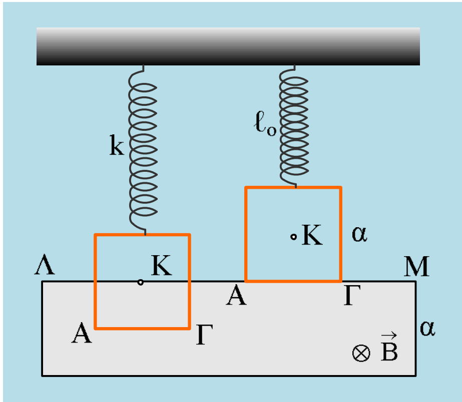
Βάζοντας φρένο στην ταλάντωση



Το τετράγωνο χάλκινο πλαίσιο, πλευράς α=0,8m, μάζας m=0,8kg και αντίστασης R=0,4Ω, ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, ενώ το μισό βρίσκεται μέσα σε ένα οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B=0,5T, όπως στο πρώτο σχήμα. Ασκώντας κατάλληλη κατακόρυφη δύναμη βγάζουμε το πλαίσιο από το πεδίο, με την κάτω πλευρά του ΑΓ να εφάπτεται της περιοχής που καταλαμβάνει το πεδίο, το οποίο εκτείνεται σε μια περιοχή με ύψος επίσης α, οπότε το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του (δεύτερο σχήμα). Σε μια στιγμή t=0, αφήνουμε το πλαίσιο να ταλαντωθεί.

i) Να βρεθεί η αρχική ενέργεια ταλάντωσης E_o.

ii) Να αποδείξετε ότι το πλαίσιο θα εκτελέσει μια φθίνουσα ταλάντωση, με την επίδραση δύναμης της μορφής F=-bυ, υπολογίζοντας και την σταθερά απόσβεσης b.

iii) Σε μια στιγμή t_1, η κάτω πλευρά ΑΓ του πλαισίου, απέχει κατά 0,5m από την πάνω πλευρά ΛΜ του πεδίου, κινούμενη προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου 1m/s. Για τη στιγμή αυτή:

α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του πλαισίου.

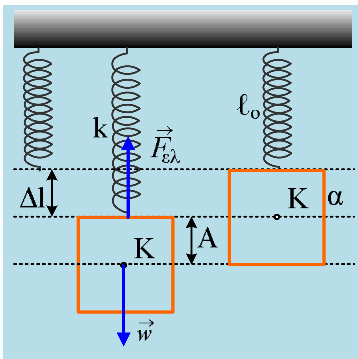
β) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του πλαισίου.

γ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, της κινητικής ενέργειας, της ενέργειας ταλάντωσης, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο εμφανίζεται θερμική ενέργεια στο πλαίσιο.

iv) Πόση θερμότητα έχει παραχθεί μέχρι τη στιγμή t_1 στο πλαίσιο και πόση θα παραχθεί συνολικά μέχρι να σταματήσει η ταλάντωση;

Δίνεται $g=10m/s^2$

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο πλαίσιο στη θέση ισορροπίας του. Από την συνθήκη ισορροπίας του παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}=w \rightarrow k\cdot\Delta\ell=mg \quad (1) \rightarrow$$

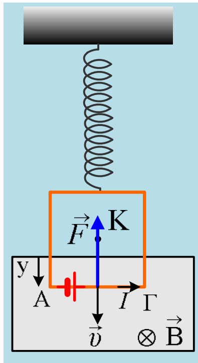
Αλλά Δℓ= ½ α οπότε:

$$k=\frac{mg}{a/2}=\frac{\frac{0{,}8\cdot 10}{0{,}4}N}{m}=20N/m$$

Όμως η μέγιστη ανύψωση του πλαισίου (του κέντρου του Κ), ίση με ½ α είναι και η μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του πλαισίου, συνεπώς έχουμε αρχικό πλάτος Α=0,4m, οπότε για την αρχική ενέργεια ταλάντωσης θα έχουμε:

$$E_o = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}20 \cdot 0{,}4^2 J = 1{,}6J$$

ii) Έστω μια τυχαία στιγμή t που η πλευρά ΑΓ έχει μπει στο πεδίο κατά y, έχοντας ταχύτητα υ. Στη διάρκεια της εισόδου του πλαισίου στο μαγνητικό πεδίο, μεταβάλλεται (αυξάνεται, θεωρώντας την κάθετη στο πλαίσιο να έχει φορά προς τα μέσα, ίδια με την ένταση Β του πεδίου) η μαγνητική ροή, με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται μια ΗΕΔ από επαγωγή στο κύκλωμα:



$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B \cdot \alpha \cdot y)}{dt} = -B \cdot \alpha \cdot \frac{dy}{dt} = -B \cdot \alpha \cdot \upsilon$$

Έτσι το πλαίσιο, σαν κλειστό κύκλωμα, θα διαρρέεται από ένα ρεύμα έντασης:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{-B \cdot \alpha \cdot \upsilon}{R}$$

Με αποτέλεσμα η πλευρά ΑΓ να δέχεται δύναμη Laplace από το πεδίο με **μέτρο**:

$$F_L = BI\ell = B\frac{B \cdot \alpha \cdot \upsilon}{R}\alpha = \frac{B^2 \cdot \alpha^2}{R}\upsilon$$

Με βάση τώρα τον κανόνα του Lenz το επαγωγικό ρεύμα θα έχει φορά από το Α → Γ έτσι ώστε η ασκούμενη δύναμη Laplace να έχει φορά προς τα πάνω, αντίθετη της ταχύτητας, προσπαθώντας να αντισταθεί στην είσοδο του πλαισίου στο μαγνητικό πεδίο. Έτσι θεωρώντας την φορά της ταχύτητας θετική (στην περίπτωσή μας προς τα κάτω), θα έχουμε:

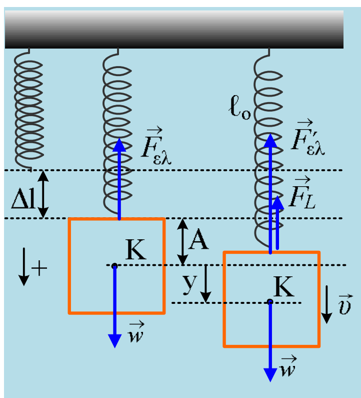
$$F_L = -\frac{B^2 \cdot \alpha^2}{R}\upsilon = -\frac{0{,}5^2 \cdot 0{,}8^2}{0{,}4}\upsilon = -0{,}4\upsilon \quad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$

Βλέπουμε δηλαδή τη δύναμη Laplace να παίζει το ρόλο της δύναμης απόσβεσης με σταθερά απόσβεσης:

b=0,4 kg/s.

Σημείωση: Δυνάμεις Laplace ασκούνται και στα εντός του πεδίου τμήματα των δύο κατακορύφων πλευρών του πλαισίου, αλλά οι δυο δυνάμεις είναι αντίθετες και αλληλοεξουδετερώνονται.

Αν πάρουμε τώρα το πλαίσιο σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει κατά y από την θέση ισορροπίας του και κινείται προς τα κάτω, όπως στο διπλανό σχήμα, θα έχουμε:

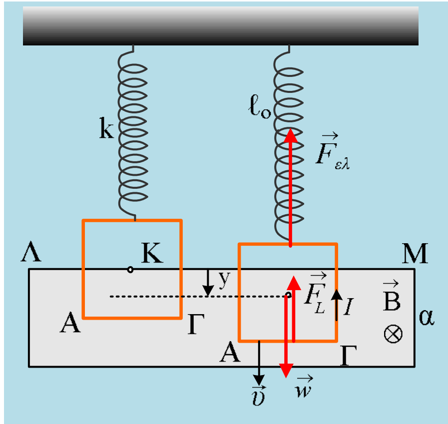


$$\Sigma F = w - |F_{\varepsilon\lambda}'| - |F_L| = mg - k\cdot(\Delta\ell + y) - 0{,}4\upsilon \rightarrow$$

$$\Sigma F = mg - k\cdot\Delta\ell - ky = 0{,}4y \xrightarrow{(1)}$$

$$\Sigma F = -ky - 0{,}4\upsilon$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση, με την επίδραση δύναμης επαναφοράς $F_{\varepsilon\pi}$=-ky και δύναμης απόσβεσης $F_{\alpha\pi}$=-0,4υ (S.I.).



iii) Με βάση τα παραπάνω, όταν η πλευρά ΑΓ έχει κατέβει κατά 0,5m, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά 0,5m, το κέντρο (και κέντρο μάζας) Κ του τετραγώνου απέχει κατά y=0,5m-0,4m=0,1m από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ενώ στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο πλαίσιο.

α) Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα (θετική κατεύθυνση προς τα κάτω) παίρνουμε:

$$ΣF=m\cdot α \to mg-F_L-F_{ελ}=m\cdot α \to$$

$$mg-0,4\cdot υ-k\cdot Δ\ell=mα \to$$

$$α=\frac{mg-0{,}4υ-KΔ\ell}{m}=\frac{0{,}8\cdot 10-0{,}4\cdot 1-20\cdot 0{,}5}{0{,}8}m/s^2=-3m/s^2$$

Έχει δηλαδή επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο $3m/s^2$.

β) Η ενέργεια ταλάντωσης στη θέση αυτή εμφανίζεται ως δυναμική:

$$U=\frac{1}{2}Dy^2=\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}20\cdot 0{,}1^2J=0{,}1J$$

Και ως κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{1}{2}mυ^2=\frac{1}{2}0{,}8\cdot 1^2J=0{,}4J$$

Συνεπώς η ενέργεια ταλάντωσης έχει τιμή:

$$E_1=U+K=0{,}1J+0{,}4J=0{,}5J.$$

γ) για τους αντίστοιχους ρυθμούς θα έχουμε:

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{dW_{Fεπ}}{dt}=-\frac{|F_{επ}|\cdot|dy|\cdot συν180°}{dt}=|Dy|\cdot|υ| \to$$

$$\frac{dU}{dt}=|Dy|\cdot|υ|=20\cdot 0{,}1\cdot 1J/s=\ 2\,J/s$$

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{ΣF}}{dt}=\frac{|ΣF|\cdot|dy|\cdot συν180°}{dt}=-|mα|\cdot|υ| \to$$

$$\frac{dK}{dt}=-|mα|\cdot|υ|=-0{,}8\cdot 3\cdot 1\,J/s=-2{,}4\,J/s$$

Οπότε για τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης θα έχουμε:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dU}{dt}+\frac{dK}{dt}=-0{,}4\,J/s$$

Ο παραπάνω ρυθμός μας δείχνει, τον ρυθμό με τον οποίο η δύναμη Laplace αφαιρεί μηχανική ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα, μετατρέποντάς την σε ηλεκτρική. Πράγματι αν βρούμε την ισχύ της δύναμης Laplace θα έχουμε:

$$P_{FL}=|F_L|\cdot|υ|\cdot συν180°=-|F_L|\cdot|υ|=-0{,}4\cdot υ^2=-\ 0{,}4\cdot 1^2W=-0{,}4W$$

Ενώ η αντίστοιχη ηλεκτρική ισχύς στο κύκλωμα είναι ίση:

$$P_{\eta\lambda} = EI = (-B \cdot \alpha \cdot \upsilon) \cdot \frac{-B \cdot \alpha \cdot \upsilon}{R} = +\frac{(B \cdot \alpha \cdot \upsilon)^2}{R} = \frac{(0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 1)^2}{0{,}4} W = 0{,}4W$$

iv) Από την διατήρηση της ενέργειας, η ηλεκτρική ενέργεια που εμφανίζεται στο κύκλωμα με την μορφή της θερμότητας, θα είναι ίση με την απώλεια της ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος. Δηλαδή έχουμε:

$$Q = E_o - E_1 = 1{,}6J - 0{,}5J = 1{,}1\ J$$

Ενώ τελικά το πλαίσιο θα ηρεμήσει στη θέση ισορροπίας του και όλη η ενέργεια που πήρε για να αρχίσει να ταλαντώνεται θα έχει μετατραπεί σε θερμότητα στον ωμικό αντιστάτη του πλαισίου. Δηλαδή θα έχουμε:

$$Q_{o\lambda} = E_o - E_\tau = 1{,}6J - 0J = 1{,}6\ J$$

Σχόλιο:

Στο τελευταίο ερώτημα θα μπορούσαμε να απαντήσουμε δουλεύοντας με δυναμική ενέργεια ελατηρίου και βαρυτική δυναμική ενέργεια του πλαισίου. Προτιμήσαμε να μείνουμε αυστηρά στην ενέργεια ταλάντωσης.

dmargaris@gmail.com