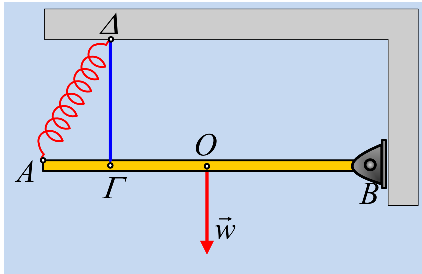
Μια ράβδος στρέφεται επιμηκύνοντας το ελατήριο.



Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους $\ell = 1$m και μάζας Μ= 15kg, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από άρθρωση στο άκρο της Β και ισορροπεί σε οριζόντια θέση δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος σε σημείο της Γ, όπου (ΑΓ)=0,2m. Παίρνουμε ένα ιδανικό ελατήριο με σταθερά k=225N/m και φυσικό μήκος ℓ_o=(4/15)m και τεντώνοντάς το, συνδέουμε τα άκρα του στο άκρο Α της ράβδου και στο σημείο πρόσδεσης του νήματος Δ, οπότε ο άξονας του ελατηρίου σχηματίζει με τη ράβδο γωνία φ, όπου ημφ=0,8 (συνφ=0,6).

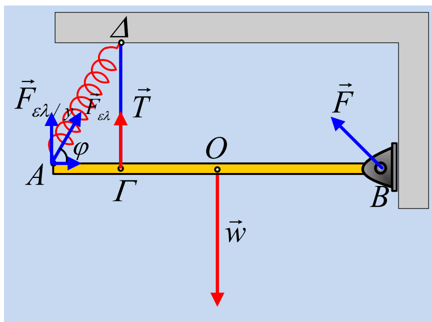
i) Να βρεθεί η τάση του νήματος.

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Να υπολογισθεί η αρχική επιτάχυνση του άκρου Α της ράβδου.

iii) Να βρεθεί ως προς το άκρο Β της ράβδου, η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, τη στιγμή που το ελατήριο θα γίνει κατακόρυφο, αν δεν αναπτύσσονται τριβές στην άρθρωση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς την άρθρωση I_B= 1/3 $M\ell^2$ και g=10m/s^2.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπου για το μήκος του ελατηρίου έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{(A\Gamma)}{(A\Delta)} \rightarrow (A\Delta) = \ell' = \frac{(A\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{0{,}2m}{0{,}6} = \frac{1}{3}m$$

Οπότε η δύναμη του ελατηρίου έχει μέτρο:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k\cdot\Delta\ell = k\cdot(\ell' - \ell_o) = 225\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{15}\right) = 15N$$

i) Από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου έχουμε ΣF=0 και Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε το σημείο Β και έχουμε:

$$w\cdot\frac{\ell}{2} - T\cdot(B\Gamma) - F_{\varepsilon\lambda}\eta\mu\varphi\cdot\ell = 0 \quad \text{ή } 150\cdot 0{,}5\, Nm - T\cdot 0{,}8m - 15\cdot 0{,}8\cdot 1Nm = 0 \rightarrow$$

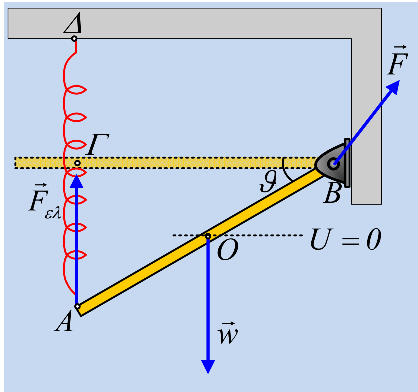
$$T = 78{,}75N$$

ii) Εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της ράβδου γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο Β (άρθρωση), θεωρώντας θετική φορά, την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και παίρνουμε:

$$w\cdot\frac{\ell}{2} - F_{\varepsilon\lambda}\eta\mu\varphi\cdot\ell = I_B a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{Mg\cdot\frac{\ell}{2} - F_{\varepsilon\lambda}\eta\mu\varphi\cdot\ell}{\frac{1}{3}M\ell^2} = \frac{3Mg - 6F_{\varepsilon\lambda}\eta\mu\varphi}{2M\ell} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{3Mg-6F_{\varepsilon\lambda}\eta\mu\varphi}{2M\ell}=\frac{3\cdot 15\cdot 10-6\cdot 15\cdot 0{,}8}{2\cdot 15\cdot 1}rad/s^2=12{,}6rad/s^2$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη ράβδο στη θέση που το ελατήριο είναι κατακόρυφο. Στη θέση αυτή έχουμε:



$$\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{(B\Gamma)}{(AB)}=0{,}8\rightarrow\ \eta\mu\vartheta=0{,}6$$

Αλλά τότε $(A\Gamma)=\ell\cdot\eta\mu\vartheta=0{,}6m$

Αν επιστρέψουμε όμως στο αρχικό μας σχήμα:

$$(\Gamma\Delta)=(A\Delta)\cdot\eta\mu\varphi=\ell'\cdot\eta\mu\varphi=\frac{1}{3}0{,}8m=\frac{4}{15}m=\ell_o.$$

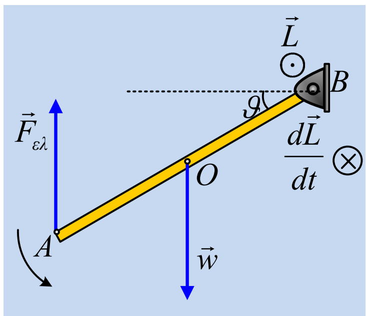
Συνεπώς τη στιγμή που το ελατήριο γίνεται κατακόρυφο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell'=(\Gamma A)=0{,}6m$, οπότε εφαρμόζοντας για το σύστημα ελατήριο-ράβδος-Γη τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το μέσον Ο, όπως στο σχήμα, έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\beta/\alpha\rho\chi}+U_{\varepsilon\lambda/\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\beta/\tau\varepsilon\lambda}+U_{\varepsilon\lambda/\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\theta+\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2=\frac{1}{2}I_B\omega^2+\frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{Mg\ell\,\eta\mu\theta+k\left((\Delta\ell)^2-(\Delta\ell')^2\right)}{\frac{1}{3}M\ell^2}}=\sqrt{\frac{15\cdot 10\cdot 1\cdot 0{,}6+225\left(\left(\frac{1}{15}\right)^2-0{,}6^2\right)}{\frac{1}{3}15\cdot 1^2}}=\sqrt{2}rad/s$$

Αλλά τότε η στροφορμή της ράβδου κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής της είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη και μέτρο:



$$L=I_B\omega=\frac{1}{3}M\ell^2\omega=\frac{1}{3}15\cdot 1^2\cdot\sqrt{2}kgm^2/s=5\sqrt{2}kgm^2/s$$

Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον ίδιο άξονα, είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=F_{\varepsilon\lambda}\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta-Mg\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta\rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt}=k\Delta\ell\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta-Mg\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=\left(225\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8-15\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}8\right)kgm^2/s^2=48kgm^2/s^2$$

dmargaris@sch.gr