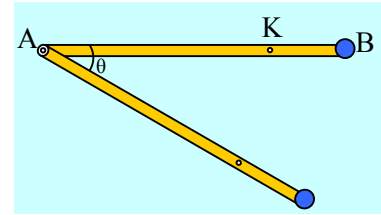


Και αν σπάσει ο άξονας;

Μια μη ομογενής ράβδος μήκους $\ell=4\text{m}$ και μάζας 6kg , μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α. Στο άλλο άκρο της έχει δεθεί ένα σώμα Σ, που θεωρείται υλικό σημείο μάζας $m=4\text{kg}$. Έτσι έχουμε δημιουργήσει ένα στερεό S, με κέντρο μάζας K, όπου $(KB)=1\text{m}$. Φέρνουμε το στερεό σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα και σε μια στιγμή το αφήνουμε να κινηθεί, οπότε η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ είναι $a_0=12\text{m/s}^2$. Το στερεό δεν παρουσιάζει τριβές με τον άξονα, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.



i) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τον άξονα περιστροφής του. Μετά από λίγο, η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση. Για την θέση αυτή, να βρεθούν:

- ii) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού S
- iii) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού S, ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- iv) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, ως προς τον άξονα περιστροφής.
- v) Στην παραπάνω θέση, σπάει ο άξονας περιστροφής, οπότε το στερεό πέφτει ελεύθερα και κτυπάει στο έδαφος με το άκρο του B και με τη ράβδο κατακόρυφη, χωρίς να έχει ολοκληρώσει μια περιστροφή. Πόσο χρόνο διαρκεί η ελεύθερη πτώση του στερεού;

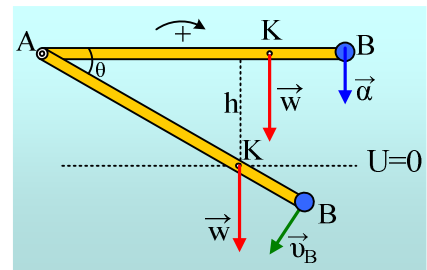
Απάντηση:

i) Για την αρχική θέση του στερεού, αμέσως μόλις αφηθεί να κινηθεί, ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Mg \cdot (AK) = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$Mg \cdot (AK) = I \cdot \frac{a_B}{(AB)} \rightarrow$$

$$I = \frac{Mg \cdot (AK) \cdot (AB)}{a_B} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4}{12} \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 100 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$



ii) Η μόνη δύναμη που παράγει έργο κατά την περιστροφή του στερεού είναι το βάρος, συνεπώς η μηχανική ενέργεια διατηρείται:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2Mg(AK) \cdot \eta \mu \theta}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 0,5}{100}} \text{r/s} = \sqrt{3} \text{rad/s}$$

Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού S είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega = Mg \cdot (AK) \sin \theta \cdot \omega = 10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 450 \text{J/s}$$

iii) Η στροφορμή του στερεού έχει τη διεύθυνση του άξονα (οριζόντια) με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$L = I \cdot \omega = 100\sqrt{3} \text{kgm}^2 / \text{s}$$

Την ίδια κατεύθυνση έχει και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της με μέτρο

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = Mg(AK)\sigma \nu \theta = 100 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = 150\sqrt{3} \text{kgm}^2 / \text{s}^2$$

iv) Αλλά την ίδια κατεύθυνση έχουν και τα αντίστοιχα διανύσματα για την στροφορμή και το ρυθμό μεταβολής της του σώματος Σ , με μέτρα:

$$L_{\Sigma} = m v \ell = m \omega \ell^2 = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 4^2 = 64\sqrt{3} \text{kgm}^2 / \text{s}$$

$$\text{Αλλά } \vec{L}_s = \vec{L}_{\rho} + \vec{L}_{\Sigma} \rightarrow$$

$$L_{\rho} = L_s - L_{\Sigma} = (100\sqrt{3} - 64\sqrt{3}) \text{kgm}^2 / \text{s} = 36\sqrt{3} \text{kgm}^2 / \text{s}$$

Εξάλλου από 2^ο νόμο Νεύτωνα για το στερεό έχουμε:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu 1} \rightarrow \alpha_{\gamma \omega \nu 1} = \frac{Mg(AK)\sigma \nu \theta}{I} = \frac{100 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{100} \text{rad} / \text{s}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{rad} / \text{s}^2, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{dL_{\Sigma}}{dt} = \frac{d(m v \ell)}{dt} = m a_{B/\varepsilon \pi} \ell = m a_{\gamma \omega \nu} \ell^2 = 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4^2 = 96\sqrt{3} \text{kgm}^2 / \text{s}^2$$

Οπότε με την ίδια λογική όπως και προηγούμενα για την στροφορμή έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{\Sigma}}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{dL_{\rho}}{dt} = \frac{dL_s}{dt} - \frac{dL_{\Sigma}}{dt} = (150\sqrt{3} - 96\sqrt{3}) \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = 54\sqrt{3} \text{kgm}^2 / \text{s}^2$$

v) Τη στιγμή που το στερεό κτυπά στο έδαφος με το άκρο B, έχει στραφεί κατά 90° σε σχέση με την ορι-

ζόντια θέση ή κατά γωνία $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ σε σχέση με τη θέση που έσπασε ο άξονας. Αλλά από τη

στιγμή που σπάει ο άξονας η μόνη δύναμη που ασκείται στο στερεό είναι το βάρος, το οποίο δεν παρουσιάζει ροπή ως προς το κέντρο μάζας K, συνεπώς δεν μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του. Οπότε:

$$\phi = \omega t \rightarrow t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{s} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \text{s}$$

