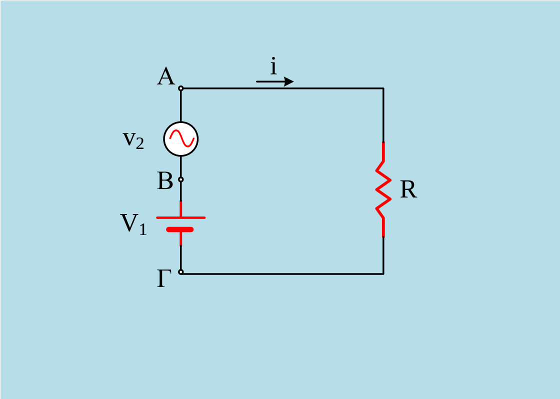
Ένα ρεύμα εναλλασσόμενο

Δίνεται το διπλανό κύκλωμα, στο οποίο μια πηγή συνεχούς τάσης V_1=10V συνδέεται με εναλλακτήρα με τάση: $v_2=V_o\cdot ημωt$= 15·ημωt και το σύστημα τροφοδοτεί αντιστάτη με αντίσταση R=5Ω.



i) Να βρεθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη και να γίνει η γραφική της παράσταση. Πόσο φορτίο περνά από μια διατομή σε χρόνο μιας περιόδου Τ του εναλλακτήρα;

ii) Να βρεθεί η ενεργός ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Απάντηση:

i) Η στιγμιαία τάση στα άκρα Α και Γ της αντίστασης R είναι ίση:

$$v_{ΑΓ}=V_1+v_2=10+15\cdot ημωt$$

Οπότε από τον νόμο του Ohm προκύπτει ότι διαρρέεται από ρεύμα στιγμιαίας έντασης:

$$i=\frac{v_1}{\mathrm{R}}=\frac{V_1+V_oημωt}{\mathrm{R}}=\frac{V_1}{\mathrm{R}}=+\frac{V_oημωt}{\mathrm{R}}=I_Σ+I_oημωt$$

Και με αντικατάσταση:

$$i=\frac{V_1}{\mathrm{R}}+\frac{V_oημωt}{\mathrm{R}}=\frac{10}{5}A+\frac{15ημωt}{5}A=(2+3ημωt)A$$

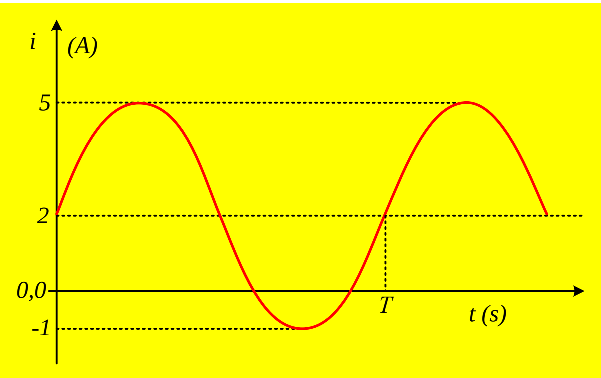
Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας, ως εξής:

Αν στο κύκλωμα είχαμε μόνο την συνεχή τάση, το κύκλωμα θα διαρρέεται από ένα συνεχές ρεύμα έντασης:

$$I_Σ=\frac{V_1}{\mathrm{R}}=2A$$

Αν υπήρχε στο κύκλωμα, μόνο η πηγή εναλλασσόμενης τάσης, το κύκλωμα θα διαρρεόταν από ένα εναλλασσόμενο ρεύμα με στιγμιαία ένταση:

$$i_1=\frac{V_oημωt}{\mathrm{R}}=\frac{15ημωt}{5}A=3ημωt\ (A)$$

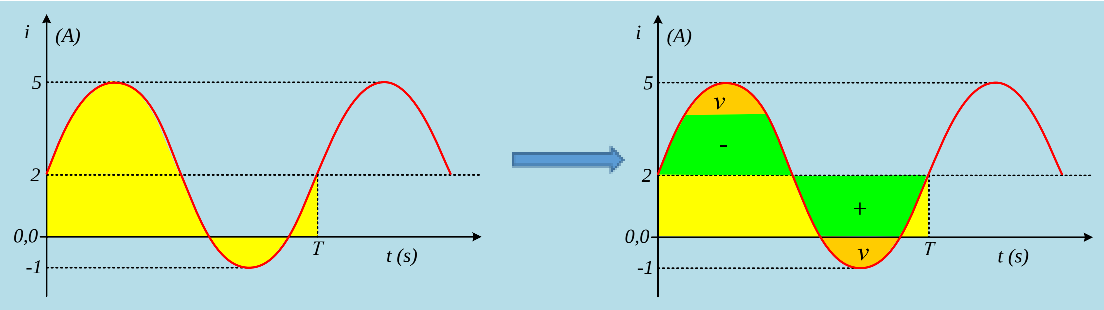


Τώρα που έχουμε και τις δυο πηγές το συνολικό ρεύμα θα έχει ένταση:

$$i=I_Σ+i_1=(2+3ημωt)A$$

Με γραφική παράσταση, όπως στο διπλανό σχήμα.

Στο διάγραμμα αυτό το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με το φορτίο που περνά από μια διατομή του κυκλώματος. Δηλαδή το φορτίο είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου, με ύψος 2 και βάση Τ, όπως προκύπτει από το σχήμα:



Δηλαδή q=2Τ.

Στην πραγματικότητα το παραπάνω φορτίο είναι αυτό που οφείλεται στην πηγή του συνεχούς ρεύματος.

ii) Η θερμότητα που εμφανίζεται πάνω στον αντιστάτη σε χρόνο μιας περιόδου, μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή του νόμου του Jouℓe:

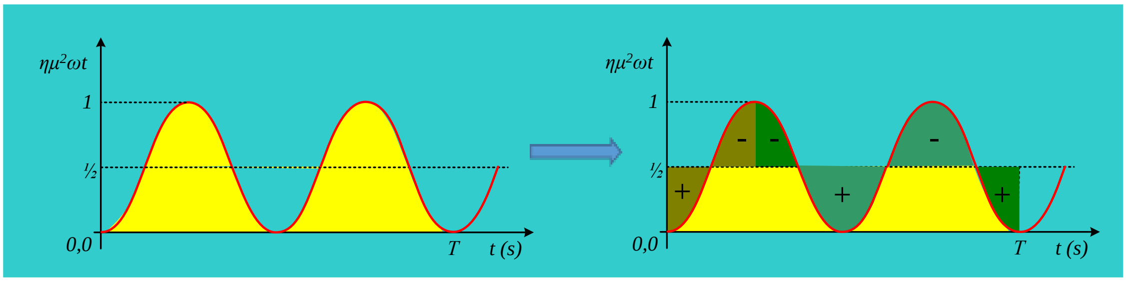
$$dQ = i^2Rdt = (I_\Sigma + I_o\eta\mu\omega t)^2Rdt = I_\Sigma^2Rdt + I_o^2\eta\mu^2\omega t \cdot Rdt + 2I_\Sigma \cdot I_o\eta\mu\omega t \cdot Rdt$$

Αλλά τότε σε χρόνο μιας περιόδου, πάνω στον αντιστάτη παράγεται θερμότητα:

$$Q_T = \int_0^T I_\Sigma^2Rdt + \int_0^T I_o^2 \cdot \eta\mu^2\omega t \cdot Rdt + \int_0^T 2I_\Sigma \cdot I_o\eta\mu\omega t \cdot Rdt$$

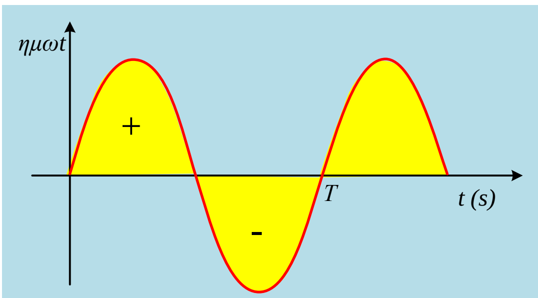
$$Q_T = I_\Sigma^2RT + I_o^2R\int_0^T \eta\mu^2\omega t \cdot dt + 2I_\Sigma \cdot I_oR\int_0^T \eta\mu\omega t \cdot dt$$

Για το 2^{o} ολοκλήρωμα, αν λάβουμε υπόψη το παρακάτω διάγραμμα:



$$Q_2 = I_o^2R\int_0^T \eta\mu^2\omega t \cdot dt = I_o^2R \cdot \frac{1}{2}T$$

Ενώ το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μηδενικό:



Έτσι τελικά έχουμε:

$$Q_T = I_\Sigma^2 RT + \frac{1}{2} I_o^2 RT = I_{\varepsilon\nu}^2 RT \rightarrow$$
$$I_{\varepsilon\nu}^2 = I_\Sigma^2 + \frac{1}{2} I_o^2 = 2^2 + \frac{1}{2} 3^2 = \frac{17}{2} A^2 \rightarrow$$
$$I_{\varepsilon\nu} = \sqrt{8{,}5}\, A$$

Σχόλια:

1) Παραπάνω προτιμήθηκε ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων να γίνει μέσω εμβαδών, παρότι το αρχείο απευθύνεται σε συναδέλφους. Τα παραπάνω εμβαδά όμως, καλό είναι να τα κρατήσουμε στα υπόψιν, αφού πιθανόν θα χρειαστούν και κατά τη διδασκαλία…

2) Μην βιαστεί κάποιος να πει ότι η συνολική θερμότητα είναι ίση με το άθροισμα των θερμοτήτων που τα «δύο ρεύματα» θα παρήγαγαν χωριστά πάνω στον αντιστάτη. Αυτό συνέβη επειδή το 3^o ολοκλήρωμα προέκυψε μηδενικό, λόγω ημιτόνου! Αλλά αν αντί για το εναλλασσόμενο ρεύμα, είχαμε «δύο» συνεχή με εντάσεις I_1=2A και I_2=3A, τότε:

   Αν κάθε ρεύμα διέρρεε μόνο του τον αντιστάτη θα είχαμε θερμότητες:

$$Q_1=I_1^2Rt=4\cdot Rt \;\; \text{και} \;\; Q_2=I_2^2\,Rt=9\cdot Rt$$

   Συνολικά δηλαδή θα βρίσκαμε ότι:

$$Q_{o\lambda}=Q_1+Q_2=13\cdot Rt$$

   Ενώ στην πραγματικότητα ο αντιστάτης διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I=I_1+I_2=5A$ και η θερμότητα είναι:

$$Q=I^2Rt=25\cdot Rt$$

dmargaris@gmail.com