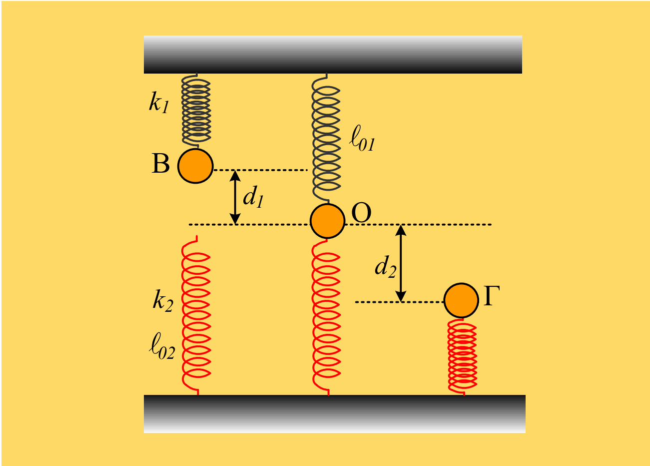
Μηχανική ενέργεια και ενέργεια ταλάντωσης



Ένα σώμα μάζας 2kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_1=100N/m, το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί στο ταβάνι και συγκρατείται στη θέση Β, έχοντας συσπειρώσει το ελατήριο κατά d_1=0,2m. Στην ίδια κατακόρυφο βρίσκεται ένα δεύτερο κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο, σταθεράς k_2, το οποίο στηρίζεται στο έδαφος και το οποίο έχει το φυσικό μήκος του ℓ_o=1m. Κάποια στιγμή αφήνουμε το σώμα να κινηθεί και τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το δεύτερο ελατήριο, αποδεσμεύεται από το πρώτο ελατήριο, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του και συνεχίζει την κίνησή του, οπότε μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά του στη θέση Γ, όπου έχει συσπειρώσει το ελατήριο κατά d_2=0,5m.

i) Να υπολογισθεί η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή που αποδεσμεύεται από το πάνω ελατήριο.

ii) Να βρεθεί η σταθερά k_2 του δεύτερου ελατηρίου καθώς και η μέγιστη δυναμική του ενέργεια.

iii) Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια του συστήματος (σώμα και δύο ελατήρια) στις θέσεις Β, Ο και Γ.

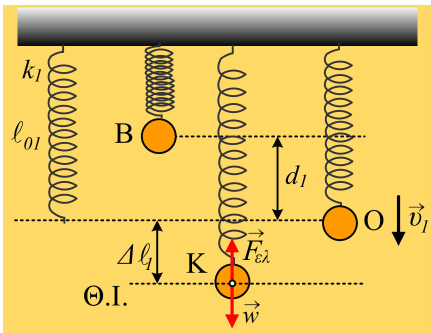
iv) Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης:

α) Για την ταλάντωση από το Β στο Ο.

β) Για την ταλάντωση από το Ο στο Γ.

Θεωρείστε ως δεδομένο ότι η κίνηση του σώματος στο άκρο ενός ελατηρίου είναι ΑΑΤ, ενώ το δάπεδο λαμβάνεται ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας και g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Για όσο χρόνο το σώμα είναι δεμένο στο κάτω άκρο του ελατηρίου σταθεράς k_1, εκτελεί ΑΑΤ γύρω από τη θέση ισορροπίας του Κ. Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας το δάπεδο (δεδομένο), παίρνουμε με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώμα- ελατήριο:

$$K_B+U_{ελ,B}+U_{βαρ,B}= K_o+U_{ελ,o}+U_{βαρ,o}\rightarrow$$

$$0+\frac{1}{2}k_1d_1^2+mg(\ell_{o2}+d_1)=K_o+0+mg\ell_{o2}\rightarrow$$

$$K_o=\frac{1}{2}k_1d_1^2+mgd_1=\frac{1}{2}100\cdot 0{,}2^2J+2\cdot 10\cdot 0{,}2J=6J$$

ii) Εφαρμόζουμε ξανά την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώμα-κάτω ελατήριο, μεταξύ των θέσεων Ο και Γ:

$$K_o+U_{\varepsilon\lambda,o}+U_{\beta\alpha\rho,o}= K_\Gamma+U_{\varepsilon\lambda,\Gamma}+U_{\beta\alpha\rho,\Gamma} \rightarrow$$

$$K_o+0+mg\ell_{o2}=0+\frac{1}{2}k_2d_2^2+mg(\ell_{o2}-d_2)\rightarrow$$

$$K_o+mgd_2=\frac{1}{2}k_2d_2^2\rightarrow$$

$$k_2=\frac{2(K_o+mgd_2)}{d_2^2}=\frac{2(6+2\cdot 10\cdot 0{,}5)}{0{,}5^2}N/m=128N/m$$

Αλλά τότε η μέγιστη δυναμική ενέργεια που θα αποκτήσει το ελατήριο, είναι όταν το σώμα φτάσει στη θέση Γ, οπότε τότε θα έχει τη μέγιστη συσπείρωσή του $\Delta l_{max}=d_2$:

$$U_{2,max}=\frac{1}{2}k_2d_2^2=\frac{1}{2}128\cdot 0{,}5^2J=16J$$

iii) Πάντα με βάση την υπόθεση ότι αν βρεθεί το σώμα στο δάπεδο, θα έχει μηδενική δυναμική ενέργεια, έχουμε για τη μηχανική ενέργεια, στις τρεις παραπάνω θέσεις:

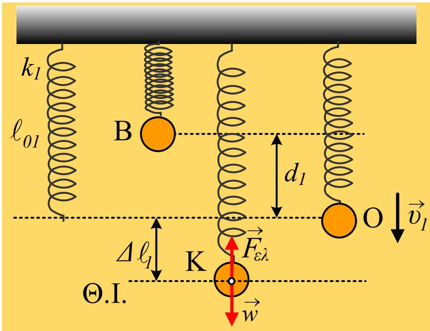
Θέση Β: $E_B=K_B+\frac{1}{2}k_1d_1^2+mg(\ell_{o2}+d_1)=0+\frac{1}{2}100\cdot 0{,}2^2J+2\cdot 10\cdot 1{,}2J=26J$

Θέση Ο: $E_O=K_O+\frac{1}{2}k_1d'^2_1+mg\ell_{o2}=6J+0J+2\cdot 10\cdot 1J=26J$

Θέση Γ: $E_\Gamma=K_\Gamma+\frac{1}{2}k_2d_2^2+mg(\ell_{o2}-d_2)=0+16J+2\cdot 10\cdot 0{,}5J=26J$

iv) Οι δύο ταλαντώσεις που πραγματοποιεί, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και πραγματοποιούνται γύρω από διαφορετικές θέσεις ισορροπίας και με διαφορετικές σταθερές επαναφοράς D.

α) Για την πρώτη ταλάντωση του σώματος, στο κάτω άκρο του πρώτου ελατηρίου, έχουμε για τη θέση ισορροπίας Κ:



$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=w \rightarrow k_1\cdot\Delta\ell_1=mg \rightarrow$$

$$\Delta\ell_1=\frac{mg}{k_1}=\frac{2\cdot 10}{100}m=0{,}2m$$

Όμως η θέση Β είναι ακραία θέση, συνεπώς:

$$A_1=\Delta\ell_1+d_1=0{,}2m+0{,}2m=0{,}4m$$

με αποτέλεσμα η ενέργεια ταλάντωσης να είναι ίση:

$$E_{\tau,1}=\frac{1}{2}D_1A_1^2=\frac{1}{2}k_1A_1^2=\frac{1}{2}100\cdot 0{,}4^2J=8J$$

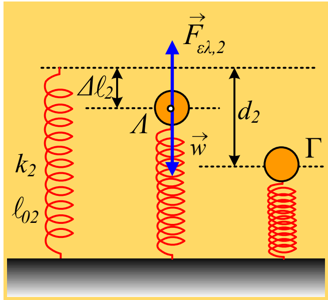
Σημείωση: Θα μπορούσε κάποιος άλλος να την υπολογίσει ως άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας στη θέση Ο:

$$E_{\tau,1}=\frac{1}{2}D_1y_1^2+K_O=\frac{1}{2}k_1\Delta\ell_1^2+K_O=\frac{1}{2}100\cdot 0{,}2^2J+6J=8J$$

β) Βρίσκουμε την θέση ισορροπίας Λ, για την νέα ταλάντωση του σώματος, στην οποία έχει συμπιέσει κατά $\Delta\ell_2$ το δεύτερο ελατήριο:

$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda,2}=w \rightarrow k_2 \cdot \Delta\ell_2=mg \rightarrow$

$$\Delta\ell_2 = \frac{mg}{k_2} = \frac{2\cdot 10}{128}m = {}^5\!/_{32}\, m$$



Εδώ η θέση Γ είναι ακραία θέση, συνεπώς:

$$A_2=d_2- \Delta\ell_2=0,5m-5/32m= 11/32\ m$$

με αποτέλεσμα η ενέργεια ταλάντωσης να είναι ίση:

$$E_{\tau,2} = \frac{1}{2}D_2A_2^2 = \frac{1}{2}k_2A_2^2 = \frac{1}{2}128\cdot\left(\frac{11}{32}\right)^2 J = \frac{121}{16}J \approx 7{,}6J$$

Θα μπορούσε και εδώ επίσης να υπολογιστεί η παραπάνω ενέργεια ως άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας στη θέση Ο:

$$E_{\tau,2} = \frac{1}{2}D_2y_2^2 + K_O = \frac{1}{2}k_2\Delta\ell_2^2 + K_O = \frac{1}{2}128\cdot\left(\frac{5}{32}\right)^2 J + 6J \approx 7{,}6J$$

Σχόλια:

1. Νομίζω ότι και μέσω των παραπάνω υπολογισμών να γίνεται σαφές, ότι δεν πρέπει να συγχέουμε τη μηχανική ενέργεια (όπου σε όλη την εξέλιξη του παραπάνω κίνησης, παραμένει σταθερή) με την ενέργεια ταλάντωση. Στην περίπτωσή μας βέβαια δεν πρέπει να αρχίσει κάποιος να σκέφτεται γιατί η ενέργεια της δεύτερης ταλάντωσης είναι μικρότερη από την αντίστοιχη της πρώτης. Δεν υπάρχει καμιά αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλαντώσεων…
2. Στα δύο πρώτα ερωτήματα χρησιμοποιήσαμε την ΑΔΜΕ, παίρνοντας ως δεδομένο ότι η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται στο έδαφος, όπως ήταν το δεδομένο μας. Αλλά αυτό δεν ήταν «υποχρεωτικό». Υποχρεωτικό είναι στο iii) ερώτημα όταν μας ζητήθηκε η τιμή της μηχανικής ενέργειας. Στα πρώτα ερωτήματα, είχαμε δικαίωμα να ορίσουμε εμείς αυθαίρετα το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

dmargaris@gmail.com