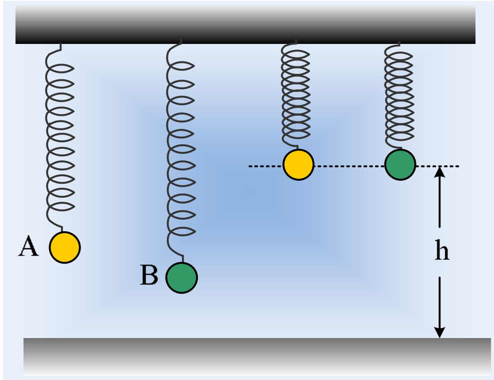
Μετά από δυο ελαστικές κρούσεις!



Δυο μικρές σφαίρες Α και Β με ίσες (μικρές) ακτίνες ηρεμούν όπως στο σχήμα (αριστερά στο σχήμα), στα κάτω άκρα δύο όμοιων ιδανικών ελατηρίων, τα πάνω άκρα των οποίων έχουν στερεωθεί στο ταβάνι ενός δωματίου. Μετακινούμε κατακόρυφα προς τα πάνω τις δυο σφαίρες, μέχρι να φτάσουν σε ύψος h, από το δάπεδο και σε μια στιγμή t=0, τις αφήνουμε ταυτόχρονα να κινηθούν, εκτελώντας αατ.

i) Ποια σφαίρα έχει μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης;

ii) Ποια σφαίρα θα έχει μεγαλύτερη περίοδο ταλάντωσης;

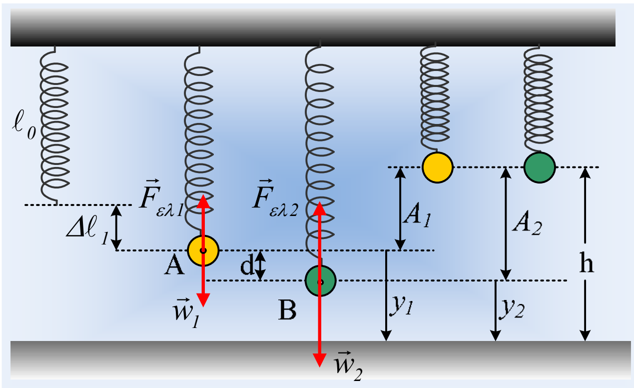
iii) Αν οι σφαίρες συγκρούονται ελαστικά με το δάπεδο, ποια σφαίρα θα έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, αμέσως μετά την κρούση;

Απάντηση:

Τα δυο ελατήρια είναι όμοια, συνεπώς θα έχουν την ίδια σταθερά k και το ίδιο φυσικό μήκος. Αλλά τότε με βάση το παρακάτω σχήμα, η σφαίρα Β προκαλεί μεγαλύτερη επιμήκυνση ($\Delta\ell_2 > \Delta\ell_1$), αφού $\Delta\ell_2 = \Delta\ell_1 + d$, όπου d η αρχική κατακόρυφη απόσταση των δυο σφαιρών. Από την ισορροπία εξάλλου, κάθε σφαίρας, έχουμε ότι:

$$\Sigma F=0 \rightarrow mg=k\cdot \Delta\ell$$

Οπότε η σφαίρα Β, η οποία προκαλεί μεγαλύτερη επιμήκυνση θα έχει και μεγαλύτερη μάζα ($m_2>m_1$).



Εξάλλου, με βάση το παραπάνω σχήμα, αν A_1 είναι το πλάτος ταλάντωσης της Α σφαίρας, τότε η Β θα ταλαντωθεί με πλάτος $A_2=A_1+d$. Με βάση αυτά:

i) Μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης έχει η Β σφαίρα, αφού $A_2>A_1$ και η ενέργεια ταλάντωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

ii) Η περίοδος ταλάντωσης κάθε σώματος δίνεται από την εξίσωση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Αλλά τότε αφού $m_2>m_1$ η Β σφαίρα θα έχει και μεγαλύτερη περίοδο ταλάντωσης.

iii) Έστω ότι η σφαίρα Α φτάσει στο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου υ_1. Αφού η κρούση είναι ελαστική, ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου $\upsilon_1{'}=\upsilon_1$. Πράγμα που σημαίνει ότι και η κινητική της ενέργεια μετά την κρούση, είναι ίση με αυτήν πριν την κρούση ($K_1{'}= K_1$). Όμως από τη διατήρηση ενέργειας για την ταλάντωσή της παίρνουμε:

$$E_\tau=K+U \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}ky_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \rightarrow$$

$$K_1' = K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 - \frac{1}{2}ky_1^2 \quad (1)$$

Με την ίδια λογική έχουμε επίσης:

$$K_2' = K_2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}kA_2^2 - \frac{1}{2}ky_2^2 \quad (2)$$

Όμως με βάση τα προηγούμενα:

$$\frac{1}{2}kA_2^2 > \frac{1}{2}kA_1^2 \quad (3)$$

Ενώ με βάση το παραπάνω σχήμα $y_1=y_2+d$ οπότε $y_1 > y_2$ συνεπώς:

$$\frac{1}{2}ky_1^2 > \frac{1}{2}ky_2^2 \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}ky_2^2 > -\frac{1}{2}ky_1^2 \quad (4)$$

Με πρόσθεση των (3) και (4) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}kA_2^2 - \frac{1}{2}ky_2^2 > \frac{1}{2}kA_1^2 - \frac{1}{2}ky_1^2 \rightarrow$$

$$K_2' > K_1'$$

Σχόλιο:

Αν αφήναμε στην άκρη τις μαθηματικές εξισώσεις, με βάση το σχήμα, η σφαίρα Β έχει μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης. Τη στιγμή της κρούσης δε, βρίσκεται πιο κοντά στη θέση ισορροπίας της. Συνεπώς έχει μικρότερη δυναμική ενέργεια, από την αντίστοιχη της Α σφαίρας. Αλλά τότε θα έχει, πολύ περισσότερο, μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από την Α.

dmargaris@gmail.com