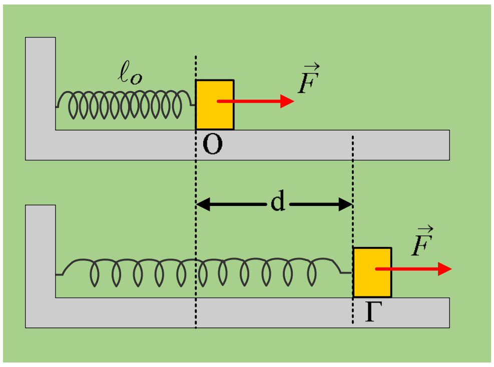
Δυο διαδοχικές ταλαντώσεις



Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=20N/m, στη θέση Ο. Ασκούμε στο σώμα για $t_0=0$, μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=8N με αποτέλεσμα να επιμηκύνεται το ελατήριο, μέχρι τη στιγμή t_1 που το σώμα έχοντας μετακινηθεί κατά d=0,8m, φτάνει στη θέση Γ, όπου παύει να ασκείται πάνω του η δύναμη F.

i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος:

α) στην αρχική θέση, μόλις ασκηθεί η δύναμη F,

β) όταν το ελατήριο έχει επιμήκυνση Δl_1=0,4m,

γ) στην θέση Γ, πριν καταργηθεί η δύναμη F και αμέσως μετά την κατάργησή της.

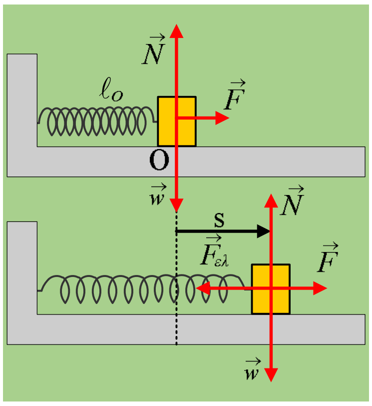
ii) Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος για το διάστημα που ασκείται πάνω του η δύναμη F.

iii) Πόσο χρόνο ασκήθηκε στο σώμα η δύναμη F;

iv) Να γίνει η γραφική παράσταση x=x(t) της απομάκρυνσης του σώματος από την αρχική θέση ισορροπίας του Ο, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2= 2s.

Θεωρείστε ότι $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπου έχουμε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση (N=mg), οπότε από το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής παίρνουμε:

α) Για τη θέση Ο:

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_o \rightarrow F = m\cdot\alpha_o \rightarrow \alpha_o = \frac{F}{m} = \frac{8N}{2kg} = 4\ m/s^2$$

β) Στη θέση που το σώμα έχει μετακινηθεί κατά $s_1=\Delta l_1$=0,4m:

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_1 \rightarrow F - F_{\varepsilon\lambda} = m\cdot\alpha_1 \rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{F - k\Delta\ell}{m} = \frac{8N - 20\cdot 0{,}4N}{2kg} = 0$$

γ) Ελάχιστα πριν την κατάργηση της δύναμης στη θέση Γ:

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_2 \rightarrow F - F_{\varepsilon\lambda} = m\cdot\alpha_2 \rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{F - k\Delta\ell}{m} = \frac{8N - 20\cdot 0{,}8N}{2kg} = -4\ m/s^2$$

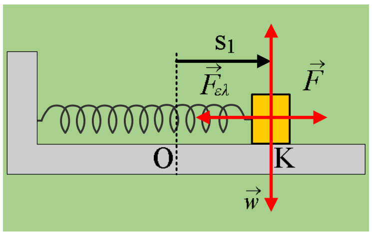
Αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης F, η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$\alpha_3 = \frac{-k\Delta\ell}{m} = \frac{-20 \cdot 0{,}8N}{2kg} = -8\, m/s^2$$

ii) Με βάση τις τιμές της επιτάχυνσης που υπολογίσαμε παραπάνω, αλλά και με τη βοήθεια της εξίσωσης:

$$\alpha = \frac{F - k\Delta\ell}{m}$$

Βλέπουμε ότι για όσο χρόνο $F>k\cdot\Delta\ell$, (η δύναμη F μεγαλύτερου μέτρου από τη δύναμη του ελατηρίου) το σώμα επιταχύνεται και η ταχύτητά του αυξάνεται. Όταν $F<k\cdot\Delta\ell$, το σώμα επιβραδύνεται και η ταχύτητά του μειώνεται, οπότε η μέγιστη ταχύτητα του σώματος θα είναι στη θέση όπου α=0 δηλαδή στη θέση που το σώμα έχει διανύσει απόσταση s_1=0,4m, όπως βρήκαμε παραπάνω.



Εφαρμόζουμε για το σώμα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής θέσης Ο και της θέσης Κ, όπου (ΟΚ)=s_1=0,4m:

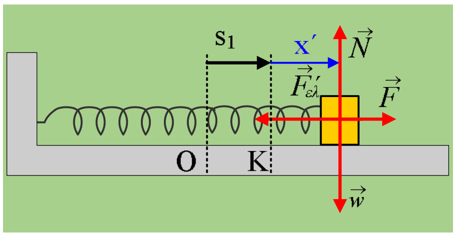
$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_w+W_N+W_F+W_{F\varepsilon\lambda}$$

Όπου $W_w= W_N = 0$, δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση, $W_F=F\cdot s_1$ και $W_{F\varepsilon\lambda}=U_{\varepsilon\lambda.\alpha\rho\chi}-U_{\varepsilon\lambda,\tau\varepsilon\lambda}=0- ½\, k(\Delta\ell)^2$, οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = F\cdot s_1 - \frac{1}{2}ks_1^2 \rightarrow$$

$$K_1 = K_{max} = F\cdot s_1 - \frac{1}{2}ks_1^2 = 8\cdot 0{,}4J - \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 0{,}4^2 J = 1{,}6J$$

iii) Με βάση τα στοιχεία που βρήκαμε στα προηγούμενα ερωτήματα, φαίνεται η κίνηση του σώματος από το Ο στο Κ να είναι τμήμα κάποιας ταλάντωσης. Είναι έτσι; Ας το δούμε.



Κατά την παραπάνω κίνηση, υπάρχει μια θέση ισορροπίας, η θέση Κ, η οποία απέχει κατά (ΟΚ)=0,4m από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, όπου $\Sigma F=F-k\cdot s_1=0$. Αν πάρουμε τώρα το σώμα σε μια τυχαία θέση, όπως στο σχήμα, η οποία απέχει κατά x΄ από το Κ, τότε για τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα, θα έχουμε:

$$\Sigma F = \Sigma F_x = F - F'_{\varepsilon\lambda} = F - k(s_1 + x') = (F - ks_1) - kx' = -kx'$$

Βλέπουμε δηλαδή να εκτελεί μια αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D=k και περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{20}}s = 2s$$

Και με πλάτος A_1=(ΟΚ)=s_1=0,4m. Αλλά τότε η θέση Γ, σε απόσταση d=0,8m, είναι η δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσης αυτής και η δύναμη F ασκήθηκε για χρονικό διάστημα t_1= ½ T= 1s.

iv) Θεωρώντας τώρα την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, το σώμα ξεκίνησε την ταλάντωσή του από την ακραία αρνητική θέση του ($x'=-A_1$) για t=0, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του Κ, είναι την μορφής:

$$x' = A_1 \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}4 \cdot \eta\mu\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) με } 0 \le t \le 1\text{s}$$

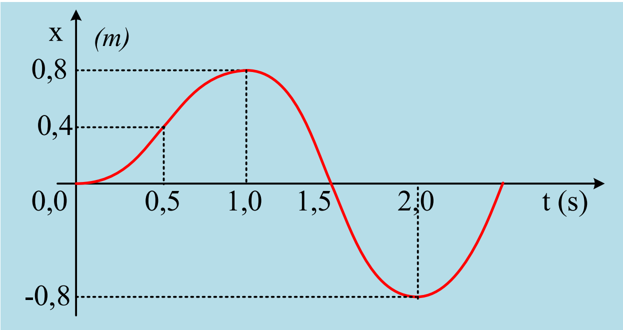
Αλλά τότε σε όλο αυτό το διάστημα, η θέση του x ως προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, θέση Ο, θα δίνεται από την εξίσωση:

$$x = s_1 + x' = 0{,}4 + 0{,}4 \cdot \eta\mu\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) με } 0 \le t \le 1\text{s} \quad (1)$$

Στη συνέχεια, σταματά να ασκείται στο σώμα η δύναμη F, οπότε έχουμε το γνωστό σύστημα σώμα-ελατήριο, όπου με βάση τη θεωρία μας το σώμα θα εκτελέσει ΑΑΤ, γύρω από τη θέση ισορροπίας του η οποία ταυτίζεται και με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου με την ίδια σταθερά επαναφοράς D=k, άρα και την ίδια περίοδο και με πλάτος $A_2=d$, αφού η θέση Γ είναι η ακραία θέση της νέας ταλάντωσης. Λαμβάνοντας δε υπόψη ότι η νέα ταλάντωση ξεκινά τη χρονική στιγμή $t'=0$ από την θέση $x=+A_2$, η απομάκρυνση θα παρουσιάζει αρχική φάση π/2, ενώ $t'=t-t_1$. Έτσι γράφουμε για την απομάκρυνση τη δεύτερης ταλάντωσης:

$$x = 0{,}8 \cdot \eta\mu\left(\pi t' + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8 \cdot \eta\mu\left(\pi t - \pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8 \cdot \eta\mu\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.) με } t \ge 1\text{s} \ (2)$$

Με βάση τις συναρτήσεις (1) και (2) χαράσσουμε τη ζητούμενη γραφική παράσταση x(t), παίρνοντας το παρακάτω διάγραμμα.



dmargaris@gmail.com