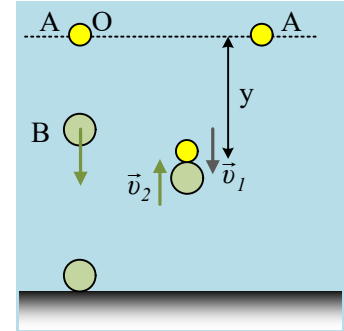


## Δύο κρούσεις, ένας έλεγχος

Στη θέση O, σε ορισμένο ύψος από το έδαφος, συγκρατούμε δυο σφαίρες A και B με μάζες  $m_1=1\text{kg}$  και  $m_2=2\text{kg}$ . Σε μια στιγμή αφήνουμε την B να πέσει και μετά από λίγο αφήνουμε την A. Η σφαίρα B συγκρούεται με το έδαφος και επιστρέφοντας συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την A, η οποία κατέρχεται, έχοντας τη στιγμή της κρούσης ταχύτητα μέτρου  $v_1=3\text{m/s}$ . Μετά την κρούση η σφαίρα A επιστρέφει στο σημείο O με μηδενική ταχύτητα.



- i) Να υπολογιστεί η κατακόρυφη απόσταση  $y$  μεταξύ της αρχικής θέσης O και της θέσης της κρούσης, των δύο σφαιρών.
- ii) Να αποδείξετε ότι η κρούση μεταξύ της σφαίρας B και του εδάφους, είναι ανελαστική.
- iii) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής της B σφαίρας κατά την κρούση των δύο σφαιρών.
- iv) Να υπολογιστεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση της σφαίρας B με το έδαφος.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

### Απάντηση:

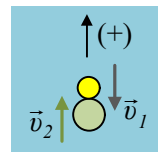
- i) Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο κρούσης, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, παίρνουμε από τη διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη σφαίρα A:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$m_1 g y = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \rightarrow (1)$$

$$y = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{3^2}{2 \cdot 10} \text{m} = 0,45\text{m}$$

- ii) Έστω ότι η κρούση μεταξύ της σφαίρας B και του επιπέδου, είναι ελαστική. Τότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, μέχρι τη στιγμή που θα έχουμε την κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών. Αλλά τότε η ΑΔΜΕ για την B σφαίρα οδηγεί, όπως και στο i) ερώτημα σε ταχύτητα της B σφαίρας  $v_2=3\text{m/s}$ , με φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε μετά την κρούση, μεταξύ των σφαιρών, η A σφαίρα αποκτά ταχύτητα (θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω):



$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2) \rightarrow$$

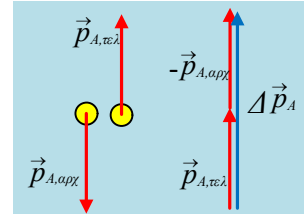
$$v_1' = \frac{1 - 2}{1 + 2} (-3)\text{m/s} + \frac{2 \cdot 2}{1 + 2} 3\text{m/s} = 5\text{m/s}$$

Βλέπουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας της A σφαίρας, αυξάνεται μετά την κρούση, πράγμα που σημαίνει ότι η σφαίρα κέρδισε ενέργεια, με αποτέλεσμα η σφαίρα να φτάσει σε μεγαλύτερο ύψος, από την αρχική θέση που το αφήσαμε να κινηθεί. Πράγματι με εφαρμογή της ΑΔΜΕ, από την σχέση (1) παίρνουμε για το μέγιστο ύψος, πάνω από το σημείο κρούσης:

$$m_1 g y_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \rightarrow y_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 10} m = 1,25m > y$$

Πράγμα άτοπο, αφού με βάση την εκφώνηση η σφαίρα Α επιστρέφει στο Ο, (σε ύψος 0,45m), χωρίς ταχύτητα.

- iii) Με βάση τα προηγούμενα, αφού η σφαίρα επιστρέφει, χωρίς ταχύτητα, στη θέση Ο, μετά την κρούση θα έχει ταχύτητα με φορά προς τα πάνω, ίσου μέτρου ( $v_1' = 3\text{m/s}$ ) με την ταχύτητα που είχε ελάχιστα πριν την κρούση. Έτσι θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, θα έχουμε για την μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας:



$$\Delta \vec{p}_A = \vec{p}_{A,μετ} - \vec{p}_{A,πριν} = \vec{p}_{A,μετ} + (-\vec{p}_{A,πριν})$$

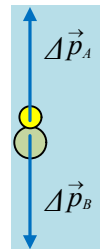
$$\Delta p_A = m_1 v_1' - m_1 v_1 = 1 \cdot 3 \text{ kgm/s} - 1 \cdot (-3) \text{ kgm/s} = 6 \text{ kgm/s}$$

Αλλά κατά την κρούση των δύο σφαιρών, η συνολική ορμή παραμένει σταθερή, συνεπώς:

$$\vec{p}_{A,πριν} + \vec{p}_{B,πριν} = \vec{p}_{A,μετ} + \vec{p}_{B,μετ} \rightarrow$$

$$\Delta \vec{p}_B = \vec{p}_{B,μετ} - \vec{p}_{B,πριν} = \vec{p}_{A,πριν} - \vec{p}_{A,μετ} = -\Delta \vec{p}_A \rightarrow$$

$$\Delta p_B = -6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$



- iv) Λύνοντας τη σχέση (2) ως προς την ταχύτητα τη Β σφαίρας, παίρνουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \rightarrow$$

$$v_2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_2} v_1' - \frac{m_1 - m_2}{2m_2} v_1 = \frac{1 + 2}{2 \cdot 2} 3\text{m/s} - \frac{1 - 2}{2 \cdot 2} (-3)\text{m/s} = 1,5\text{m/s}$$

Αλλά απώλεια ενέργειας έχουμε μόνο στη διάρκεια της κρούσης με το έδαφος, οπότε μπορούμε να βρούμε την απώλεια αυτή χρησιμοποιώντας την αρχική ενέργεια τη σφαίρας, στη θέση Ο και την ενέργειά της ελάχιστα πριν την κρούση με τη σφαίρα Α (θεωρούμε ξανά ότι  $U=0$  ελάχιστα πριν την κρούση):

$$\Delta E = E_{αρχ,0} - E_{τελ,κρ} = m_2 g y - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \rightarrow$$

$$\Delta E = m_2 g y - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 2 \cdot 10 \cdot 0,45\text{J} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5^2\text{J} = 6,75\text{J}$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)