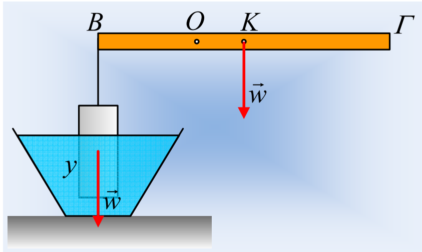
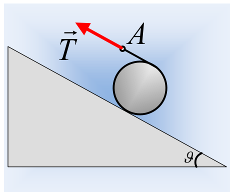
Ο κύλινδρος, η ισορροπία και η επιτάχυνσή του.



Στο διπλανό σχήμα βλέπετε μια ομογενή δοκό ΒΓ, μήκους ℓ και βάρους w, η οποία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο Ο, όπου (ΒΟ)= $\ell/3$. Η δοκός ισορροπεί οριζόντια, ενώ στο άκρο της Β κρέμεται, με τη βοήθεια αβαρούς νήματος, ένας κύλινδρος βάρους επίσης w, με τις βάσεις του οριζόντιες, ο οποίος είναι βυθισμένος σε μια λεκάνη με νερό, κατά y=0,2m.

i) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το νερό στον κύλινδρο, καθώς και την τάση Τ του νήματος που συγκρατεί τον κύλινδρο.

ii) Συγκρατώντας τη δοκό σε οριζόντια θέση, απομακρύνουμε τη λεκάνη με το νερό και σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί. Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του κυλίνδρου.



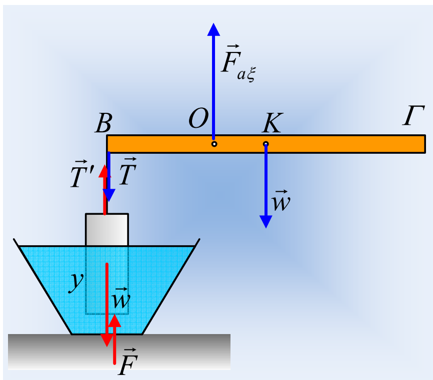
iii) Παίρνουμε τον κύλινδρο αυτόν, τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=30^o$. Ασκούμε στο άκρο Α του νήματος δύναμη παράλληλη στο επίπεδο με μέτρο ίσο με την τάση του νήματος στο i) ερώτημα και αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο να κινηθεί.

α) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής της δύναμης Α.

β) Να βρεθεί η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, τη στιγμή που έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους 0,8m.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας μιας δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_\delta = \frac{1}{12}M\ell^2$, η αντίστοιχη του κυλίνδρου ως τον άξονά του I_κ= ½ MR^2, οι βάσεις του κυλίνδρου έχουν εμβαδόν $A_1=0{,}05m^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000kg/m^3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$. Η δράση της ατμοσφαιρικής πίεσης δεν λαμβάνεται υπόψη.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις σε δοκό και κύλινδρο, όπου F η δύναμη από το νερό.

i) Ο κύλινδρος δέχεται οριζόντιες δυνάμεις από το νερό στην παράπλευρη επιφάνειά του, αλλά από την ισορροπία του θα έχουμε $\Sigma F_x=0$, συνεπώς μένει μόνο η κατακόρυφη δύναμη F που δέχεται στην κάτω έδρα του. Η κάτω έδρα του βρίσκεται σε βάθος y, οπότε στα σημεία της βάσης έχουμε πίεση $p=\rho g y$

και η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο:

$$F = p \cdot A_1 = \rho g y A_1 = 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}05N = 100N$$

Η δοκός ΒΓ ισορροπεί, οπότε $\Sigma\tau_o=0 \rightarrow$

$$T \cdot (BO) - w \cdot (OK) = 0 \rightarrow T \cdot \frac{\ell}{3} - w \cdot \frac{\ell}{6} = 0 \rightarrow T = \frac{w}{2}$$

Αλλά και ο κύλινδρος ισορροπεί, οπότε $\Sigma F_y=0$ ή $T'+F-w=0 \rightarrow$

$$\frac{w}{2} + F = w \rightarrow w = 2F = 200N \text{, όποτε } T=100N=F.$$

Αφού το νήμα είναι αβαρές και Τ=Τ΄.

ii) Μόλις βγάλουμε τον κύλινδρο από το νερό, προφανώς παύει να ασκείται η δύναμη F, ενώ οι άλλες δυνάμεις παραμένουν ως έχουν στο σχήμα, αλλά με διαφορετική τιμή για την τάση του νήματος. Θεωρώντας θετική την αντιωρολογιακή φορά, με εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα, έχουμε:

Δοκός: $\Sigma\tau_o=I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot (BO) + F_{\alpha\xi} \cdot 0 - w \cdot (OK) = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + Md^2\right)a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$$T \cdot \frac{\ell}{3} - w \cdot \frac{\ell}{6} = \frac{1}{9}M\ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 6T - 3Mg = 2M\ell a_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Κύλινδρος: $\Sigma F=M \cdot \alpha \rightarrow Mg-T'=M\alpha$ (2)

Θεωρώντας ότι το νήμα παραμένει τεντωμένο, κάθε σημείο του κινείται με την ίδια επιτάχυνση οπότε η επιτάχυνση του άκρου Β, θα είναι ίση με την επιτάχυνση του κυλίνδρου:

$$\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{3} \quad (3)$$

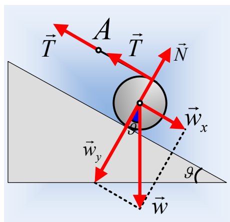
Έτσι η (1) γίνεται $6T - 3Mg = 6Ma \rightarrow T - \frac{Mg}{2} = Ma$ (1^{α})

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1^{α}) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{Mg}{2} = 2Ma \rightarrow a = \frac{g}{4} = 2{,}5m/s^2.$$

Η παραπάνω τιμή επιβεβαιώνει ότι το νήμα μένει τεντωμένο, αφού σε αντίθετη περίπτωση ο κύλινδρος θα έκανε ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση g*.

iii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, όταν αφεθεί στο λείο κεκλιμένο επίπεδο, όπου εφαπτομενικά μέσω του νήματος ασκείται η τάση δύναμη που ασκούμε, μέτρου $T = \frac{w}{2}$. Με εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου, θεωρώντας την κίνηση του κυλίνδρου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική παίρνουμε:

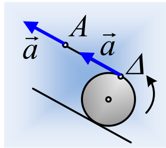


Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow T-w_x=M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow$ $w/2 = w \cdot \eta\mu\vartheta = Ma_{cm} \rightarrow \alpha_{cm}=0$

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_{cm}=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R= ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \frac{Mg}{2}R=\frac{1}{2}MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$$Ra_{\gamma\omega\nu}=g=10m/s^2.$$

α) Βλέπουμε λοιπόν ότι τελικά ο κύλινδρος δεν κάνει μεταφορική κίνηση, παρά μόνο στροφική, οπότε το σημείο επαφής Δ του νήματος με τον κύλινδρο, έχει εφαπτομενική επιτάχυνση ίση με την επιτρόχια επιτάχυνση, η οποία είναι και ίση με την επιτάχυνση του άκρου Α. Αλλά τότε:

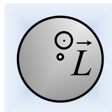


$$a_A=a=Ra_{\gamma\omega\nu}=g=10m/s^2.$$

β) Το άκρο Α του νήματος κινείται με σταθερή επιτάχυνση, οπότε για την μετατόπισή του, ίση με το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται ισχύει:

$$\Delta x_A=\Delta\ell=\frac{1}{2}at^2 \rightarrow t=\sqrt{\frac{2(\Delta\ell)}{a}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}8}{10}}s=0{,}4s$$

Οπότε η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, είναι ένα διάνυσμα πάνω στον άξονα περιστροφής, με φορά προς τα έξω (σχήμα) και μέτρο:



$$L=I\omega=\frac{1}{2}MR^2\omega=\frac{1}{2}MR(R\omega)=\frac{1}{2}MR\upsilon_A=\frac{1}{2}MR\cdot at$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι w=Mg και $A_1=\pi R^2$, παίρνουμε:

$$L=\frac{1}{2}\frac{w}{g}\cdot\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}\cdot gt=\frac{1}{2}w\cdot\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}\cdot t=\frac{1}{2}200\sqrt{\frac{0{,}05}{3{,}14}}\cdot 0{,}4kgm^2/s\approx 5kgm^2/s$$

Σχόλια.

1) Η δύναμη F που ασκείται στον κύλινδρο από το νερό ονομάζεται Άνωση και θα μπορούσε να υπολογιστεί απευθείας από την εξίσωση $A=\rho g V_{\beta\upsilon\theta}$, όπου $V_{\beta\upsilon\theta}$ ο βυθισμένος όγκος του κυλίνδρου.

2) Στο ii) ερώτημα θα μπορούσαμε να κάνουμε την αντίθετη υπόθεση, δηλαδή ότι το νήμα χαλαρώνει, με αποτέλεσμα να μηδενίζεται η τάση. Για να συμβαίνει κάτι τέτοιο, θα έπρεπε η επιτάχυνση του άκρου Β να ήταν μεγαλύτερη της επιτάχυνσης του κυλίνδρου, που θα ήταν ίση με g και με φορά προς τα κάτω. Αλλά τότε από την (1) θα είχαμε $-3Mg=2M\ell a_{\gamma\omega\nu}$ πράγμα που σημαίνει ότι το άκρο Β επιταχύνεται προς τα πάνω, ενώ ο κύλινδρος προς τα κάτω και το νήμα αντί να χαλαρώνει… τεντώνεται.

dmargaris@gmail.com