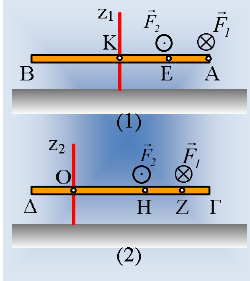
Δύο ράβδοι, διαφορετικοί άξονες περιστροφής.



Δυο όμοιες ομογενείς ράβδοι (1) και (2) μήκους l, μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα, διαγράφοντας οριζόντιο επίπεδο. Ο άξονας z_1 περιστροφής της πρώτης, διέρχεται από το μέσον Κ της ράβδου, ενώ ο αντίστοιχος άξονας z_2 της δεύτερης, περνά από το σημείο Ο, όπου (ΔΟ)= ¼ l. Σε μια στιγμή ασκούνται στην πρώτη ράβδο, δυο αντιπαράλληλες οριζόντιες, σταθερού μέτρου δυνάμεις $F_1=F_2=F$, διαρκώς κάθετες στη ράβδο, η μια στο άκρο Α και η δεύτερη στο μέσον Ε της (ΚΑ). Την ίδια στιγμή στη δεύτερη ράβδο ασκούνται ίδιες δυνάμεις στα σημεία Η και Ζ, όπου (ΗΖ)= ¼ l.

i) Για τα χρονικά διαστήματα, t_1 και t_2, που θα απαιτηθούν για να ολοκληρωθεί η πρώτη περιστροφή των δύο ράβδων, ισχύει:

α) $t_1 < t_2$, β) $t_1 = t_2$, γ) $t_1 > t_2$.

ii) Αν L_1 το μέτρο της στροφορμής της πρώτης ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της z_1 και L_2 η αντίστοιχη στροφορμή της δεύτερης ως προς τον άξονα z_2, τις στιγμές t_1 και t_2, ισχύει:

α) $L_1 < L_2$, β) $L_1 = L_2$, γ) $L_1 > L_2$.

iii) Τις στιγμές t_1 και t_2, που οι δυο ράβδοι έχουν ολοκληρώσει μια περιστροφή, έχουν κινητικές ενέργειες K_1 και K_2. Για τις ενέργειες αυτές ισχύει:

α) $K_1 < K_2$, β) $K_1=K_2$, γ) $K_1 > K_2$.

iv) Ο άξονας περιστροφής ασκεί οριζόντια δύναμη:

α) Μόνο στην (1) ράβδο, β) Μόνο στην (2) ράβδο, γ) και στις δύο ράβδους, δ) σε καμιά ράβδο.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

Ανεξάρτητα με τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων, στις δυο ράβδους ασκούνται δύο ζεύγη δυνάμεων με ίσες ροπές:

$$\tau_1=\tau_2=F\cdot d= \tfrac{1}{4}\, F\cdot l.$$

Οι δυο ράβδοι είναι όμοιες, αλλά η δεύτερη παρουσιάζει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z_2, αφού για τις ροπές αδράνειας έχουμε:

$$I_{1,z1}=I_{cm} \text{ και } I_{2,z2}=I_{cm}+md^2$$

Όπου d η απόσταση του Ο από το μέσον της ράβδου, δηλαδή d= ¼ l.

i) Κάθε ράβδος αποκτά μια γωνιακή επιτάχυνση, η οποία υπολογίζεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma\tau_z=I_z\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\tau}{I}$$

Αλλά αφού $\tau_1=\tau_2=\tau$ και $I_1<I_2$ συμπεραίνουμε ότι η πρώτη ράβδος αποκτά μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση και θα χρειαστεί μικρότερο χρόνο για την ολοκλήρωση μιας περιστροφής.

Πράγματι, η γωνιακή επιτάχυνση κάθε ράβδου είναι σταθερή, με αποτέλεσμα η κίνησή τους να είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία (κατ' αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση) ισχύει:

$$\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2.$$

Όπου στην περίπτωσή μας $\Delta\varphi_1=\Delta\varphi_2=2\pi$, οπότε η ράβδος (1) με την μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση θα χρειαστεί μικρότερο χρόνο για μια πλήρη περιστροφή.

Σωστή η α) επιλογή $t_1 < t_2$.

ii) Από το γενικευμένο νόμο για μια ράβδο παίρνουμε:

$$\frac{dL}{dt}=\tau \xrightarrow{\tau=\sigma\tau\alpha\theta} \frac{\Delta L}{\Delta t}=\tau \rightarrow L=\tau\cdot t$$

Όπου L η στροφορμή μετά από χρόνο t. Οπότε για τις δυο ράβδους θα έχουμε:

$$L_1=\tau\cdot t_1 \quad \text{και} \quad L_2=\tau\cdot t_2$$

Αλλά αφού $t_1 < t_2$ θα ισχύει και $L_1 < L_2$. Σωστό το α).

iii) Η κινητική ενέργεια που αποκτά η πρώτη ράβδος μετά από μια περιστροφή είναι ίση με το έργο της ροπής του ζεύγους:

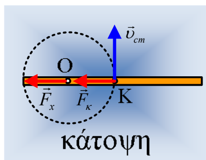
$$K_1=W_\tau=\tau\cdot\Delta\varphi_1=2\pi\cdot\tau$$

Αλλά όμοια και για τη δεύτερη ράβδο θα ισχύει $K_2=W_\tau=\tau\cdot\Delta\varphi_2=2\pi\cdot\tau$, οπότε οι δυο ράβδοι αποκτούν ίσες κινητικές ενέργειες στη διάρκεια της πρώτης περιστροφής. Σωστό το β).

iv) Η συνισταμένη των δυνάμεων F_1 και F_2 είναι $F_{1,2}=F_1-F_2=0$.

Η πρώτη ράβδος στρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της, το οποίο παραμένει ακίνητο, χωρίς να απαιτείται ο άξονας να ασκεί κάποια δύναμη στη ράβδο.

Αντίθετα το κέντρο μάζας της δεύτερης ράβδου εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R= ¼ l, με ταχύτητα $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$, συνεπώς ο άξονας ασκεί μια κατάλληλη οριζόντια δύναμη F_x η οποία (μεταφερόμενη στο cm) παίζει το ρόλο της κεντρομόλου.



Σωστή η β) επιλογή.

dmargaris@gmail.com