Και η στροφορμή ενός στερεού ως προς ένα σημείο, σε μια επίπεδη κίνηση;*




Ας πάρουμε το απλούστερο στερεό S, το οποίο αποτελείται από δυο ίσες σημειακές μάζες m στα άκρα μιας αβαρούς ράβδου (λέγοντας αβαρούς εννοούμε μιας ράβδου με πολύ-πολύ μικρότερη μάζα, από τις μάζες των δύο σημειακών σωμάτων), μήκους $2\ell$. Το στερεό μας S στρέφεται όπως στο σχήμα, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το μέσον Ο της ράβδου, με γωνιακή ταχύτητα ω.

i) Πόση είναι η στροφορμή του στερεού μας ως προς το σημείο Ο;

ii) Να βρεθεί η στροφορμή του στερεού μας, ως προς τα σημεία Α και Β του σχήματος.

***Απάντηση:***

i) Το στερεό S μπορούμε να το δούμε σαν ένα σύστημα αποτελούμενο από δυο σημειακές μάζες και μια ράβδο. Συνεπώς η στροφορμή του θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα τριών στροφορμών:

$$\vec{L}_s = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_\rho$$

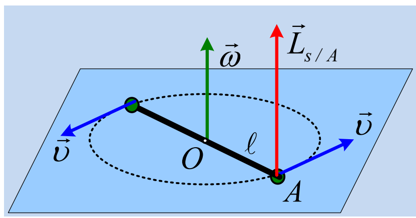
Αλλά αφού η ράβδος είναι αβαρής δεν έχει στροφορμή, οπότε μένουν οι στροφορμές των δύο σημειακών μαζών οι οποίες είναι κατακόρυφες με φορά προς τα πάνω και η συνολική στροφορμή είναι:

$$L_s = m_1\upsilon_1 r + m_2\upsilon_2 r = m\cdot\omega\ell\cdot\ell + m\cdot\omega\ell\cdot\ell = 2m\ell^2\cdot\omega = I_{cm}\omega$$

Παρατηρούμε ότι η στροφορμή του στερεού, ως προς το κέντρο μάζας του Ο, έχει την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας και δικαιούμαστε να γράψουμε:

$$\vec{L}_s = I_{cm}\vec{\omega}$$

ii) Η στροφορμή του στερεού S ως προς το σημείο Α (θέση της μιας σημειακής μάζας) θα είναι ίση με:

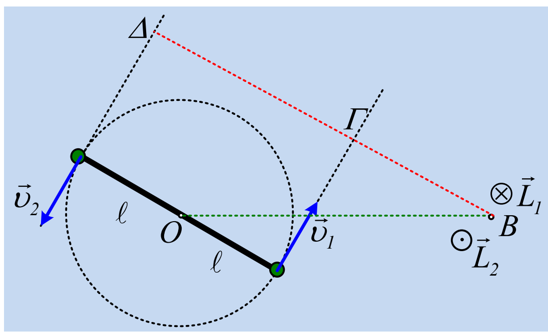



$$\vec{L}_{s/A} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_\rho \rightarrow$$

$$L_{s/A} = m_2\cdot\upsilon_2\cdot d = m\cdot\omega r\cdot 2\ell = 2m\ell^2\cdot\omega = I_{cm}\omega$$

Με κατεύθυνση όπως στο διπλανό σχήμα.

Μπορούμε να επισημάνουμε ότι η στροφορμή του στερεού ως προς το ένα άκρο της ράβδου, έχει κατεύθυνση παράλληλη προς την γωνιακή ταχύτητα, κάθετη στο επίπεδο που διαγράφει το στερεό και μέτρο ίσο με το μέτρο της στροφορμής και ως προς το κέντρο μάζας Ο.




Ας έρθουμε τώρα στον υπολογισμό της στροφορμής ως προς το σημείο Β, τροποποιώντας το σχήμα μας, προς διευκόλυνση.

Έστω $L_1$ η στροφορμή ως προς το σημείο Β της σημειακής μάζας με ταχύτητα $υ_1$ και $L_2$ η αντίστοιχη στροφορμή της σημειακής μάζας $m_2$. Για τα μέτρα τους θα έχουμε:

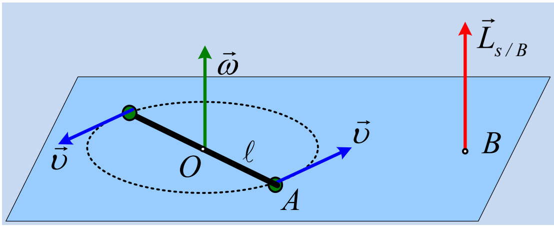
$$L_1=m_1\cdot υ_1\cdot(ΒΓ) = m\cdot ω\cdot \ell \cdot(ΒΓ) \text{ και } L_2= m_2\cdot υ_2\cdot(ΒΔ) = m\cdot ω\cdot \ell \cdot(ΒΔ)$$

Αλλά τότε η συνολική στροφορμή ω προς το σημείο Β θα έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τον αναγνώστη και μέτρο:

$$L_{s/B} = L_2 - L_1 = mω\ell(ΒΔ) - mω\ell(ΒΓ) \rightarrow$$

$$L_{s/B} = mω\ell(ΒΔ - ΒΓ) = mω\ell \cdot 2\ell$$

$$L_{s/B} = 2m\ell^2 ω = I_{cm}ω$$




Συνεπώς αναφερόμενοι στο αρχικό σχήμα μας και για ένα τυχαίο σημείο, η στροφορμή του στερεού μας S, ως προς το Β έχει μέτρο ξανά $I_{cm}ω$ και κατεύθυνση ίδια με την γωνιακή ταχύτητα!

***Συμπέρασμα:***

Ένα επίπεδο στερεό που στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του με γωνιακή ταχύτητα ω, έχει μια στροφορμή με μέτρο $L=I_{cm}\cdot ω$ την οποία μπορούμε να αποδώσουμε στην «ιδιοπεριστροφή» του και η οποία είναι πάντα ίδια, ανεξάρτητα του σημείου υπολογισμού της.

### 3) Και η στροφορμή του στερεού κατά (ως προς) ένα άξονα;

Το παραπάνω στερεό S στρέφεται όπως και πριν.

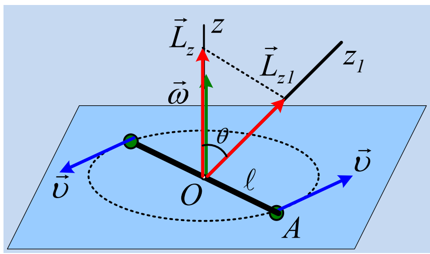
Να υπολογιστεί η στροφορμή του:

i) Κατά τον άξονα z τον κάθετο στο επίπεδο περιστροφής του.

ii) Κατά τον άξονα $z_1$ ο οποίος σχηματίζει γωνία θ με τον προηγούμενο άξονα z.

***Απάντηση:***

i) Η στροφορμή που προηγούμενα υπολογίσαμε ως προς το σημείο Ο, το κέντρο μάζας, είναι κατακόρυφη έχοντας την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας και μέτρο $L_{cm}=2m\ell^2ω$ και συνεπώς έχει την κατεύθυνση του άξονα z. Θα μπορούσαμε λοιπόν να γράψουμε για την στροφορμή του στερεού S κατά τον άξονα z την μαθηματική εξίσωση:

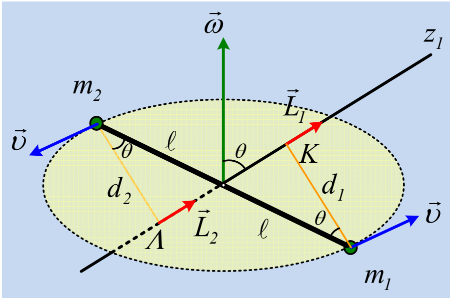



$$\vec{L}_{s/z} = I_{cm/z}\vec{ω}$$

ii) Στην περίπτωση τώρα για την στροφορμή κατά τον άξονα $z_1$, με βάση το σχήμα θα έχουμε ότι η στροφορμή $L_{z1}$ είναι ίση με την προβολή της στροφορμής $L_z$, πάνω στην διεύθυνση του άξονα:

$$L_{z1}=L_z\cdot συνθ = I_{cm/z}\cdot ω\cdot συνθ$$

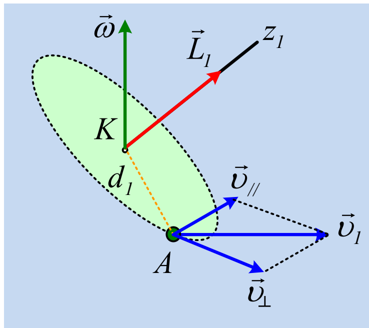
Βέβαια θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη στροφορμή κάθε σημειακής μάζας ανεξάρτητα, όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου η σημειακή μάζα $m_1$ απέχει κατά $d_1$ από τον άξονα $z_1$, ενώ η $m_2$ απέχει αντίστοιχα απόσταση $d_2$, τη στιγμή που οι άξονες z, $z_1$ και οι δυο μάζες βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, τότε: $L_1=m_1\cdot υ\cdot d_1 = m\cdot ω\,\ell\cdot\ell\, συνθ = m\,\ell^2\cdot ω\cdot συνθ = L_2$




Οι δυο αυτές στροφορμές έχουν την διεύθυνση του άξονα, συνεπώς:

$$L_{z1}=2\cdot m\,\ell^2\cdot ω\cdot συνθ = I_{cm/z}\cdot ω\cdot συνθ$$

Αλλά θα μπορούσαμε να αναλύσουμε κάθε ταχύτητα σε δυο συνιστώσες, μια συνιστώσα $υ_{//}$ παράλληλη στον άξονα $z_1$ και μια κάθετη $υ_\perp$ στην ΑΚ (πάνω σε κάθετο επίπεδο στον άξονα $z_1$ που περνά από το Κ), όπως στο διπλανό σχήμα, οπότε μπορούμε να γράψουμε:




$L_{1z1}=m_1\cdot υ_\perp\cdot d_1=m_1\cdot ω\cdot d_1\cdot d_1=m_1 d_1^2 ω$ οπότε:

$$L_{z1}=m_1 d_1^2 ω + m_2 d_2^2 ω = \left(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2\right)\cdot ω \text{ ή}$$

$$L_{z1}=I_{z1}\cdot ω$$

Όπου $I_{z1}$ η ροπή αδράνειας του στερεού για την περιστροφή του ως προς τον άξονα $z_1$.

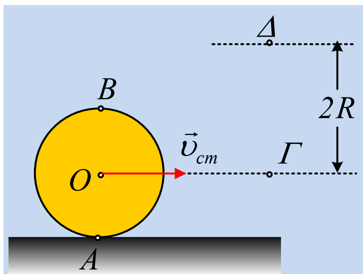
Όμως προσοχή!!!

Η στροφορμή και η γωνιακή ταχύτητα δεν έχουν την ίδια κατεύθυνση και η παραπάνω σχέση δεν μπορεί να γραφεί με διανυσματική μορφή!!!

### *4) Και κατά την σύνθετη επίπεδη κίνηση στερεού;*

Όταν μιλάμε για σύνθετη κίνηση απλά πρέπει να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα, τόσον όσον αφορά την περιστροφή όσο και την μεταφορά.

Έτσι στην περίπτωση που ένας κύλινδρος κυλίεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα, πόση είναι η στροφορμή του κυλίνδρου κατά τους άξονες, τους κάθετους στο επίπεδο του σχήματος που περνούν από τα σημεία Ο, Α, Β, Γ και Δ. Δίνεται $I_{cm}$= ½ $MR^2$.



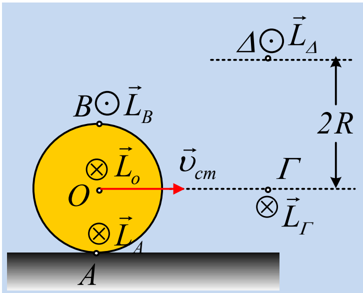
***Απάντηση:***

Θεωρούμε θετική την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα.

i) Ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο έχουμε:

$$L_O = I_{cm} \cdot \omega = ½\, MR^2 \cdot \omega$$

Με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα.




ii) Ως προς οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το Α:

$$L_A = M\upsilon_{cm} \cdot R + I_{cm} \cdot \omega = M\omega R \cdot R + ½\, MR^2 \cdot \omega = \frac{3}{2} MR^2 \cdot \omega$$

Της ίδια κατεύθυνσης με την στροφορμή στο Ο.

iii) Ως προς τον άξονα στο σημείο Β:

$$L_B = -M\upsilon_{cm} \cdot R + I_{cm} \cdot \omega = -\, M\omega R \cdot R + ½\, MR^2 \cdot \omega = -\frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega$$

Με φορά προς τα έξω.

iv) Ως προς οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το Γ:

$$L_A = M\upsilon_{cm} \cdot d + I_{cm} \cdot \omega = M\omega R \cdot 0 + ½\, MR^2 \cdot \omega = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega$$

Της ίδια κατεύθυνσης με την στροφορμή στο Ο (αλλά και ίδιου μέτρου)

v) Ως προς οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το Δ:

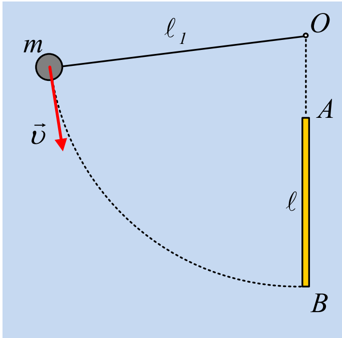
$$L_A = M\upsilon_{cm} \cdot d + I_{cm} \cdot \omega = -M\omega R \cdot 2R + ½\, MR^2 \cdot \omega = -\frac{3}{2} MR^2 \cdot \omega$$

Με φορά προς τα έξω.

## *5) Πώς θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρηση της στροφορμής σε μια κρούση;*

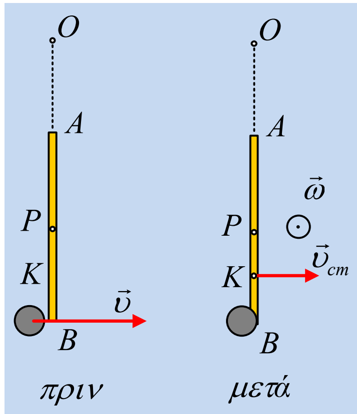
### *Α) Μια κρούση με ελεύθερο στερεό.*

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής δοκός μήκους $\ell = 4m$ και μάζας Μ=6kg. Μια σφαίρα που θεωρείται υλικό σημείο μάζας m=6kg είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους $\ell_1 = 6m$ και στρέφεται οριζόντια με ταχύτητα υ=2m/s, όπως στο σχήμα, όπου (ΟΑ)=2m η απόσταση του άκρου της δοκού Α από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς Ο.




Σε μια στιγμή η σφαίρα συγκρούεται με τη δοκό στο άκρο της Β, ενώ ταυτόχρονα το νήμα κόβεται. Αν η κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι πλαστική, να βρεθεί για το νέο στερεό Σ που προκύπτει η ταχύτητα του κέντρου μάζας του Κ και η γωνιακή του ταχύτητα. Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

***Απάντηση:***




Κατά τη διάρκεια της κρούσης η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων (βάρη και κάθετες αντιδράσεις) είναι μηδενική, συνεπώς ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$m\upsilon = (M+m)\cdot\upsilon_{cm} \rightarrow$$

$$\upsilon_{cm} = ½\ \upsilon = 1 m/s$$

όπου το κέντρο μάζας, λόγω ισότητας των δύο μαζών, είναι το σημείο Κ, στο μέσον της ΒΡ, όπου Ρ το μέσον της δοκού.

Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας, θα χρειαστούμε να εφαρμόσουμε και την αρχή διατήρησης της στροφορμής. Ως προς ποιο σημείο;

i) Ας εφαρμόσουμε την ΑΔΣ ως προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow$$

$$m\upsilon\ell_1 = I_K\omega + (M+m)\upsilon_{cm}\cdot(OK) \rightarrow$$

$$m\upsilon\ell_1 = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M(PK)^2 + m(KB)^2\right)\cdot\omega + (M+m)\upsilon_{cm}\cdot(OK)$$

$$\omega = \frac{6\cdot 2\cdot 6 - 12\cdot 1\cdot 5}{\frac{1}{12}6\cdot 4^2 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1} rad/s = 0{,}6 rad/s$$

ii) Ας εφαρμόσουμε την ΑΔΣ ως προς το κέντρο μάζας Κ του στερεού:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow$$

$$m\upsilon(KB) = I_K\omega \rightarrow$$

$$m\upsilon(BK) = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M(PK)^2 + m(KB)^2\right)\cdot\omega$$

$$\omega = \frac{6\cdot 2\cdot 1}{\frac{1}{12}6\cdot 4^2 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1}rad/s = 0{,}6rad/s$$

iii) Ας εφαρμόσουμε την ΑΔΣ ως προς το μέσον P της δοκού:

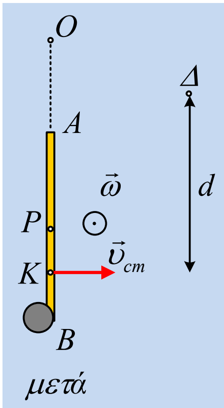
$$\vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετά} \rightarrow$$

$$m\upsilon(PB) = I_K\omega + (M+m)\upsilon_{cm}\cdot(PK) \rightarrow$$

$$m\upsilon(PB) = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M(PK)^2 + m(KB)^2\right)\cdot\omega + (M+m)\upsilon_{cm}\cdot(PK)$$

$$\omega = \frac{6\cdot 2\cdot 2 - 12\cdot 1\cdot 1}{\frac{1}{12}6\cdot 4^2 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1}rad/s = 0{,}6rad/s$$

Συμπέρασμα; Δεν έχει καμιά σημασία ως προς ποιο σημείο θα εφαρμόσουμε την ΑΔΣ, αρκεί να την εφαρμόσουμε σωστά. Θα μπορούσαμε να πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Δ του επιπέδου, το οποίο απέχει κατά d από τον φορέα της $\upsilon_{cm}$, όπως στο σχήμα.




Θα έχουμε:

$$\vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετά} \rightarrow$$

$$m\upsilon(d + (KB)) = I_K\omega + (M+m)\upsilon_{cm}\cdot d \rightarrow$$

$$m\upsilon(d + (KB)) = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M(PK)^2 + m(KB)^2\right)\cdot\omega + (M+m)\upsilon_{cm}\cdot d$$

$$\omega = \frac{6\cdot 2\cdot(d+1) - 12\cdot 1\cdot d}{\frac{1}{12}6\cdot 4^2 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1}rad/s = 0{,}6rad/s$$

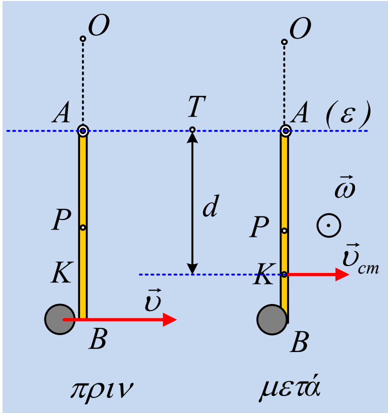
### ***Β) Μια κρούση με στερεό που μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα.***

Έχουμε το παραπάνω πρόβλημα κρούσης, αλλά τώρα η δοκός μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο Α της.

Να υπολογίστε τώρα την ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ και τη γωνιακή ταχύτητα του στερεού μετά την πλαστική κρούση.

***Απάντηση:***

Από τη στιγμή που η δοκός μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, στη διάρκεια της κρούσης δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την διατήρηση της ορμής, αφού το σύστημα δεν είναι μονωμένο, δεχόμενο δύναμη από τον άξονα. Οπότε θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής. Αλλά ως προς ποιο σημείο;




Ως προς το σημείο εκείνο που θα μηδενίζεται η ροπή της εξωτερικής δύναμης που θα δεχτεί η δοκός από τον άξονα, στη διάρκεια της κρούσης. Επειδή όμως η δοκός θα δεχτεί δύναμη στη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας και η δύναμη από τον άξονα θα έχει την ίδια διεύθυνση. Οπότε μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σημείο της ευθείας (ε).

i) Ας πάρουμε την ευκολότερη περίπτωση. Ας δουλέψουμε με το σημείο Α, αφού το στερεό μας θα περιστραφεί γύρω από τον άξονα στο Α:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \to$$

$$m\upsilon\ell = I_A\omega \to$$

$$m\upsilon\ell = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\ell^2\right)\cdot\omega$$

$$\omega = \frac{6\cdot 2\cdot 4}{\frac{1}{12}6\cdot 4^2 + 6\cdot 4 + 6\cdot 16} rad/s = 0{,}375 rad/s$$

Αλλά τότε:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_K = \omega\cdot\frac{3\ell}{4} = 1{,}125 m/s$$

ii) Ας δουλέψουμε με τις στροφορμές ως προς ένα τυχαίο σημείο Τ της ευθείας (ε):

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \to$$

$$m\upsilon\ell = I_{cm}\omega + (M+m)\upsilon_{cm}\cdot d \to$$

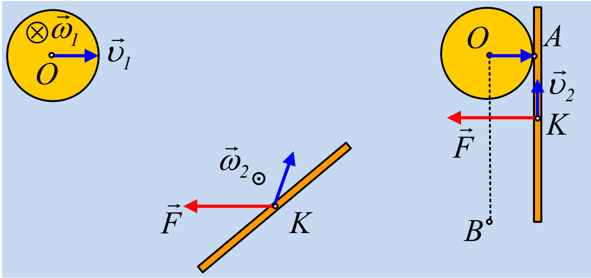
$$m\upsilon\ell = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M(PK)^2 + m(KB)^2\right)\cdot\omega + (M+m)\cdot\omega(AK)\cdot(AK)$$

$$\omega = \frac{6\cdot 2\cdot 4}{\frac{1}{12}6\cdot 4^2 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1 + 12\cdot 9} rad/s = 0{,}375 rad/s$$

Αλλά τότε:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_K = \omega\cdot\frac{3\ell}{4} = 1{,}125 m/s$$

### 6) Η στροφορμή σε ένα σύστημα σωμάτων.




Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται, αφενός ένας δίσκος μάζας M=10kg και ακτίνας R=0,4m ο οποίος έχει ταχύτητα $υ_1$=1m/s και γωνιακή ταχύτητα $ω_1$=1rad/s, κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, αφετέρου μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=2m μάζας m=3kg, η οποία δέχεται μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=10N στη διεύθυνση της ταχύτητας του δίσκου. Σε μια στιγμή τα σώματα συγκρούονται ελαστικά. Τη στιγμή της κρούσης (δεύτερο σχήμα) η ράβδος έχει ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{cm}=υ_2$=1m/s κάθετη στην ταχύτητα $υ_1$ και γωνιακή ταχύτητα $ω_2$=2rad/s, κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, ενώ και το σημείο σύγκρουσης Α απέχει 0,5m από το μέσον Κ της ράβδου.

Α) Ποια η συνολική στροφορμή του συστήματος ελάχιστα πριν την κρούση;

Β) Για τη στιγμή ελάχιστα πριν την κρούση και για το σύστημα των δύο σωμάτων να βρεθούν:

i) Η συνολική στροφορμή ως προς το κέντρο Ο του δίσκου.

ii) Η συνολική στροφορμή ως προς το μέσον Κ της ράβδου.

iii) Η συνολική στροφορμή ως προς το σημείο κρούσης Α.

iv) Η συνολική στροφορμή ως προς το σημείο Β το οποίο απέχει κατά 1,5m από το κέντρο του δίσκου και κατά 0,4m από τη ράβδο.

v) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς το σημείο Β.

Γ) Αν στη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων ενώ η ώθηση της δύναμης F θεωρηθεί αμελητέα, να υπολογιστούν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας και οι γωνιακές ταχύτητες των δύο στερεών, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας ως προς κατακόρυφους άξονας που περνάνε από το κέντρο μάζας κάθε στερεού $I_1$= ½ MR$^2$ και $I_2$= 1/12 Mℓ$^2$.

***Απάντηση:***

Α) Η ερώτηση αυτή **δεν επιδέχεται απάντηση**. Δεν υπάρχει στροφορμή έτσι γενικώς, αλλά στροφορμή ως προς ένα σημείο ή κατά (ως προς) έναν άξονα.

Β) Η συνολική στροφορμή υπολογιζόμενη για το σύστημα **ως προς το ίδιο σημείο**, θα προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των επιμέρους σωμάτων, ως προς το σημείο αυτό.

$$\vec{L}_{ολ} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

Έτσι θεωρώντας ως θετική την κατεύθυνση την κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τον αναγνώστη:

iii) Ως προς το κέντρο Ο του δίσκου θα έχουμε:

$$L_{ολ} = -I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + m_2\upsilon_2 d$$

$$L_{ολ/O} = -\frac{1}{2}MR^2\omega_1 + \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 + m\upsilon_2 R \rightarrow$$

$$L_{ολ/O} = \left(-\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 1 + \frac{1}{12}3\cdot 2^2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 0{,}4\right)kg\cdot m/s = 2{,}4kg\cdot m^2/s$$

iv) Ως προς το μέσον Κ της ράβδου:

$$L_{ολ/K} = -I_1\omega_1 + m_1\upsilon_1 d + I_2\omega_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/K} = -\frac{1}{2}MR^2\omega_1 - M\upsilon_1(AK) + \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/K} = \left(-\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 1 - 10\cdot 1\cdot 0{,}5 + \frac{1}{12}3\cdot 2^2\cdot 2\right)kg\cdot m/s = -3{,}8kg\cdot m^2/s\,.$$

v) Ως προς το σημείο κρούσης Α:

$$L_{ολ/A} = -I_1\omega_1 + I_2\omega_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/A} = -\frac{1}{2}MR^2\omega_1 + \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/A} = \left(-\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 1 + \frac{1}{12}3\cdot 2^2\cdot 2\right)kg\cdot m/s = 1{,}2kg\cdot m^2/s\,.$$

vi) Ως προς το σημείο Β:

$$L_{ολ/B} = -I_1\omega_1 + m_1\upsilon_1 d_1 + I_2\omega_2 + m\upsilon_2 d_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/K} = -\frac{1}{2}MR^2\omega_1 - M\upsilon_1(OB) + \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 + m\upsilon_2 R \rightarrow$$

$$L_{ολ/K} = \left(-\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 1 - 10\cdot 1\cdot 1{,}5 + \frac{1}{12}3\cdot 2^2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 0{,}4\right)kg\cdot m/s = -12{,}6kg\cdot m^2/s\,.$$

vii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, ως προς ένα σημείο, είναι ίσος με την αντίστοιχη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το ίδιο σημείο. Αλλά για κάθε σώμα στην κατακόρυφη διεύθυνση η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων w και Ν (και ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο) είναι μηδενική, οπότε:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = Fd = F(OB - AK) = 10\cdot 1kgm^2/s^2 = 10kgm^2/s^2$$

Ας δούμε τι ακριβώς υπολογίζουμε.

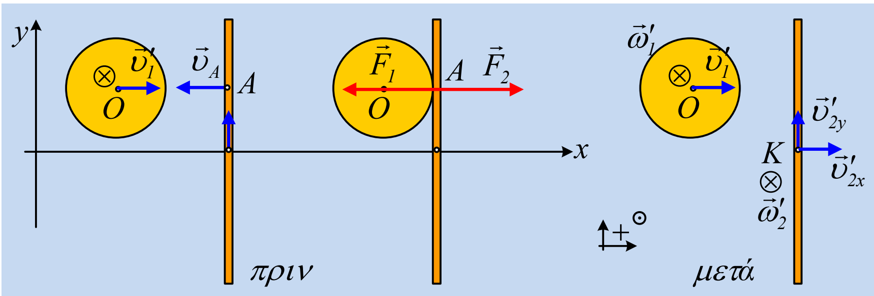
Στον δίσκο δεν ασκείται καμιά δύναμη, οπότε δεν μεταβάλλεται ούτε η ταχύτητα του κέντρου μάζα του, ούτε η γωνιακή του ταχύτητα. Αλλά ούτε στην ράβδο ασκείται ροπή ως προς το κέντρο μάζας της, συνεπώς η γωνιακή της ταχύτητα παραμένει σταθερή. Όμως η ασκούμενη δύναμη στο μέσον της προκαλεί επιτάχυνση στην κατεύθυνση της δύναμης σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα.

Η κίνηση του κέντρου μάζας, μπορεί να μελετηθεί σε δυο άξονες. Έναν στη διεύθυνση της δύναμης, ας τον πούμε άξονα x και ένα σε κάθετη διεύθυνση, έστω άξονας y. Αλλά τότε η κίνηση στον άξονα y είναι ευθύγραμμη ομαλή και η στροφορμή ως προς το σημείο Β, η οποία οφείλεται στην ταχύτητα $\upsilon_y$ θα παραμένει σταθερή. Αλλά η στροφορμή ως προς Β η οποία οφείλεται στην κίνηση κατά τον άξονα x είναι:

$$L_{B/x}=m\upsilon_x\cdot d=m\upsilon_x\cdot\frac{\ell}{2}\rightarrow$$

$$\frac{dL_x}{dt}=m\frac{d\upsilon_x}{dt}\frac{\ell}{2}=ma_x\frac{\ell}{2}=F\cdot\frac{\ell}{2}=10kgm^2/s^2.$$

Γ) Στο παρακάτω σχήμα, αριστερά έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες στην διεύθυνση x, όπου το σημείο Α της ράβδου έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon_A=\omega_2\cdot(AK)=1m/s$, ενώ δεξιά οι δυνάμεις που ασκηθούν στα σώματα στη διάρκεια της κρούσεις (κρουστικές δυνάμεις) που αναπτύσσονται εξαιτίας της κρούσης και οι οποίες θα μεταβάλλουν την κίνησή τους στην διεύθυνση x, ενώ η ροπή της $\mathbf{F_2}$ ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου, θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της γωνιακής της ταχύτητας.




viii) Από τη στιγμή που η ώθηση της δύναμης F, στη διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα, η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, οπότε παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\Rightarrow\begin{cases}P_{x/\pi\rho\iota\nu}=P_{x/\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\rightarrow M\upsilon_1+0=M\upsilon'_{1x}+m\upsilon'_{2x}\\ P_{y/\pi\rho\iota\nu}=P_{y/\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\rightarrow 0+m\upsilon_2=M\upsilon'_{1y}+m\upsilon'_{2y}\quad(2)\end{cases}$$

Αλλά με βάση τις δυνάμεις που αναφέραμε προηγούμενα, αλλαγή θα έχουμε στις ταχύτητες στη διεύθυνση των δυνάμεων (διεύθυνση x), συνεπώς $\upsilon_{1y}'=0$ και $\upsilon_{2y}'=\upsilon_2$.

ix) Εφαρμόζουμε τώρα την διατήρηση της στροφορμής ως προς κάποιο σημείο. Το παραπάνω ερώτημα νομίζω μας απέδειξε ότι μπορούμε να το κάνουμε, ως προς οποιοδήποτε σημείο θέλουμε. Ας επιλέξουμε το σημείο σύγκρουσης Α, για να έχουμε πιο λιτές εξισώσεις λοιπόν.

$$\vec{L}_{A/\pi\rho\iota\nu}=\vec{L}_{A/\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}MR^2\omega_1+\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2=-\frac{1}{2}MR^2\omega'_1-\frac{1}{12}m\ell^2\omega'_2+m\upsilon'_{2x}(AK)$$

Όπου όμως ο δίσκος, δεν δέχτηκε κάποια ροπή στη διάρκεια της κρούσης, οπότε δεν άλλαξε και η γωνιακή του ταχύτητα, ενώ $\upsilon_{2x}'$ είναι η συνιστώσα ταχύτητας του κέντρου μάζας της ράβδου στην διεύθυνση x, μετά την κρούση. Έτσι η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 = -\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2' + m\upsilon_{2x}'(AK) \quad (3)$$

x) Αλλά αφού η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση θα είναι ίδια:

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2\right) = \left(\frac{1}{2}M\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1'^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2'^2\right)$$

Λαμβάνοντας δε υπόψη μας ότι $\upsilon_{1y}'=0$, $\upsilon_{2y}'=\upsilon_2$ και $\omega_1'=\omega_1$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2^2\right) = \frac{1}{2}M\upsilon_{1x}'^2 + \left(\frac{1}{2}m\left(\upsilon_{2x}'^2 + \upsilon_{2y}'^2\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2'^2\right) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{1x}'^2 + \left(\frac{1}{2}m\upsilon_{2x}'^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2'^2\right) \quad (4)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) και (4) και με την προϋπόθεση ότι δεν κάναμε λάθος!!! στις πράξεις, βρίσκουμε τα μέτρα των μεγεθών (οι κατευθύνσεις είναι σημειωμένες στο προηγούμενο σχήμα):

$$\upsilon_1' \approx 0{,}3m/s,\ \omega_1' = 1rad/s$$

$$\upsilon_{2x}' \approx 2{,}3m/s,\ \upsilon_{2y}' = 1m/s,\ \upsilon_2' \approx 2{,}5m/s,\ \omega_2' \approx 1{,}4rad/s.$$

**dmargaris@sch.gr**