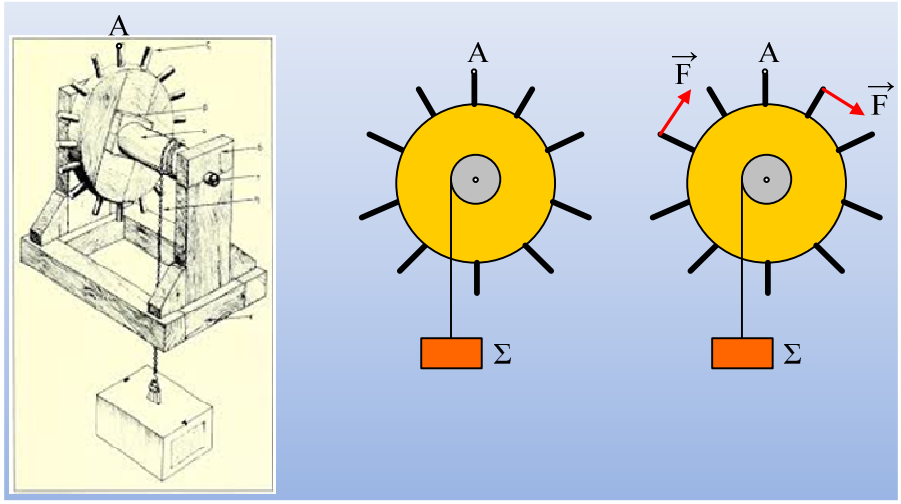
Στροφορμή και Ενέργεια σε ένα βαρούλκο.



Στο παραπάνω σχήμα βλέπετε ένα βαρούλκο, με την βοήθεια του οποίο ανεβάζουμε ένα βαρύ σώμα Σ μάζας 20kg. Δίνονται η ακτίνα του τυμπάνου γύρω από το οποίο τυλίγεται το σχοινί r=10cm, ενώ η ακτίνα του σημείου Α είναι ίση με R=50cm.

Α)Ασκώντας δυο δυνάμεις ίσου μέτρου F=24N, στα άκρα δύο χειρολαβών, κάθετα προς αυτές όπως στο σχήμα, μπορούμε να στρέφουμε το βαρούλκο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=0,1rad/s.

Β) Αν αυξήσουμε τα μέτρα των δύο δυνάμεων στην τιμή F_1=28N, τότε το τύμπανο αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$=4rad/s^2, οπότε τη στιγμή t_1 το σώμα Σ έχει ταχύτητα 0,5m/s.

i) Αν το τύμπανο του βαρούλκου δέχεται σταθερή ροπή λόγω τριβής, από τον άξονα, να υπολογιστεί η τιμή της.

ii) Να βρεθεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του βαρούλκου, ως προς τον άξονα περιστροφής του τυμπάνου τη στιγμή t_1.

iii) Για την παραπάνω στιγμή t_1 να βρεθούν επίσης:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του τυμπάνου.

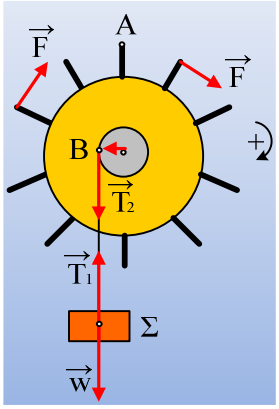
β) Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρουμε ενέργεια στο σύστημα, μέσω των δύο δυνάμεων που ασκούμε.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ και του βαρούλκου.

δ) Ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των τριβών.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Εφόσον το τύμπανο του βαρούλκου στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, το νήμα τυλίγεται με αποτέλεσμα το μήκος του να μειώνεται με σταθερό ρυθμό, οπότε και το σώμα Σ ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα.

Αλλά τότε $\Sigma F_\Sigma=0 \rightarrow T_1=Mg=200N$ συνεπώς και $T_2=200N$, αφού το νήμα ασκεί ίσου μέτρου δυνάμεις στα δυο άκρα του.

Για το βαρούλκο τώρα αφού στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα:

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow 2F\cdot R+\tau_{T\rho}-T_2\cdot r=0 \rightarrow$$

$$\tau_{T\rho}= T_2\cdot r-2F\cdot R=200\cdot 0{,}1Nm-2\cdot 24\cdot 0{,}5Nm= -4N\cdot m$$

ii) Αν αυξηθούν τα μέτρα των δυνάμεων, το βαρούλκο θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση και το σώμα Σ θα επιταχυνθεί με φορά προς τα πάνω.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Σ παίρνουμε:

$T_1-Mg=M\alpha$ (1) όπου α η επιτάχυνση του σώματος Σ.

Εφαρμόζοντας εξάλλου το 2ο νόμο για την στροφική κίνηση του βαρούλκου παίρνουμε:

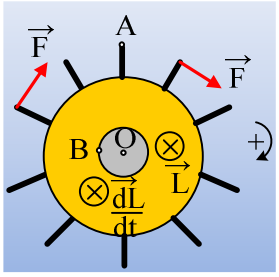
$$F_1\cdot R+F_1\cdot R-T_2\cdot r+\tau_{T\rho} = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά αφού το νήμα θεωρείται αβαρές $T_1=T_2$, ενώ $\upsilon_\Sigma=\upsilon_B=\omega\cdot r \rightarrow$

$$\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt}=\frac{d\upsilon_B}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\cdot r \rightarrow a=a_{\gamma\omega\nu}\cdot r=0{,}4m/s^2$$

Από την (1) βρίσκουμε $T_1=Mg+M\alpha=208N$ και τότε με αντικατάσταση στην (2) βρίσκουμε:

$$I=\frac{2F_1R-T_2r+\tau_{T\rho}}{a_{\gamma\omega\nu}}=\frac{2\cdot 28\cdot 0{,}5-208\cdot 0{,}1-4}{4}kg\cdot m^2=0{,}8kg\cdot m^2$$



Τη στιγμή t_1 το σημείο Β έχει ταχύτητα όση και το σώμα Σ, συνεπώς:

$$\upsilon_B=\omega\cdot r \rightarrow \omega=\frac{\upsilon_B}{r}=\frac{0{,}5}{0{,}1}rad/s=5rad/s$$

Αλλά τότε $L=I\cdot\omega=0{,}8\cdot 5\ kg\cdot m^2/s= 4\ kg\cdot m^2/s$ με διεύθυνση αυτήν του άξονα περιστροφής, που περνά από το σημείο Ο και φορά προς τα μέσα (κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, όπως στο διπλανό σχήμα).

Αντίστοιχα ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} = 0{,}8 \cdot 4kg \cdot m^2 / s^2 = 3{,}2kg \cdot m^2 / s^2$$

Επίσης με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα, πάνω στον άξονα του τυμπάνου.

iii) α) Για το σύστημα σώμα Σ-βαρούλκο έχουμε:

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 2F \cdot R + \tau_{T\rho} - Mg \cdot r = (2 \cdot 28 \cdot 0{,}5 - 4 - 20 \cdot 10 \cdot 0{,}1)kg \cdot m^2 / s^2 = 4kg \cdot m^2 / s^2 .$$

β) Ο ρυθμός παροχής ενέργειας στο σύστημα μέσω των δύο δυνάμεων είναι:

$$\frac{dW_F}{dt} = P_{\tau F} = \tau \cdot \omega = 2F \cdot R \cdot \omega = 2 \cdot 28 \cdot 0{,}5 \cdot 5J / s = 140J / s$$

γ) Για το σώμα Σ:

$$\frac{dK_\Sigma}{dt} = \left(\sum F\right) \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu a = Ma \cdot \upsilon = 20 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5J / s = 4J / s$$

Ενώ για το βαρούλκο:

$$\frac{dK_B}{dt} = \left(\sum \tau\right) \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega = 0{,}8 \cdot 4 \cdot 5J / s = 16J / s$$

δ) Ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική είναι ίσος:

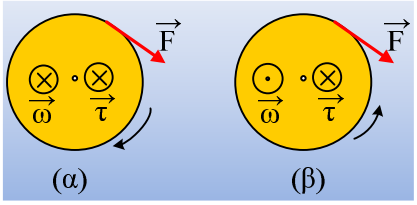
$$\frac{dQ}{dt} = \left|P_{\tau T\rho}\right| = \left|\tau_{T\rho}\right| \cdot \left|\omega\right| = 4 \cdot 5J / s = 20J / s$$

Σχόλια:

1) Τη στιγμή t_1 προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα με ρυθμό 140J/s. Τι γίνεται η ενέργεια αυτή; Ένα μέρος γίνεται κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων με ρυθμό 4J/s+16J/s=20J/s, ενώ ένα άλλο μετατρέπεται σε θερμική μέσω του έργου της τριβής, της οποίας η ισχύς είναι αρνητική ($P_{T\rho}$=-20W).
Τα υπόλοιπα (140-20-20) J/s, τι γίνονται; Μετατρέπονται σε δυναμική ενέργεια του σώματος Σ, το οποίο ανέρχεται, οπότε αυξάνεται η δυναμική του ενέργεια. Πράγματι:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_w}{dt} = -Mg \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = Mg \cdot \upsilon = 100J / s$$

2) Η ισχύς μιας ροπής δεν είναι P=τ·ω, αλλά P=|τ|·|ω|·συνθ, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα της ροπής και της γωνιακής ταχύτητας. Έτσι στο αριστερό σχήμα (α) όπου τα δυο διανύσματα είναι ομόρροπα ισχύει ότι P=τ·ω, αλλά στο σχήμα (β) η ισχύς της ροπής της δύναμης F είναι P=-τ·ω, αφού τα διανύσματα έχουν αντίθετη κατεύθυνση και συν180°=-1.



dmargaris@sch.gr