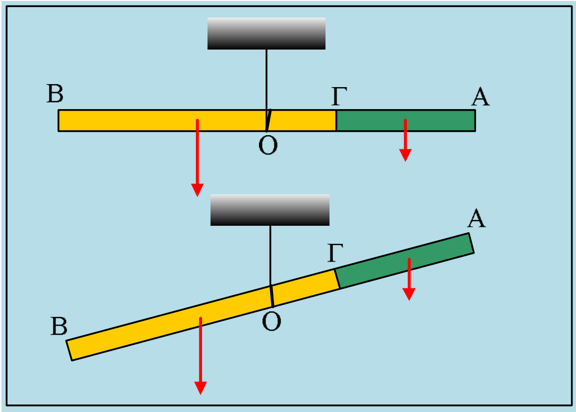
Μια ισορροπία δύο ράβδων



Δύο λεπτές ομογενείς ράβδοι με μήκη (ΑΓ)=ℓ και (ΒΓ)=2ℓ συγκολλούνται στο κοινό άκρο τους Γ, δημιουργώντας ένα στερεό s. Οι δυο ράβδοι ΑΓ και ΒΓ έχουν βάρη w και 2w αντίστοιχα. Το στερεό s ισορροπεί σε οριζόντια θέση, κρεμασμένο από νήμα που έχει δεθεί στο σημείο Ο, όπως στο πάνω σχήμα.

i) Η απόσταση (ΟΓ) είναι ίση με:

α) (ΟΓ)= ¼ ℓ, β) (ΟΓ)= 1/3 ℓ,

γ) (ΟΓ)= ½ ℓ, δ) (ΟΓ)= ℓ.

ii) Να μελετηθεί η ισορροπία της ράβδου ΑΓ.

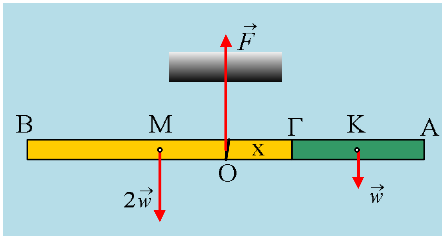
iii) Εκτρέπουμε το στερεό s, όπως δείχνει το κάτω σχήμα και το αφήνουμε να κινηθεί. Τότε το στερεό s:

α) Θα επιστρέψει ξανά σε οριζόντια θέση.

β) Θα περιστραφεί αυξάνοντας τη γωνία που σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση.

γ) Θα ισορροπήσει στην θέση που θα αφεθεί.

Απάντηση:

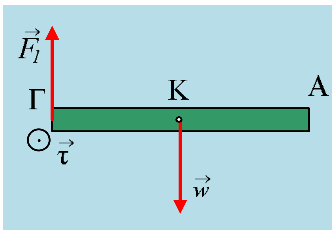


i) Το στερεό s ισορροπεί με τις ράβδους οριζόντιες, ενώ πάνω του ασκούνται οι δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου $\vec{F}$ η τάση του νήματος. Αν x η απόσταση ΟΓ, παίρνουμε από την ισορροπία του στερεού (Τα Μ και Κ τα μέσα των δύο ράβδων):

$$\Sigma\tau_O=0 \;\rightarrow 2w\cdot(\ell-x)-w\cdot\left(\frac{\ell}{2}+x\right)=0\;\rightarrow$$

$$2\ell-2x=\frac{\ell}{2}+x\rightarrow x=\frac{\ell}{2}$$

Σωστό το γ)

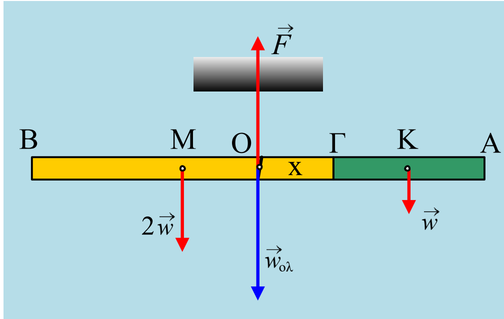


ii) Η ράβδος ΓΑ δέχεται δύο δυνάμεις, το βάρος $\vec{w}$ και μια δύναμη $\vec{F}_1$ από την άλλη ράβδο ΒΓ. Αφού ισορροπεί θα πρέπει $\Sigma\vec{F}=0$, συνεπώς και η δύναμη $\vec{F}_1$ είναι κατακόρυφη, με μέτρο F_1=w. Αλλά από την ισορροπία της επίσης προκύπτει ότι Στ=0 ως προς οποιοδήποτε σημείο. Αν λοιπόν πάρουμε τις ροπές ως προς το άκρο Γ της ράβδου, θα έχουμε $\Sigma\tau_\Gamma$=0. Αλλά αφού η μοναδική ροπή δύναμης είναι η ροπή του βάρους, θα πρέπει η ράβδος να δέχεται επιπλέον της δύναμης $\vec{F}_1$ και μια ροπή ζεύγους $\vec{\tau}$ από την ράβδο ΒΓ, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\Sigma\tau_\Gamma=0\rightarrow\tau-w\cdot\frac{\ell}{2}\rightarrow\tau=w\cdot\frac{\ell}{2}$$

Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί το διάνυσμα της ροπής του ζεύγους $\vec{\tau}$ κάθετο στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα έξω.

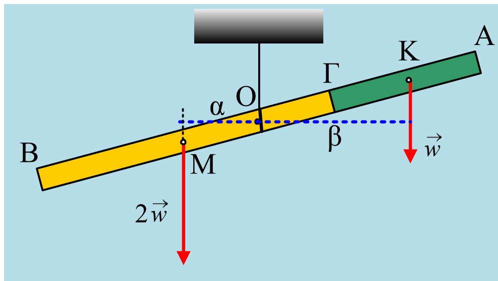
iii) Από την ισορροπία του i) ερωτήματος, προκύπτει ότι το βάρος του στερεού s, ίσο με 3w, περνά από το σημείο πρόσδεσης O, συνεπώς το κέντρο μάζας του στερεού βρίσκεται στην κατακόρυφο που περνά από το O. (Συνήθως θεωρώντας αμελητέου πάχους τις ράβδους παίρνουμε το σημείο O ως το κέντρο μάζας του στερεού, όπως παίρνουμε το σημείο M ως το κ.μ. της ράβδου ΒΓ και το Κ ως το κ.μ. της ΓΑ).



Αλλά τότε, όποια εκτροπή και να προκαλέσουμε στη ράβδο, ξανά το O θα είναι το κέντρο μάζας της, οπότε μπορούμε να βλέπουμε μόνο το ολικό βάρος $w_{ολ}$ και την τάση του νήματος, οι ροπές των οποίων ως προς το O είναι μηδενικές και το στερεό θα ισορροπήσει χωρίς να περιστραφεί. Σωστό το γ).

Σχόλιο:

Βέβαια θα μπορούσαμε να πάρουμε τις ροπές των δύο βαρών στην τυχαία θέση, οπότε με βάση το διπλανό σχήμα, θα έχουμε:



$$\Sigma\tau_o = 2w \cdot a - w \cdot \beta \ \rightarrow$$

$$\Sigma\tau_o = 2w \cdot (OM)\sigma\upsilon\nu\theta - w \cdot (OK)\sigma\upsilon\nu\theta \ \rightarrow$$

$$\Sigma\tau_o = 2w \cdot \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta - w \cdot \ell\sigma\upsilon\nu\theta = 0$$

Πράγμα που επίσης αποδεικνύει ότι η ράβδος θα παραμείνει στη θέση που θα αφεθεί, χωρίς να περιστραφεί.

dmargaris@gmail.com