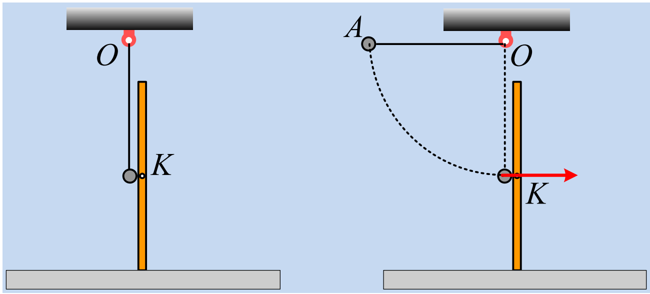
Η ελαστική κρούση μιας σφαίρας με ράβδο.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί, σε όρθια θέση, μια ομογενής ράβδος, ενώ μια σφαίρα, μάζας Μ, βρίσκεται σε επαφή μαζί της, ενώ κρέμεται στο άκρο νήματος από σταθερό σημείο Ο. Εκτρέπουμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στη θέση Α με το νήμα οριζόντιο, όπως στο σχήμα και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά την ελαστική της κρούση με τη ράβδο, στο μέσον της Κ, η σφαίρα μένει ακίνητη.



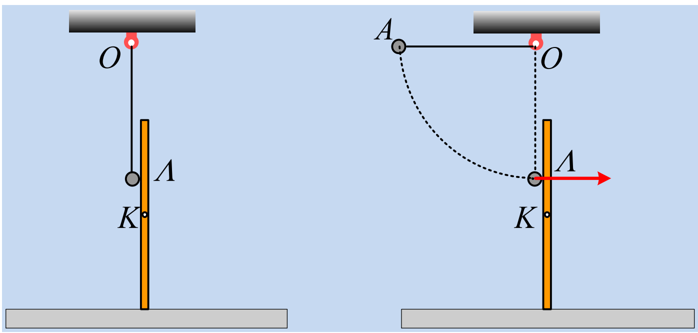
i) Για την μάζα m της ράβδου ισχύει:

α) $m < M$, β) $m=M$, γ) $m > M$.

ii) Να εξετάσετε αν η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, ως προς:

α) Το σημείο Ο, β) Το σημείο Κ.

iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά προηγουμένως έχουμε ανεβάσει λίγο το σημείο Ο, με αποτέλεσμα τώρα η σφαίρα να κτυπήσει τη σανίδα στο σημείο Λ, όπως στο σχήμα.

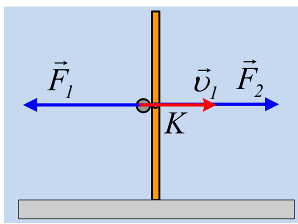


Η ταχύτητα της σφαίρας μετά την ελαστική κρούση της με τη σανίδα:

α) θα είναι μηδενική, β) θα είναι διάφορη του μηδενός.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο στη διάρκεια της κρούσης, όπου η $\vec{F}_2$ η οποία ασκείται στη ράβδο, περνά από το μέσον της Κ. Αλλά τότε στη διάρκεια της κρούσης δεν ασκείται καμιά ροπή στη ράβδο, οπότε αυτή δεν θα περιστραφεί, εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση.

Αλλά τότε για την ελαστική κρούση θα ισχύει η διατήρηση της ορμής και η διατήρηση της κινητικής ενέργειας:

$$M\upsilon_1 = M\upsilon_1' + m\upsilon_2' \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2 \quad (2)$$

Αλλά το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), είναι το ίδιο που ισχύει και στην περίπτωση ελαστικής κρούσης μεταξύ δύο υλικών σημείων, εκ των οποίων το ένα είναι ακίνητο. Αλλά αφού η σφαίρα έχει μηδενική ταχύτητα μετά την κρούση, σημαίνει ότι τα δυο σώματα έχουν ίσες μάζες (ανταλλαγή ταχυτήτων).

Συνεπώς m=M. Σωστή η β) πρόταση.

ii) Ως προς το σημείο Ο η στροφορμή διατηρείται, αφού οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις, τα βάρη, δεν έχουν ροπή ως προς το Ο, οπότε η στροφορμή διατηρείται. Πράγματι:

$$L_{\pi\rho\iota\nu} = M\upsilon_1 \cdot d,$$

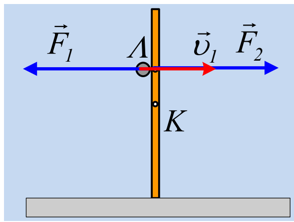
όπου d το μήκος του νήματος, ενώ μετά την κρούση, η σφαίρα μένει ακίνητη αλλά η ράβδος έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_2' = \upsilon_1$ και στροφορμή:

$$L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = m\upsilon_2' \cdot d = M\upsilon_1 \cdot d$$

Εξάλλου και τα δύο αυτά διανύσματα είναι κάθετα στο επίπεδο του σχήματος στο σημείο Ο με φορά προς τον αναγνώστη, οπότε $\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$.

Το ίδιο προφανώς ισχύει και ως προς το μέσον Κ της ράβδου, αφού $L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = 0$.

iii) Έστω ότι μετά την ελαστική κρούση η σφαίρα μένει ακίνητη, όπως και προηγουμένως. Τώρα όμως η δύναμη $\vec{F}_2$ που ασκείται στη ράβδο, δεν περνά από το κέντρο μάζας, με αποτέλεσμα να ασκείται ροπή στη ράβδο, η οποία θα αποκτήσει και γωνιακή ταχύτητα ω. Αλλά τότε από τη διατήρηση της ορμής παίρνουμε:



$$M\upsilon_1 = M \cdot 0 + m\upsilon_2' \rightarrow \upsilon_2' = \upsilon_1$$

Αλλά τότε η τελική κινητική ενέργεια της ράβδου θα είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = K_{\alpha\rho\chi} + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 > K_{\alpha\rho\chi}$$

Πράγμα άτοπο. Συνεπώς και η σφαίρα έχει κάποια ταχύτητα μετά την κρούση. Σωστό το β).

dmargaris@sch.gr