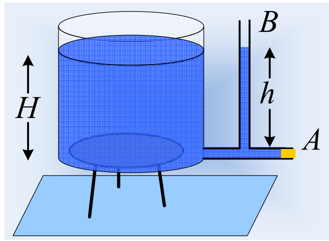
Τρεις εκδοχές σε παρόμοια φαινόμενα.

Ένα μεγάλο κυλινδρικό δοχείο περιέχει νερό σε βάθος H, ενώ κοντά στον πυθμένα του είναι συνδεδεμένος οριζόντιος σωλήνας Α. Στον σωλήνα αυτό έχει συνδεθεί δεύτερος κατακόρυφος σωλήνας Β.

Παρακάτω δίνονται τρεις εκδοχές, θεωρώντας το νερό ιδανικό ρευστό:

Εκδοχή 1η :



Ο σωλήνας Α φράσσεται με τάπα, ενώ ο Β είναι ανοικτός.

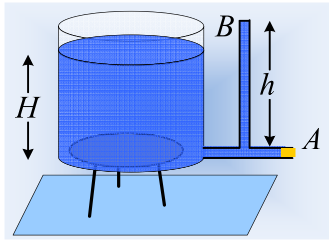
i) Για το ύψος του νερού στο σωλήνα Β ισχύει:

α) $h<H$, β) $h=H$, γ) $h>H$

ii) Ανοίγουμε την τάπα και αποκαθίσταται μόνιμη και στρωτή ροή. Για το νέο ύψος του νερού στο σωλήνα Β ισχύει:

α) $h=H$, β) $h<H$, γ) $h=0$

Εκδοχή 2η :



Ο σωλήνας Α φράσσεται με τάπα, ενώ ο Β είναι κλειστός και γεμάτος με νερό μέχρι ύψος h=2m, ενώ h>H.

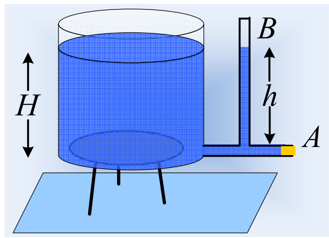
i) Για την τιμή της πίεσης στο κάτω μέρος του σωλήνα Β, σημείο Κ ισχύει:

α) $p_K=\rho gh$, β) $p_K=\rho gH$, γ) $p_K=p_{ατμ}+\rho gh$, δ) $p_K=p_{ατμ}+\rho gH$

ii) Ανοίγουμε την τάπα και αποκαθίσταται μόνιμη και στρωτή ροή. Για το νέο ύψος του νερού στο σωλήνα Β ισχύει:

α) $h_1=h$, β) $h_1=H$, γ) $h_1<H$, δ) $h_1=0$.

Εκδοχή 3η :



Ο σωλήνας Α φράσσεται με τάπα, ενώ ο Β είναι κλειστός έχοντας εγκλωβισμένη κάποια ποσότητα αέρα ενώ το νερό έχει ανέλθη κατά h=H.

i) Για την τιμή της πίεσης στο κάτω μέρος του σωλήνα Β, σημείο Κ ισχύει:

α) $p_K=\rho gh$, β) $p_K=p_{ατμ}+\rho gh$, γ) $p_K>p_{ατμ}+\rho gH$

ii) Ανοίγουμε την τάπα και αποκαθίσταται μόνιμη και στρωτή ροή. Για το νέο ύψος του νερού στο σωλήνα Β ισχύει:

α) $h_1=h$, β) $h_1<H$, γ) $h_1=0$.

Δίνονται $p_{ατμ}=10^5 N/m^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000 kg/m^3$ και $g=10 m/s^2$.

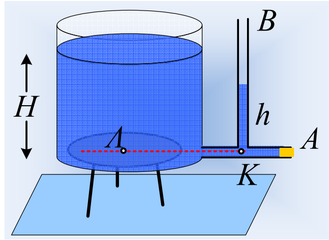
Απαντήσεις

Εκδοχή 1η :

i) Η πίεση σε δυο σημεία στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, έχει την ίδια τιμή, οπότε $p_K=p_Λ$. Αλλά $p_Λ=p_{ατμ}+\rho gH$ και $p_K=p_{ατμ}+\rho gh$, από όπου προκύπτει ότι h=H. Σωστό το β).

ii) Από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές στα σημεία Κ και Α (στην έξοδο) παίρνουμε

$$A_K \cdot \upsilon_K = A_A \cdot \upsilon_A \rightarrow \upsilon_K = \upsilon_A.$$



Η ταχύτητα δηλαδή ροής σε όλα τα σημεία του οριζόντιου σωλήνα είναι η ίδια. Αλλά τότε από την εξίσωση του Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής που διέρχεται από το Κ και ένα σημείο (Α) στην έξοδο του σωλήνα παίρνουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \;\; (1)$$

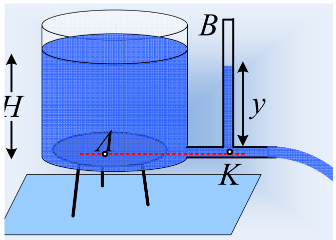
Όμως $p_A = p_{ατμ}$ οπότε και $p_K = p_A = p_{ατμ}$.

Αλλά πάνω από το σημείο Κ, έχουμε μια στήλη νερού στο σωλήνα Β, όπου το νερό έστω ότι έχει ανέβει κατά h, οπότε:

$$P_K = p_{ατμ} + \rho g h \rightarrow p_{ατμ} = p_{ατμ} + \rho g h \rightarrow h = 0$$

Το νερό δηλαδή δεν ανέρχεται στο σωλήνα Β και σωστό είναι το γ).

Εκδοχή 2η :



i) Η πίεση σε δυο σημεία στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, έχει την ίδια τιμή, οπότε $p_K = p_Λ$. Αλλά $p_Λ = p_{ατμ} + \rho g H$ οπότε και $p_Λ = p_{ατμ} + \rho g H$, οπότε σωστό το δ).

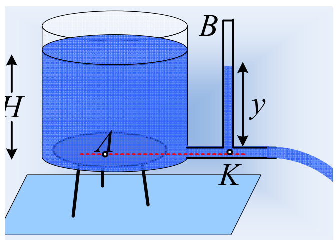
ii) Με βάση και την απάντηση στην 1η εκδοχή, $p_K = p_A = p_{ατμ}$.
Έστω τώρα ότι το νερό θα κατέβει στον σωλήνα Β, οπότε θα έχουμε μια στήλη με ύψος h_1 στην πάνω επιφάνεια της οποίας $p_B = 0$. Αλλά τότε:

$$p_K - p_B = \rho g h_1 \rightarrow p_K = \rho g h_1 \text{ ή}$$

$$h_1 = \frac{p_{ατμ}}{\rho g} = \frac{10^5}{1.000 \cdot 10} m = 10m\,!$$

Με άλλα λόγια, ο κλειστός σωλήνας Β θα έπρεπε να έχει ύψος πάνω από 10m για να υποχωρήσει η πάνω επιφάνεια του νερού! Αλλά τότε η υπόθεσή μας ότι το νερό κατέβηκε στο σωλήνα Β οδηγήθηκε σε άτοπο και σωστό είναι το α) $h_1 = h$.

Εκδοχή 3η :



i) Ξανά η πίεση σε δυο σημεία στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, έχει την ίδια τιμή, οπότε $p_K = p_Λ$. Αλλά $p_Λ = p_{ατμ} + \rho g H$ και $p_K = p_B + \rho g h$, όπου p_B η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα. Αλλά αφού h=H παίρνουμε ότι $p_B = p_{ατμ}$ και σωστό βέβαια είναι το β).

ii) Με βάση τα προηγούμενα έχουμε ξανά $p_K = p_{ατμ}$. Αλλά για την πίεση στο κάτω άκρο της κατακόρυφης στήλης στο σωλήνα Β ισχύει:

$$p_K = p_B' + \rho g y \;\; (2)$$

Η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα ήταν αρχικά (ερώτημα i)) ίση με την ατμοσφαιρική. Αλλά τότε με βάση τη σχέση (2), αφού η πίεση στη βάση της στήλης γίνεται ίση με την ατμοσφαιρική, δεν μπορεί ο όγκος του αέρα να παραμείνει ό ίδιος και το νερό σε ύψος y=h=H. Η στήλη του υγρού θα κατέβει, οπότε y<H, ο όγκος του αέρα θα αυξηθεί, με αποτέλεσμα να μειωθεί η πίεση p_B και να ισχύει ότι;

$$p'_B + \rho g y = p_{\alpha\tau\mu}$$

Σωστό το β).

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν μπορεί να κατέβει εντελώς η στήλη στο σωλήνα Β και να έχουμε y=0, αφού τότε θα είχαμε μια ποσότητα εγκλωβισμένου αέρα, που αρχικά κατείχε ένα μικρό όγκο με πίεση $p_{\alpha\tau\mu}$ και τελικά θα είχαμε πολύ μεγαλύτερο όγκο αερίου, του οποίου η πίεση να παρέμενε σταθερή. Στην πραγματικότητα η μεταβολή του αέρα μπορεί να θεωρηθεί ισόθερμη (η θερμοκρασία είναι ή σχεδόν είναι σταθερή), για την οποία pV=σταθ. Οπότε όταν αυξάνεται ο όγκος (κατεβαίνει η στάθμη) μειώνεται η πίεση.

dmargaris@gmail.com