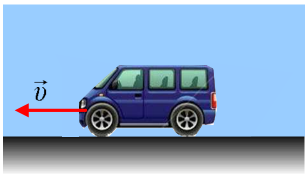
Οι αλγεβρικές τιμές και η επαγωγή

Ας δούμε, μέσω κάποιων παραδειγμάτων τι συμβαίνει με τις αλγεβρικές τιμές φυσικών μεγεθών, αλλά και τι συμβάσεις κάνουμε συνήθως, άλλοτε φανερές και άλλοτε «σιωπηλές».

Παράδειγμα 1ο:



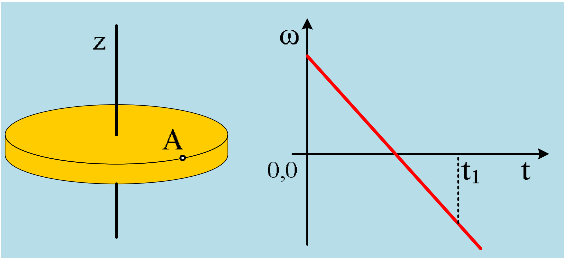
Ένα αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο όπως στο σχήμα, με ταχύτητα μέτρου 10m/s. Μας ζητάνε την τιμή της ταχύτητας. Αυτή είναι:

i) υ=+2m/s, ii) υ=-2m/s, iii) Το ένα ή το άλλο…

Η σωστή απάντηση είναι η iii) Για να αποδώσουμε μια (αλγεβρική) τιμή στην ταχύτητα, πρέπει προηγούμενα να πάρουμε ότι η κίνηση πραγματοποιείται πάνω σε έναν προσανατολισμένο άξονα (έστω x) και να ορίσουμε μια κατεύθυνση ως θετική. Αν πάρουμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, τότε το αυτοκίνητο έχει ταχύτητα υ=-2m/s, αν όμως πάρουμε την προς τα αριστερά κατεύθυνση ως θετική, τότε υ=+2m/s.

Συνήθως βέβαια, παίρνουμε σιωπηλά ως θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση (συμμορφούμενοι σε μια σύμβαση), οπότε απαντάμε ότι υ=-2m/s, χωρίς άλλες διευκρινήσεις.

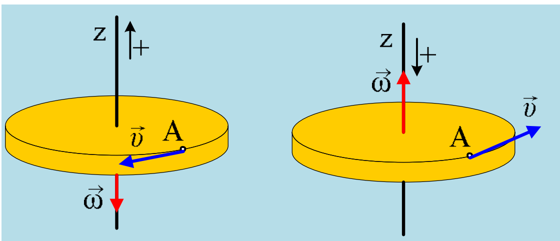
Παράδειγμα 2ο:



Ο δίσκος του διπλανού σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z και στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γωνιακή του ταχύτητα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Να σχεδιαστεί το διάνυσμα της (γραμμικής) ταχύτητας του σημείου Α, τη χρονική στιγμή t_1.

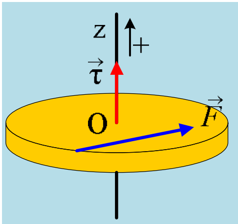
Όπως έχει τεθεί το ερώτημα, δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε διάνυσμα ταχύτητας του Α, αφού δεν γνωρίζουμε την φορά περιστροφής του δίσκου. Δεν έχει οριστεί θετική φορά για την γωνιακή ταχύτητα, για να ξέρουμε τη στιγμή t_1, πώς περιστρέφεται. Έτσι έχουμε δύο περιπτώσεις:



Η θετική φορά να είναι προς τα πάνω. Τότε τη στιγμή t_1, ο δίσκος στρέφεται όπως στο πρώτο σχήμα και η ταχύτητα του Α είναι αυτή που έχει σχεδιαστεί, εφαπτόμενη στον κύκλο. Αντίθετα αν η θετική φορά είναι προς τα κάτω, τότε η γωνιακή ταχύτητα έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο 2^o σχήμα και η ταχύτητα του σημείου Α είναι επίσης όπως στο αντίστοιχο σχήμα.

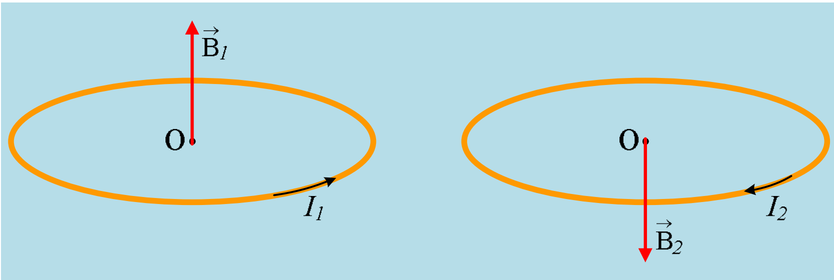
Στην πράξη βέβαια, αν δεν μας έχουν ορίσει τη θετική φορά, παίρνουμε την «προσυμφωνημένη», αυτή που έχει φορά προς τα πάνω. Έτσι όταν έχουμε γωνιακή ταχύτητα προς τα πάνω, ο δίσκος στρέφεται αντίθετα από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και αυτή η φορά περιστροφής θεωρείται θετική…

Το ίδιο συμβαίνει και όταν μιλάμε για ροπές. Μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε ροπή ως θετική, αλλά συνήθως θεωρούμε τη ροπή της δύναμης ως προς το σημείο Ο του διπλανού σχήματος, που έχει φορά προς τα πάνω, ως θετική. Η ροπή αυτή τείνει να περιστρέψει το δίσκο «αριστερόστροφα» ή αλλιώς αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.



Παράδειγμα 3ο :

Έστω τώρα οι δυο οριζόντιοι κυκλικοί αγωγοί, του παρακάτω σχήματος, οι οποίοι διαρρέονται από ρεύματα με αντίθετες φορές, δημιουργώντας τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία έντασης B_1 και B_2, στο κέντρο τους.

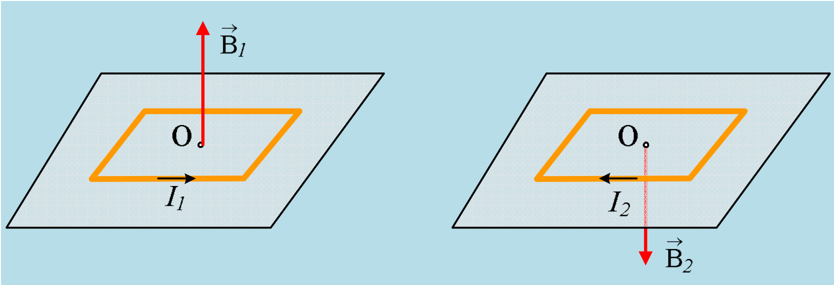


Μπορούμε να μιλήσουμε μόνο για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, αν όμως θελήσουμε να μιλήσουμε για αλγεβρικές τιμές, μπορούμε να ορίσουμε μια κατεύθυνση ως θετική. Ας κάνουμε το σύνηθες. Να πάρουμε τα θετικά προς τα πάνω. Τότε οι δύο εντάσεις είναι αντίθετες με τιμές π.χ. B_1=+0,1Τ και B_2=-0,1Τ.

Αλλά αν το κάνουμε αυτό, τότε θα πρέπει να αποδεχθούμε ότι μπορούμε να περιγράψουμε και τις δύο εντάσεις του ρεύματος με το (+) και το (-), όπου I_1=+2 Α και I_2= - 2 Α.

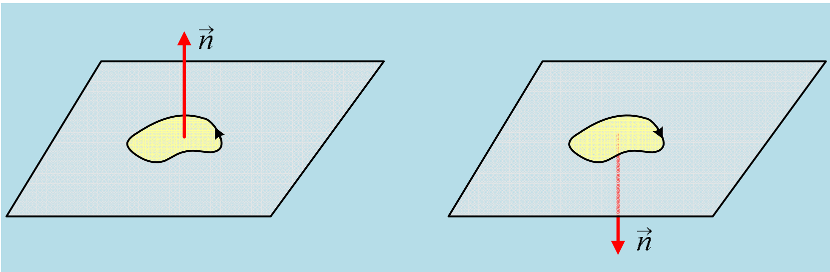
Μπορούμε να διακρίνουμε την ομοιότητα με την φορά περιστροφής και το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας του προηγούμενου παραδείγματος; Τυχαίο λέτε; Και όμως τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (ή του δεξιού χεριού) χρησιμοποιούμε και στις δύο περιπτώσεις, αφού από πίσω «κρύβεται» ένα εξωτερικό γινόμενο…

Όμως γιατί να περιοριστούμε σε κυκλικό αγωγό; Και σε ένα αγωγό σχήματος π.χ. ορθογωνίου, η κατάσταση είναι απολύτως όμοια. Μπορούμε να ορίσουμε μια κατεύθυνση ως θετική, ορίζοντας ταυτόχρονα θετική και μια ορισμένη φορά του ηλεκτρικού ρεύματος.



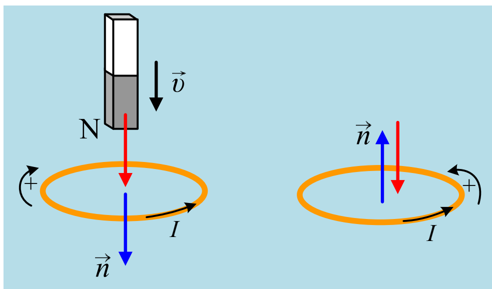
Παράδειγμα 4ο:

Τη λογική του τελευταίου παραδείγματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε την κάθετη σε μια επιφάνεια. Αν σε προβλήματα, όπως η μαγνητική ροή, μας χρειάζεται η κάθετη στην επιφάνεια, ορίζουμε ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με φορά που θα προκύψει με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία ή του δεξιού χεριού, διαγράφοντας περιμετρικά την επιφάνειά μας.



Έτσι αναφερόμενοι στην τυχαίου σχήματος επίπεδη επιφάνεια με κίτρινο χρώμα, αν την διαγράψουμε περιμετρικά με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού (θετική φορά διαγραφής) παίρνουμε την κάθετη προς την επιφάνεια με φορά προς τα πάνω, όπως στο πρώτο σχήμα, ενώ το αντίθετο δείχνεται στο δεύτερο σχήμα.

Έτσι κάθε επιφάνεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως και κάθε άλλο διάνυσμα στη μαθηματική μελέτη κάποιου θέματος.



Ας το δούμε να εφαρμόζεται στην επαγωγή με την πτώση ενός μαγνήτη, όπως στο σχήμα, ο οποίος πλησιάζει έναν οριζόντιο κυκλικό αγωγό.

Η ένταση του πεδίου του μαγνήτη, προς το μέρος του κυκλικού αγωγού, είναι προς τα κάτω.

- Μπορούμε να πάρουμε τα θετικά προς τα κάτω, όπως στο πρώτο σχήμα, οπότε έχουμε φορά θετικής διαγραφής, τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Τότε καθώς πλησιάζει ο μαγνήτης:

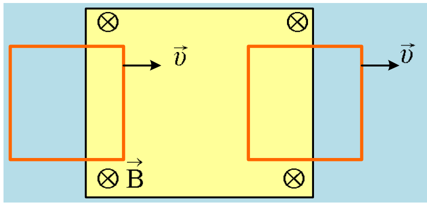
  $B\uparrow$ και $\Phi > 0$, οπότε $d\Phi>0 \rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} < 0 \rightarrow I<0$, δηλαδή η ένταση του ρεύματος έχει αντίθετη φορά από την φορά που ορίσαμε ως θετική.

- Ας πάρουμε τώρα τα θετικά προς τα πάνω, όπως στο δεύτερο σχήμα, οπότε η φορά διαγραφής είναι η αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Τότε καθώς πλησιάζει ο μαγνήτης, θα έχουμε:

B↑ και $\Phi < 0$, οπότε $d\Phi < 0 \rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} > 0 \rightarrow I > 0$, δηλαδή η ένταση του ρεύματος θα έχει την ίδια φορά, με αυτήν που ορίσαμε ως θετική.

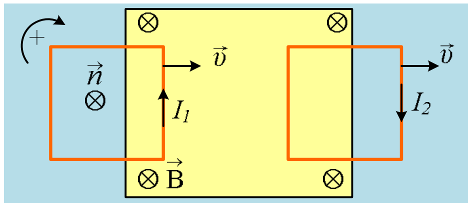
Τέλος ας δούμε την περίπτωση ενός πλαισίου το οποίο διέρχεται από ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Παράδειγμα 5ο:



Στο σχήμα ένα συρμάτινο πλαίσιο περνά από το ομογενές μαγνητικό πεδίο του σχήματος και θέλουμε να βρούμε την φορά της έντασης του ρεύματος, κατά την είσοδο και κατά την έξοδο από το πεδίο.

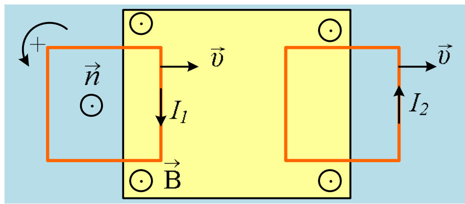
Πρέπει πρώτα να ορίσουμε την κάθετη στο πλαίσιο, χωρίς να ξεχνάμε ότι έχουμε απόλυτη ελευθερία επιλογής. Δεν χρειάζεται όμως, ούτε να κάνουμε τα εύκολα δύσκολα, ούτε να πρωτοτυπήσουμε.



Είναι βολικό να πάρουμε την κάθετη να έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση του πεδίου, δηλαδή να έχει φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα. Κάνοντάς το όμως, στην πραγματικότητα ορίσαμε και την φορά διαγραφής του πλαισίου που θα πάρουμε ως θετική και αυτή είναι η φορά των δεικτών του ρολογιού.

Στη διάρκεια της εισόδου: Φ>0 και το dΦ>0 $\rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} < 0 \rightarrow I_1 < 0$, δηλαδή το ρεύμα έχει φορά αντίθετη, από αυτήν που πήραμε ως θετική, όπως στο σχήμα.

Στη διάρκεια της εξόδου: Φ>0 και dΦ <0 $\rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} > 0 \rightarrow I_2 > 0$, δηλαδή το ρεύμα έχει φορά ίδια με αυτήν που πήραμε ως θετική, όπως στο σχήμα.



Και αν είχαμε το διπλανό σχήμα, όπου η ένταση του πεδίου είχε φορά προς τα έξω; Θα παίρναμε και μεις την κάθετο να έχει φορά προς τα έξω, ορίζοντας ουσιαστικά φορά θετικής διαγραφής, την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Αλλά τότε θα είχαμε:

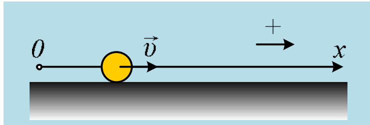
Στη διάρκεια της εισόδου: Φ>0 και το dΦ>0 $\rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} < 0 \rightarrow I_1 < 0$, δηλαδή το ρεύμα έχει φορά αντίθετη, από αυτήν που πήραμε ως θετική, όπως στο σχήμα.

Στη διάρκεια της εξόδου: Φ>0 και dΦ <0 $\rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} > 0 \rightarrow I_2 > 0$, δηλαδή το ρεύμα έχει φορά ίδια με αυτήν που πήραμε ως θετική, όπως στο σχήμα.

Μπορεί κάποιος να θεωρήσει ότι αυτά είναι «δύσκολα στην εφαρμογή τους» ή «παράλογα». Και όμως είναι αυτό που κάνουμε από την Α΄ Λυκείου, όταν μελετάμε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου

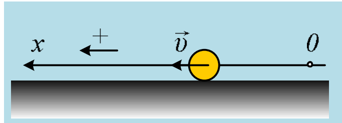
3m/s.

Αν το κινητό κινείται προς τα δεξιά, παίρνουμε τα θετικά προς τα δεξιά και γράφουμε:



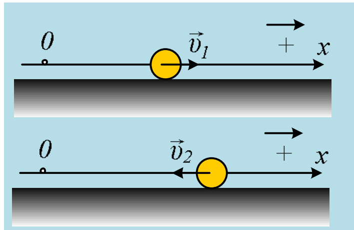
$$\Delta x=\upsilon\cdot t=3t \ \ (S.I)$$

Αν το κινητό κινείται προς τα αριστερά, ορίζουμε τα θετικά προς τα αριστερά και γράφουμε ξανά:

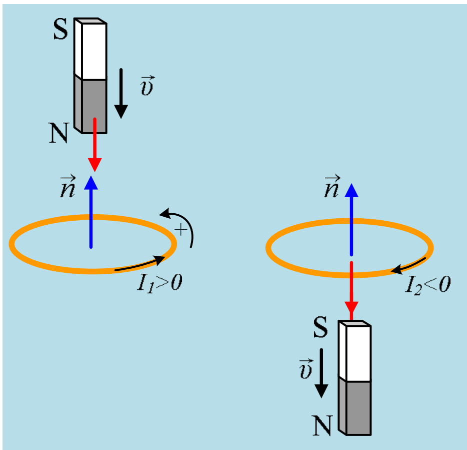


$$\Delta x=\upsilon\cdot t=3t \ \ (S.I.)$$

Βέβαια αν το κινητό κινείται προς τα δεξιά και κάποια στιγμή αλλάζει φορά κινούμενο προς τα αριστερά, τότε είμαστε υποχρεωμένοι να πάρουμε μια κατεύθυνση ως θετική και να δουλέψουμε και τι δύο κινήσεις παίρνοντας θετική (πάνω) και αρνητική ταχύτητα (κάτω σχήμα).



Το ίδιο συμβαίνει και με την πτώση του μαγνήτη, αν δεν περιοριστούμε στο πλησίασμα αλλά μελετάμε και την απομάκρυνσή του από τον κυκλικό αγωγό…



dmargaris@gmail.com