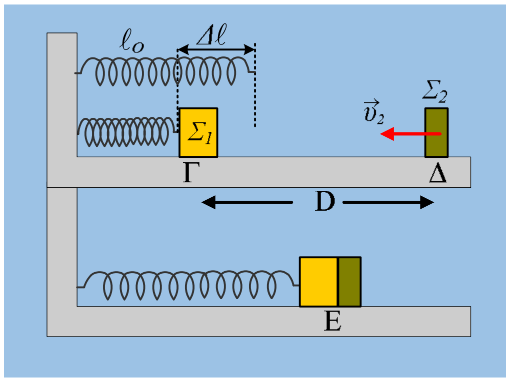
Η μέγιστη ενέργεια ταλάντωσης



Ένα σώμα Σ_1 μάζας m_1=2kg είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200N/m και ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας m_2=0,5kg κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_2=8m/s κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, πλησιάζοντας το σώμα Σ_1. Μετακινούμε το Σ_1 συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $\Delta\ell$=0,5m, φέρνοντάς το στη θέση Γ. Σε μια στιγμή t_0=0, όπου τα δυο σώματα απέχουν κατά (ΓΔ)=D, αφήνουμε ελεύθερο το Σ_1 να εκτελέσει ΑΑΤ, με αποτέλεσμα τα σώματα να συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά τη χρονική στιγμή t_1=0,314s.

i) Να υπολογιστεί η απόσταση D.

ii) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση, καθώς και η ταχύτητα με την οποία φτάνει στην αρχική του θέση Γ.

iii) Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, αλλά τώρα αφήνουμε το Σ_1 να κινηθεί όταν έχουμε διαφορετική απόσταση μεταξύ των σωμάτων, με αποτέλεσμα το Σ_1 να αποκτήσει τη μέγιστη δυνατή ενέργεια ταλάντωσης, μετά την κρούση.

α) Να βρεθεί η μέγιστη αυτή ενέργεια ταλάντωσης του Σ_1.

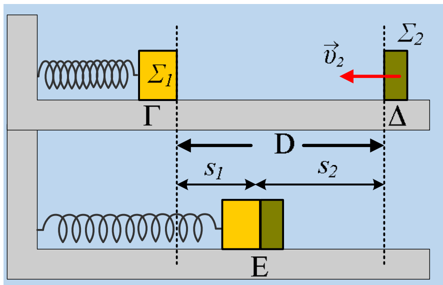
β) Να βρεθεί η θέση της κρούσης, καθώς και η ταχύτητα του Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση.

Απάντηση:

Το σώμα Σ_1 εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από τη θέση ισορροπίας του, η οποία ταυτίζεται με τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου, ενώ θωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία αρνητική θέση του x=-A=-0,5m.

i) Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος Σ_1 είναι ίση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{200}}s = 0{,}2\pi \ \ (s)$$



Αλλά τότε η χρονική στιγμή t_1=0,314s αντιστοιχεί σε μισή περίοδο, πράγμα που σημαίνει ότι η κρούση έγινε στη δεξιά θέση πλάτους, έχοντας μηδενική ταχύτητα, έχοντας διανύσει απόσταση s_1=2 A =1m.

Στον ίδιο χρόνο, το σώμα Σ_2, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα, διανύσει απόσταση $s_2=|\upsilon_2|\cdot t_1$ =8·0,314m≈2,5m. Έτσι με βάση και το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$D=s_1+s_2=1m+2{,}5m=3{,}5m$$

ii) Για την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ αμέσως μετά την κεντρική ελαστική του κρούση με το σώμα $Σ_2$, λαμβάνοντας υπόψη τη μηδενική του ταχύτητα πριν την κρούση, έχουμε:

$$υ'_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}υ_2 = \frac{2\cdot 0{,}5}{2+0{,}5}(-8)m/s = -3{,}2m/s$$

Άρα η νέα ενέργεια ταλάντωσής του είναι ίση:

$$E_{τ2} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1υ'^2_1 = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m_1υ'^2_1 \rightarrow$$

$$E_{τ2} = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}5^2 J + \frac{1}{2}2\cdot 3{,}2^2 J \approx 35{,}2J$$

Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, οπότε μεταξύ των θέσεων Ε (μετά την κρούση) και Γ, θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m_1υ'^2_1 = \frac{1}{2}kx^2_Γ + \frac{1}{2}m_1υ^2_Γ \rightarrow$$

$$υ_Γ = υ'_1 = -3{,}2m/s$$

Δηλαδή το σώμα φτάνει στη θέση Γ από όπου ξεκίνησε την ταλάντωσή του με την ταχύτητα που απέκτησε το σώμα, αμέσως μετά την κρούση.

iii) Για την δεύτερη ελαστική κρούση, έχουμε για τις κινητικές ενέργειες των δύο σωμάτων:

$$K_{πριν} = K_{μετά} \rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

Όπου u_1 και u_2 οι ταχύτητες μετά την κρούση.

α) Αλλά τότε η τελική κινητική ενέργεια του $Σ_1$ $K_{1τ} = \frac{1}{2}m_1u_1^2$ θα γίνει μέγιστη, αν όλη η ενέργεια του $Σ_2$ μεταφερθεί στο $Σ_1$ με αποτέλεσμα να ακινητοποιηθεί το σώμα $Σ_2$. Αλλά τότε:

$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2$$

Η ενέργεια ταλάντωσης τώρα του σώματος $Σ_1$ αμέσως μετά την δεύτερη κρούση του είναι ίση:

$$E_{τ3} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ_2^2 \rightarrow$$

$$E_{τ3} = E_{τ1} + \frac{1}{2}m_1υ_2^2$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι και η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση παίρνει τη μέγιστη τιμή της, αυξημένη κατά $\frac{1}{2}m_1υ_2^2$ σε σχέση με την αρχική τιμή της, στην περίπτωση της ακινητοποίησης του σώματος $Σ_2$.

$$E_{τ3,max} = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}5^2 J + \frac{1}{2}0{,}5\cdot 8^2 J = 41J$$

β) Για την δεύτερη κεντρική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύουν οι εξισώσεις:

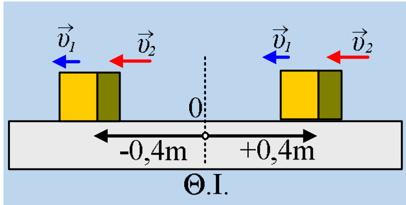
$$u_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}υ_2 \ (1)$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 \quad (2)$$

Θέτοντας στην (2) $u_2=0$ και λύνοντας ως προς υ_1 παίρνουμε:

$$\upsilon_1 = -\frac{m_2-m_1}{2m_1}\upsilon_2 = -\frac{0{,}5-2}{2\cdot 2}(-8)\,m/s = -3m/s$$

Τώρα από την διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε για την θέση x_1 του σώματος $Σ_1$, πριν την κρούση:



$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow$$

$$x_1 = \pm\sqrt{A^2 - \frac{m_1}{k}\upsilon_1^2} = \pm\sqrt{0{,}5^2 - \frac{2}{200}3^2}m = \pm 0{,}4m$$

Στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι δύο δυνατές θέσεις, μια δεξιά και μια αριστερά της θέσης ισορροπίας, ενώ το σώμα $Σ_1$ κινείται προς τα αριστερά τη στιγμή της κρούσης.

dmargaris@gmail.com