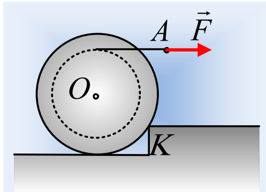
Ένας κυλινδρικός φλοιός σε ένα σκαλοπάτι. Συνέχεια.

2. Το σκαλοπάτι δεν είναι λείο.



Ένας λεπτός κυλινδρικός φλοιός, μάζας M=20kg και ακτίνας R=50cm, φέρει σχισμή βάθους y=10cm, εντός της οποίας έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Το σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με σκαλοπάτι ύψους h=20cm, με το οποίο εμφανίζει τριβή με συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,5$. Σε μια στιγμή ασκούμε μια οριζόντια δύναμη F=20N στο άκρο A του νήματος χωρίς να κινηθεί ο φλοιός.

i) Να υπολογίσετε την τριβή και την κάθετη αντίδραση που ασκείται στον κυλινδρικό φλοιό, από το σκαλοπάτι.

ii) Αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο της δύναμης F με σκοπό να κινηθεί ο φλοιός. Να εξετάσετε τι πρόκειται να συμβεί πρώτα:

α) Ο φλοιός θα εκτελέσει περιστροφική κίνηση χωρίς να ανέβει στο σκαλοπάτι.

β) Ο κυλινδρικός φλοιός θα αρχίσει να ανεβαίνει στο σκαλοπάτι, εκτελώντας σύνθετη κίνηση.

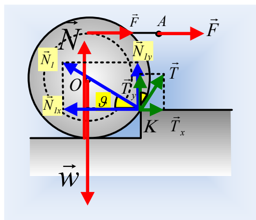
iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα ασκώντας οριζόντια δύναμη F_1=120N, με αποτέλεσμα το στερεό να ανέβει στο σκαλοπάτι.

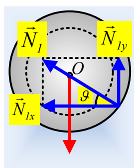
α) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση του κέντρου O, του κυλινδρικού φλοιού.

β) Ποια τιμή παίρνει η παραπάνω επιτάχυνση (επιτρόχια) μόλις το κέντρο O απέχει κατά h_1=60cm από το οριζόντιο επίπεδο;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του φλοιού, ως προς τον άξονα περιστροφής του I= ½ mR^2 και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:





i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο φλοιό μας, μόλις τραβήξουμε ασκώντας δύναμη F, το άκρο του νήματος. Μέσω του νήματος ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F στον φλοιό, το σκαλοπάτι ασκεί δύναμη N_1, κάθετα στην επιφάνεια, η οποία περνά από το κέντρο O, ενώ επειδή λόγω της ροπής της F, ο φλοιός τείνει να περιστραφεί σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, εμφανίζεται και στατική τριβή, με φορά όπως στο σχήμα. Από την ισορροπία παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F+T_x=N_{1x} \rightarrow F+T\cdot \eta\mu\theta=N_1\cdot \sigma\upsilon\nu\theta \ (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N+N_{1y}+T_y=w \rightarrow N+N_1\cdot \eta\mu\theta+T\cdot \sigma\upsilon\nu\theta=Mg \ (2)$$

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow T\cdot R-F\cdot r=0 \ (3)$$

$$\Sigma\tau_K=0 \rightarrow w\cdot R\cdot \sigma\upsilon\nu\theta-N\cdot R\cdot \sigma\upsilon\nu\theta-F\cdot (r+R\cdot \eta\mu\theta)=0 \ (4)$$

Όπου r=R-y=0,4m, ενώ με βάση το 2ο σχήμα $\eta\mu\theta=\dfrac{R-h}{R}=\dfrac{0,5-0,2}{0,5}=0,6 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=0,8$.

Αλλά τότε από (3)

$$T = F\frac{r}{R} = 20N\frac{0{,}4m}{0{,}5m} = 16N$$, ενώ από (4)

$$w\cdot R\cdot συνθ - N\cdot R\cdot συνθ - F\cdot(r+R\cdot ημθ)=0 \rightarrow$$

$$200\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8 - N\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8 - 20\cdot(0{,}4+0{,}5\cdot 0{,}6)=0 \rightarrow N=165N$$

Οπότε με αντικατάσταση στις (1) παίρνουμε:

$$N_1 = \frac{F + T\cdot ημθ}{συνθ} = \frac{20+16\cdot 0{,}6}{0{,}8}N = 37N$$

Αν υπολογίσουμε την οριακή τριβή $T_{ορ}=\mu_s\cdot N=0{,}5\cdot 37N=18{,}5N>16N$, συνεπώς η στατική τριβή που παραπάνω υπολογίσαμε μπορεί να υπάρξει.

ii) Έστω ότι ο κυλινδρικός φλοιός θα αρχίσει να περιστρέφεται, εξαιτίας της ασκούμενης ροπής δεξιόστροφα, γύρω από κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του Ο, χωρίς να μεταφέρεται.

Αφού δεν έχουμε μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας θα ισχύει ΣF=0 ή με άλλα λόγια ισχύουν ξανά οι εξισώσεις:

$ΣF_x=0 \rightarrow F+T_x=N_{1x} \rightarrow F+T\cdot ημθ=N_1\cdot συνθ$ (1)

$ΣF_y=0 \rightarrow N+N_{1y}+T_y=w \rightarrow N+N_1\cdot ημθ+T\cdot συνθ=Mg$ (2)

Όμως τώρα η τριβή, είναι τριβή ολίσθησης οπότε $T=\mu\cdot N_1$ και με αντικατάσταση:

$$F+\mu N_1\cdot ημθ=N_1\cdot συνθ \rightarrow F+0{,}5N_1\cdot 0{,}6=0{,}8\cdot N_1 \rightarrow F=0{,}5N_1.$$

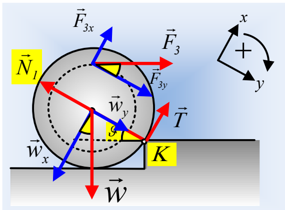
Έτσι παίρνοντας τις ροπές ως προς το Ο έχουμε:

$$Στ=F\cdot r-T\cdot R=0{,}5N_1\cdot 0{,}4-0{,}5N_1\cdot 0{,}5=-0{,}05N_1$$

Η ροπή με άλλα λόγια της τριβής είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ροπή της δύναμης και ο φλοιός στρέφεται αριστερόστροφα, πράγμα άτοπο.

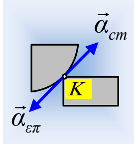
Κατά συνέπεια αν ξεκινώντας από μηδενική δύναμη F, αυξάνουμε το μέτρο της, αρχικά ο κυλινδρικός φλοιός θα ισορροπεί και κάποια στιγμή θα αρχίσει να ανέρχεται υπερπηδώντας το σκαλοπάτι και σωστό είναι το β).

iii) Αφού ο φλοιός αρχίζει να ανεβαίνει στο σκαλοπάτι με την άσκηση της δύναμης F_3, δεν δέχεται πια δύναμη από το οριζόντιο επίπεδο, οπότε οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι αυτές του σχήματος.



α) Εφαρμόζουμε τα 2ο νόμο του Νεύτωνα για την σύνθετη κίνηση του φλοιού, δουλεύοντας με τους άξονες x και y, όπου ο y έχει τη διεύθυνση της ακτίνας ΚΟ, με Κ το σημείο επαφής με το σκαλοπάτι. Με την επιλογή αυτή, η επιτάχυνση στη διεύθυνση του άξονα y είναι μηδενική :

$$\left.\begin{array}{l} ΣF_x=mα_{cmx} \rightarrow F_{3x}+T-w_x=mα_{cmx} \\ ΣF_y=mα_{cmy} \rightarrow N_1=F_{3y}+mgημθ \\ Στ_o=I_{cm}\cdot α_{γων} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} F_3\cdot ημθ+T-mg\cdot συνθ=mα_{cmx} \quad (4) \\ N_1=F_3\cdot συνθ+mg\cdot ημθ \quad (5) \\ F_3\cdot r-T\cdot R=½\, mR^2\cdot α_{γων} \quad (6) \end{array}$$



Από την σχέση (5) βρίσκουμε $N_1 = 120N \cdot 0{,}8 + 20 \cdot 10 \cdot 0{,}6N = 216N$.

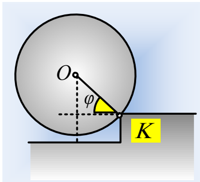
Θεωρώντας ότι η εμφανιζόμενη τριβή είναι στατική (πράγμα που σημαίνει ότι δεν έχουμε ολίσθηση στο σημείο Κ), τότε η ταχύτητα του σημείου του φλοιού που εφάπτεται στο σημείο Κ είναι μηδενική οπότε $\alpha_{cmx} = \alpha_{επ} = \alpha_{γων}R$, οι εξισώσεις (4) και (6) γίνονται:

$$\left.\begin{array}{l} F_3 \cdot ημθ + T - mg \cdot συνθ = m\alpha_{cmx} \\ F_3 \cdot r - T \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha_{γων} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} T + (F_3 \cdot ημθ - mg \cdot συνθ) = m\alpha_{cm} \\ F_3 \dfrac{r}{R} - T = \dfrac{1}{2} m a_{cm} \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)}$$

$$a_{cm} = \frac{2\left(F_3 \dfrac{r}{R} + F_3 \cdot ημθ - mgσυνθ\right)}{3m} \quad (7)$$

Και με αντικατάσταση βρίσκουμε $a_{cm} = \dfrac{4}{15} m/s^2$.

Υπολογίζοντας τώρα την τριβή βρίσκουμε $T = F_3 \dfrac{r}{R} - \dfrac{1}{2} m a_{cm} = 120 \dfrac{0{,}4}{0{,}5} N - \dfrac{1}{2} 20 \cdot \dfrac{4}{15} N = 93N$ ενώ η οριακή τριβή έχει μέτρο $T_{ορ} = \mu_s \cdot N_1 = 0{,}5 \cdot 216N = 108N$, συνεπώς πριν η τριβή πάρει τη μέγιστη τιμή της και μετατραπεί σε τριβή ολίσθησης θα γίνει το μέτρο της 93Ν και ο φλοιός θα αρχίσει να ανεβαίνει στο σκαλοπάτι, χωρίς να ολισθαίνει.



β) Την στιγμή που το κέντρο Ο απέχει κατά y=60cm από το οριζόντιο επίπεδο η κατάσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος, όπου για τη γωνία φ έχουμε:

$$ημφ = \frac{h_1 - h}{R} = \frac{60cm - 20cm}{50cm} = 0{,}8 \rightarrow συνφ = 0{,}6.$$

Αλλά τότε από την εξίσωση (7) βρίσκουμε:

$$a'_{cm} = \frac{2\left(F_3 \dfrac{r}{R} + F_3 \cdot ημφ - mgσυνφ\right)}{3m} = \frac{2\left(120 \dfrac{0{,}4}{0{,}5} + 120 \cdot 0{,}8 - 200 \cdot 0{,}6\right)}{3 \cdot 20} m/s^2.$$

$$a_{cm} = 2{,}4 m/s^2.$$

Σχόλια:

1) Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι καθώς ανεβαίνει ο κυλινδρικός φλοιός η επιτάχυνση του κέντρου του αυξάνεται (από $0{,}27 m/s^2$, φτάσαμε στα $2{,}4 m/s^2$) πράγμα που σημαίνει ότι αν αρχίσει να ανυψώνεται, από εκεί και πέρα δεν πρόκειται να σταματήσει η άνοδος και θα συνεχίσει την άνοδο.

2) Αλλά από την εξίσωση (7) μπορούμε να βρούμε και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της δύναμης για την οποία ο φλοιός πρόκειται να αρχίσει την άνοδό του στο σκαλοπάτι. Αρκεί απλά $\alpha_{cm} > 0$ ή

$$a_{cm} = \frac{2\left(F_3 \frac{r}{R} + F_3 \cdot \eta\mu\theta - mg\sigma\upsilon\nu\theta\right)}{3m} > 0 \rightarrow$$

$$F_3 \frac{r}{R} + F_3 \cdot \eta\mu\theta - mg\sigma\upsilon\nu\theta > 0 \rightarrow$$

$$F > \frac{mg \cdot R\sigma\upsilon\nu\theta}{(r + R\eta\mu\theta)} \rightarrow F_3 > \frac{20 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6} N \approx 114N$$

Αλλά τότε το ελάχιστο μέτρο της δύναμης, για το οποίο ο κυλινδρικός φλοιός εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο για να ανέβει στο σκαλοπάτι είναι οριακά 144N.

3) Από τη στιγμή που δεν ολισθαίνει ο κυλινδρικός φλοιός στο σκαλοπάτι, μπορούμε να δούμε την κίνηση, ως περιστροφή γύρω από το Κ. Αλλά τότε για να μπορεί ο φλοιός να αρχίσει να ανέρχεται στο σκαλοπάτι, θα πρέπει $\Sigma\tau_K>0$, θεωρώντας θετική τη ροπή της F. Αλλά τότε:

$$\tau_{F_K} + \tau_{w_K} > 0 \rightarrow F(r + R\eta\mu\theta) - mg \cdot R\sigma\upsilon\nu\theta > 0 \rightarrow$$

$$F > \frac{mg \cdot R\sigma\upsilon\nu\theta}{(r + R\eta\mu\theta)} \rightarrow F > 114N$$

dmargaris@gmail.com