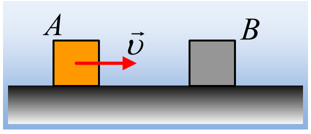
Η απόσταση δύο σωμάτων μετά την κρούση.



Ένα σώμα Α, μάζας m_1=1kg, κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα Β που ήταν ακίνητο. Ελάχιστα πριν την κρούση το σώμα Α έχει ταχύτητα υ_1=4m/s, ενώ κατά την κρούση το 75% της κινητικής του ενέργειας, μεταφέρεται στο Β σώμα.

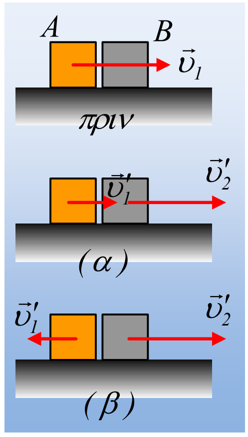
i) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του σώματος Α στη διάρκεια της κρούσης.

ii) Πόση είναι η μάζα του Β σώματος;

iii) Αν τα δυο σώματα παρουσιάζουν με το επίπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,2, να γίνει η γραφική παράσταση της μεταξύ τους απόστασης, σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά την κρούση.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



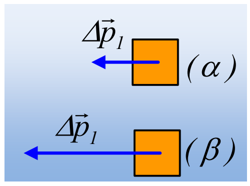
i) Αφού το σώμα Α χάνει το 75% της κινητικής του ενέργειας, θα έχει μετά την κρούση το υπόλοιπο 25% της αρχικής του ενέργειας:

$$K_1' = \frac{25}{100}K_1 \rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$|\upsilon_1'| = \frac{1}{2}|\upsilon_1| = 2m/s$$

Αλλά η τελική ταχύτητα, αφού η κρούση είναι κεντρική, έχει την ίδια διεύθυνση με την αρχική ταχύτητα, αλλά με δύο δυνατά ενδεχόμενα. Είτε το σώμα συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά, είτε επιστρέφει κινούμενο προς τα αριστερά, όπως στο διπλανό σχήμα.

Έτσι για τη μεταβολή της ορμής του Α σώματος:



α) Αν υ_1'=2m/s, τότε: $\Delta p_1=m_1\upsilon_1'-m_1\upsilon_1=2kg\cdot m/s-4kg\cdot m/s=-2kg\cdot m/s$.

β) Αν υ_1'= - 2m/s, τότε: $\Delta p_1=m_1\upsilon_1'-m_1\upsilon_1=-2kg\cdot m/s-4kg\cdot m/s=-6kg\cdot m/s$.

ii) Για την ελαστική κρούση των σωμάτων ισχύει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$$

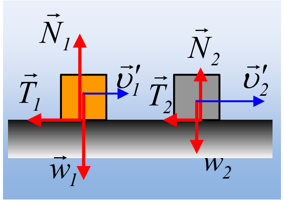
Αλλά θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση έχουμε:

α) $2 = \frac{1-m_2}{1+m_2}4 \rightarrow 1+m_2 = 2-2m_2 \rightarrow m_2 = \frac{1}{3}kg$ και

β) $-2 = \frac{1-m_2}{1+m_2}4 \rightarrow -1-m_2 = 2-2m_2 \rightarrow m_2 = 3kg$

iii) Ας δούμε τώρα σε καθεμιά από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις τι έχουμε:

α) Με αντικατάσταση στην 2η εξίσωση $m_2 = \frac{1}{3}$ kg παίρνουμε:



$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 1}{1+\frac{1}{3}}4m/s = 6m/s$$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, οπότε:

$\Sigma F_{1y}=0 \rightarrow N_1=m_1g$, οπότε $T_1=\mu m_1 g$, ενώ $\Sigma F_x = m_1\alpha_1 \rightarrow \alpha_1=-\mu g=-2m/s^2$.

$\Sigma F_{2y}=0 \rightarrow N_2=m_2g$, οπότε $T_2=\mu m_2 g$, ενώ $\Sigma F_x = m_2\alpha_2 \rightarrow \alpha_2=-\mu g=-2m/s^2$.

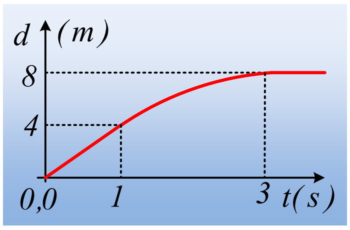
Συνεπώς και τα δυο σώματα κινούνται προς τα δεξιά εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη) κίνηση. Αν θέσουμε x=0 τη θέση κρούσης, θα έχουμε:

Σώμα Α	*Σώμα Β.*
$\upsilon_1=\upsilon_{01}+\alpha_1 t \rightarrow$ $\upsilon_1=2-2t$ (S.I.) (1)	$\upsilon_2=\upsilon_{02}+\alpha_2 t \rightarrow$ $\upsilon_2=6-2t$ (S.I.) (3)
$x_1=\upsilon_{01}t + ½\ \alpha_1 t^2 \rightarrow$ $x_1=2t-t^2$ (S.I.) (2)	$x_2=\upsilon_{02}t + ½\ \alpha_2 t^2 \rightarrow$ $x_2=6t-t^2$ (S.I.) (4)

Εξάλλου με αντικατάσταση στις (1) και (3) μπορούμε να βρούμε πότε σταματά κάθε σώμα την κίνησή του, θέτοντας υ=0:

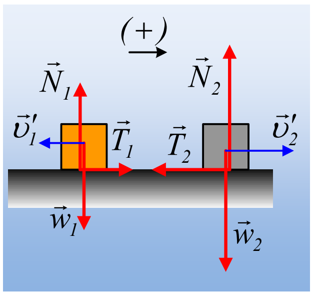
Από (1): $0=2-2t_1 \rightarrow t_1=1s$ και από (3): $0=6-2t_2 \rightarrow t_2=3s$. Αλλά τότε η απόσταση d, κάθε στιγμή, των δύο σωμάτων (θεωρούνται υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων) είναι:

$$d=\begin{cases} x_2-x_1=6t-t^2-2t+t^2=4t \quad (S.I.) \quad \text{για } 0\le t\le 1s \\ x_2-x_{1o\lambda}=6t-t^2-2\cdot 1+1^2=6t-t^2-1 \ (S.I.) \quad \text{για } 1s < t \le 3s \\ x_{2o\lambda}-x_{1o\lambda}= 6t-t^2-1=(6\cdot 3-3^2-1)m=8m \quad \text{για } t > 3s. \end{cases}$$



Και η γραφική παράσταση, είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

β) Με αντικατάσταση στην 2η εξίσωση m_2= 3 kg παίρνουμε:



$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 1}{1+3}4m/s = 2m/s$$

οπότε με την ίδια λογική θα έχουμε:

$T_1=\mu m_1 g$, ενώ $\Sigma F_x = m_1\alpha_1 \rightarrow \alpha_1=\mu g=+2m/s^2$.

$T_2=\mu m_2 g$, ενώ $\Sigma F_x = m_2\alpha_2 \rightarrow \alpha_2=-\mu g=-2m/s^2$.

Συνεπώς και τα δυο σώματα κινούνται εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη) κίνηση.

Αν θέσουμε x=0 τη θέση κρούσης, θα έχουμε:

Σώμα Α	***Σώμα Β.***
$\upsilon_1=\upsilon_{01}+\alpha_1 t \rightarrow$ $\upsilon_1=-2+2t$ (S.I.) (5)	$\upsilon_2=\upsilon_{02}+\alpha_2 t \rightarrow$ $\upsilon_2=2-2t$ (S.I.) (7)
$x_1=\upsilon_{01}t + ½\, \alpha_1 t^2 \rightarrow$ $x_1=-2t + t^2$ (S.I.) (6)	$x_2=\upsilon_{02}t + ½\, \alpha_2 t^2 \rightarrow$ $x_2=2t - t^2$ (S.I.) (8)

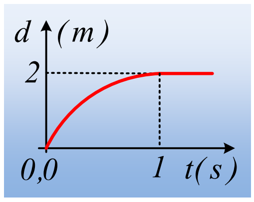
Αλλά τότε θέτοντας υ=0 στην (5): $0=-2+2t_1 \rightarrow t_1=1s$ και από (7): $0=2-2t_2 \rightarrow t_2=1s$. Πράγμα που σημαίνει ότι τα δυο σώματα σταματούν ταυτόχρονα. Αλλά τότε η απόσταση d, κάθε στιγμή, των δύο σωμάτων είναι:

$$d= x_2-x_1=2t-t^2-(-2t + t^2)=4t-2t^2 \text{ (S.I.) για } 0s \le t \le 1s,$$

ενώ μόλις σταματήσουν, θα απέχουν πλέον σταθερή απόσταση:

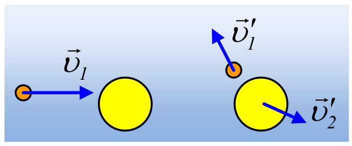
$$d=4t-2t^2=4m-2m=2m$$

και η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.



Σχόλια:

1) Όταν χρησιμοποιούμε την κινητική ενέργεια για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος, αυτό που βρίσκουμε είναι το μέτρο της ταχύτητας και όχι την αλγεβρική της τιμή. Έτσι παραπάνω γράψαμε $|\upsilon_1'| = \frac{1}{2}|\upsilon_1| = 2m/s$ και όχι $\upsilon_1'=\pm 2m/s$. Δεν υπολογίζουμε την τιμή της ταχύτητας, άσχετα αν εδώ η ταχύτητα μπορεί να έχει συγκεκριμένη διεύθυνση και στη συνέχεια μπορούμε να μιλήσουμε και για την αλγεβρική της τιμή. Για παράδειγμα, δείτε την παραπάνω κρούση…



2) Ξέρω θα «φαινόταν» πολύ ευκολότερη η λύση στο iii) ερώτημα, αν μιλάγαμε για μια επιβραδυνόμενη κίνηση και υπολογίζαμε $t=\frac{\upsilon_0}{a}$ και $x_{ολ}=\frac{\upsilon_0^2}{2a}$. Αλλά καλό είναι, όταν θέλουμε να κάνουμε γραφικές παραστάσεις, να βρίσκουμε με μαθηματική ακρίβεια τη συνάρτηση, που στην περίπτωσή μας μεταφράζεται ότι, καλό είναι να δουλέψουμε με αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων και επιταχύνσεων.

dmargaris@gmail.com