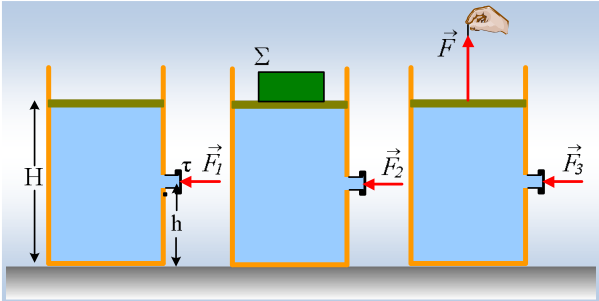
Η δύναμη στην τάπα

Ένα δοχείο, κλείνεται με αβαρές έμβολο, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, εμβαδού S=0,2m² και περιέχει νερό σε ύψος H=1m. Στο μέσον της στήλης του νερού, σε ύψος h= ½ Η, υπάρχει ένας μικρός οριζόντιος σωλήνας διατομής Α=1cm², ο οποίος κλείνεται με μια τάπα.



Για να μην φεύγει η τάπα, απαιτείται να της ασκήσουμε οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$, όπως στο σχήμα.

i) Να υπολογιστεί το μέτρο της απαραίτητης δύναμης $\vec{F}_1$ για την ισορροπία του εμβόλου.

ii) Τοποθετούμε πάνω στο έμβολο ένα βαρύ σώμα Σ, με αποτέλεσμα να απαιτείται να αυξήσουμε την ασκούμενη δύναμη στο έμβολο στην τιμή F_2=0,6Ν. Να υπολογιστεί το βάρος του σώματος Σ.

iii) Αφαιρούμε το σώμα Σ και με τη βοήθεια ενός νήματος που έχουμε δέσει στο έμβολο, του ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$, όπως στο τρίτο σχήμα, μέτρου F=200Ν.

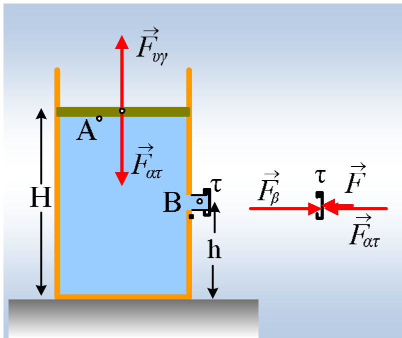
α) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F_3 που πρέπει να ασκούμε στην τάπα για την ισορροπία της.

β) Πόση δύναμη ασκεί το νερό στον πυθμένα του δοχείου και πόση στο έμβολο;

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}=10^5$Pa, η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m³ και g=10m/s². Σημειώνεται ακόμη ότι, λέγοντας αβαρές έμβολο, εννοούμε ένα έμβολο το οποίο έχει βάρος, απλά το θεωρούμε αμελητέο.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο, όπου $\vec{F}_{ατ}$, η δύναμη από την ατμόσφαιρα και $\vec{F}_{υγ}$ η δύναμη που ασκεί το υγρό.



Από την ισορροπία του εμβόλου παίρνουμε:

$$ΣF=0 \text{ ή } F_{υγ}=F_{ατ} \text{ ή } p_A{\cdot}S=p_{ατ}{\cdot}S \quad (1) \text{ οπότε και}$$

$$p_A=p_{ατ}$$

Όμως για τη διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Α (την κάτω πλευρά του εμβόλου) και Β (στην αριστερή πλευρά της τάπας) ισχύει:

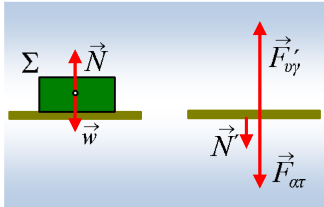
$$p_B\text{-}p_A=ρgy \rightarrow \ p_B=p_A+ ρg(H\text{-}h)=p_{ατ}+ ½\, ρgH.$$

Ερχόμαστε τώρα στην ισορροπία της τάπας, στην οποία ασκούνται οι δυνάμεις που έχουν σημειωθεί παραπάνω και παίρνουμε:

$$ΣF_x=0 \text{ ή } F_B=F_{ατ}+F_1 \ \text{ ή } p_B{\cdot}A=p_{ατ}{\cdot}A+ F_1 \ \text{ ή } \ p_{ατ}{\cdot}A+ ½\, ρgH{\cdot}A=p_{ατ}{\cdot}A+F_1 \text{ ή}$$

$$F_1 = ½\ \rho g H \cdot A \ \ (2) \rightarrow$$

$$F_1 = ½\ 1.000 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10^{-4}\ N = 0{,}5N.$$



ii) Το σώμα Σ ισορροπεί, οπότε ΣF=0 ή N=w. Αλλά τότε στο έμβολο, εκτός από τις δυνάμεις που αναφερθήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, ασκείται και η αντίδραση της $\vec{N}$, η $\vec{N}'$ όπως στο διπλανό σχήμα. Έτσι η προηγούμενη σχέση ισορροπίας του γίνεται:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } F'_{\upsilon\gamma} = F_{\alpha\tau} + N' \text{ ή } p_A \cdot S = p_{\alpha\tau} \cdot S + N' \rightarrow$$

$$p_A = p_{\alpha\tau} + \frac{N'}{S} \ \ (1\alpha)$$

Έτσι η σχέση (2) για την ισορροπία της τάπας δίνει:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } F_B = F_{\alpha\tau} + F_2 \ \text{ ή } p_B \cdot A = p_{\alpha\tau} \cdot A + F_2 \text{ ή}$$

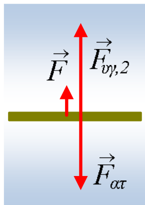
$$p_{\alpha\tau} \cdot A + \frac{N'}{S} \cdot A + \frac{1}{2}\rho g H \cdot A = p_{\alpha\tau} \cdot A + F_2 \rightarrow$$

$$F_2 = \frac{N'}{S} \cdot A + \frac{1}{2}\rho g H \cdot A \ \ (2\alpha) \rightarrow$$

$$N' = F_2 \frac{S}{A} - \frac{1}{2}\rho g H \cdot S$$

$$N' = 0{,}6 \cdot \frac{0{,}2}{10^{-4}} N - \frac{1}{2} 1.000 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0{,}2N = 200N$$

Οπότε και το βάρος του σώματος Σ θα είναι *w=N=200N.*



iii) Ξανά το έμβολο ισορροπεί με την άσκηση των δυνάμεων που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } F_{\upsilon\gamma,2} + F = F_{\alpha\tau} \ \text{ ή } p_A \cdot S + F = p_{\alpha\tau} \cdot S \ \rightarrow$$

$$p_A = p_{\alpha\tau} - \frac{F}{S} \ \ (1\beta)$$

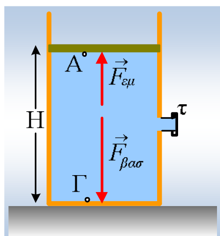
α) Έτσι τώρα η σχέση (2) για την ισορροπία της τάπας δίνει:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } F_B = F_{\alpha\tau} + F_3 \ \text{ ή } p_B \cdot A = p_{\alpha\tau} \cdot A + F_3 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau} \cdot A - \frac{F}{S} \cdot A + \frac{1}{2}\rho g H \cdot A = p_{\alpha\tau} \cdot A + F_3 \rightarrow$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\rho g H \cdot A - \frac{F}{S} \cdot A \ \ (2\beta) \rightarrow$$

$$F_3 = \frac{1}{2} 1.000 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10^{-4} N - \frac{200}{0{,}2} \cdot 10^{-4} N = 0{,}4N$$



β) Η δύναμη που ασκεί το νερό στο έμβολο, υπολογίζεται με βάση τη πίεση στην κάτω πλευρά του εμβόλου (σχέση 1β):

$$F_{\varepsilon\mu\beta} = p_A \cdot S = \left(p_{at} - \frac{F}{S}\right) \cdot S = p_{at} \cdot S - F \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\mu\beta} = 10^5 \cdot 0{,}2N - 200N = 19.800N$$

Εξάλλου η πίεση στο σημείο Γ (στον πυθμένα του δοχείου) βρίσκεται:

$$p_\Gamma - p_A = \rho g H \rightarrow \ p_\Gamma = p_A + \rho g H \rightarrow$$

$$F_{\beta\acute{\alpha}\sigma} = p_\Gamma \cdot S = \left(p_{at} - \frac{F}{S} + \rho g H\right) \cdot S = (p_{at} + \rho g H) \cdot S - F \rightarrow$$

$$F_{\beta\alpha\sigma} = (10^5 + 1.000 \cdot 10 \cdot 1) \cdot 0{,}2N - 200N = 21.800N$$

dmargaris@gmail.com