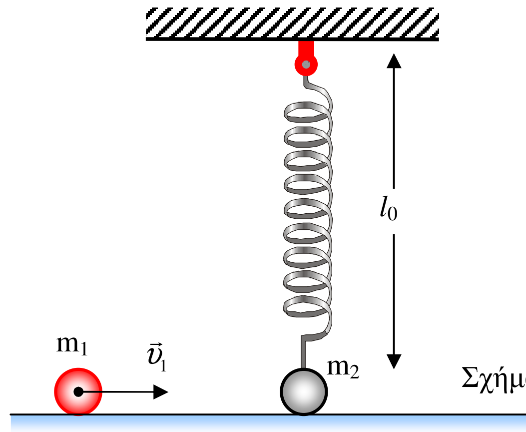
Μία κρούση και μία γραμμική ταλάντωση

Το σώμα μάζας m_1=2kg κινείται ευθύγραμμα σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου υ_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα, μάζας m_2. Το σώμα m_2 αρχικά ηρεμεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου το οποίο έχει το φυσικό του μήκος l_0 και σταθερά k=600N/m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σώμα m_1 μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου υ_1'=2m/s. Αν κατά την κρούση το σώμα m_1 μεταβιβάζει στο m_2 το 75% της κινητικής του ενέργειας:



Σχήμα 1

i) Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα υ_1 του σώματος m_1 και η μάζα του σώματος m_2.

ii) Αν κατά την κίνηση του σώματος m_2 υπάρχει συνεχώς επαφή του σώματος με το δάπεδο και στην ακραία θέση μόλις που μηδενίζεται η δύναμη επαφής με το δάπεδο να βρεθεί το φυσικό μήκος l_0 του ελατηρίου.

iii) Αποδείξτε ότι το σώμα θα εκτελέσει γραμμική ταλάντωση και να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης.

iv) Να εξετάσετε αν το σώμα m_2 θα συγκρουστεί ξανά με το m_1.

Δίνεται $\sqrt{3}=1,7$

Απάντηση

i) Εφόσον μεταβιβάζεται το 75% της κινητικής ενέργειας του m_1 στο σώμα m_2, το σώμα m_1 θα έχει στο τέλος της κρούσης το 25% της αρχικής του κινητικής ενέργειας δηλ.

$$\frac{K_1'}{K_1}=0,25 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}=0,25 \Rightarrow \frac{\upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2}=0,25 \Rightarrow \upsilon_1^2=\frac{\upsilon_1'^2}{0,25}=4\upsilon_1'^2 \Rightarrow \upsilon_1=2\upsilon_1'=4m/s$$

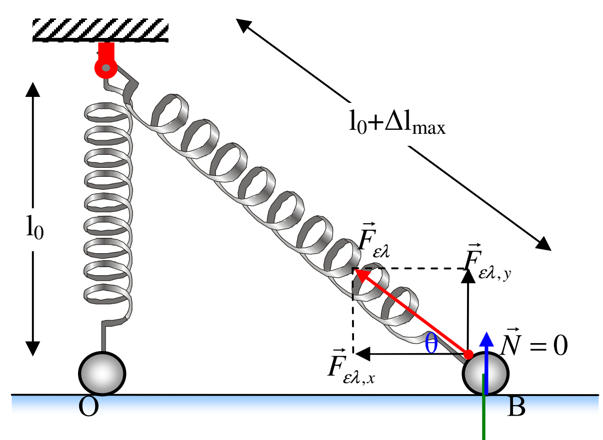
$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \overset{(+)\rightarrow}{\Longrightarrow} -2=\frac{2-m_2}{2+m_2}4 \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{2-m_2}{2+m_2} \Rightarrow -2-m_2=4-2m_2 \Rightarrow m_2=6kg$$

$$\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \overset{(+)\rightarrow}{\Longrightarrow} \frac{2\cdot 2}{2+6}4=2m/s$$

ii) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το σώμα m_2 στην ακραία θέση του, μετά την κρούση όταν τείνει να χάσει την επαφή του με το δάπεδο.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση

$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda,y}+N-w=0 \rightarrow$



Σχήμα 2

$k\Delta\ell \cdot \eta\mu\vartheta + N = m_2 g$

Τη στιγμή που το σώμα χάνει την επαφή με το επίπεδο, N=0 και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$k\Delta\ell_{\max} \cdot \eta\mu\vartheta = m_2 g$ (1)

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα Β-ελατήριο παραμένει σταθερή, οπότε εφαρμόζοντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, για τη θέση αμέσως μετά την κρούση και στη θέση που χάνεται η επαφή, παίρνουμε:

$K_O + U_{\varepsilon\lambda,O} = K_B + U_{\varepsilon\lambda,B} \rightarrow K_O + 0 = 0 + U_{\varepsilon\lambda,B} \rightarrow$

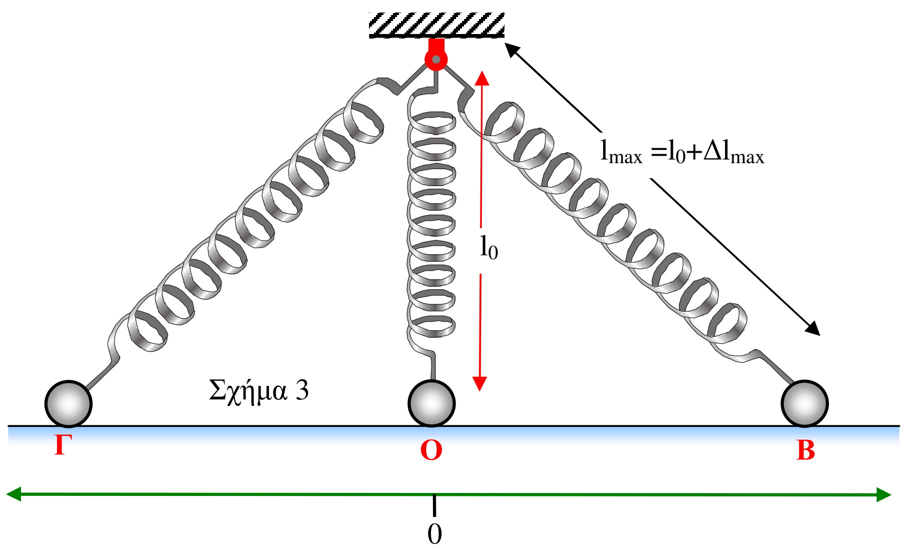
$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}k\Delta l_{\max}^2 \Rightarrow \Delta l_{\max} = \sqrt{\frac{m_2\upsilon_2'^2}{k}} = \upsilon_2' \sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0,2m$

Η σχέση (1) γίνεται: 600·0,2·ημθ=60⇒ημθ=0,5⇒θ=30^o

Από το σχήμα 2

$\eta\mu\vartheta = \frac{\ell_0}{\ell_0 + \Delta\ell_{\max}} \Rightarrow 0,5 = \frac{\ell_0}{\ell_0 + 0,2} \Rightarrow 0,5 \cdot \ell_0 + 0,1 = \ell_0 \Rightarrow 0,5 \cdot \ell_0 = 0,1 \Rightarrow \ell_0 = 0,2m$

iii) Επειδή η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα m_2–ελατήριο παραμένει σταθερή η κίνηση του σφαιριδίου θα εξελίσσεται με ίδιο πανομοιότυπο τρόπο μεταξύ των ακραίων θέσεων Β και Γ γύρω από το σημείο Ο. Το φαινόμενο είναι περιοδικό.
Στον οριζόντιο άξονα η κίνηση είναι γραμμική ταλάντωση καθώς κινείται περιοδικά παλινδρομικά γύρω από το σημείο Ο στο οποίο $\Sigma F_x=0$ με πλάτος Α=ΟΒ.



Το πλάτος Α ισούται:

συνθ=ΟΒ/($l_0+\Delta l_{max}$)⇒συν(30^o)=ΟΒ/(0,2+0,2) ⇒√3/2 =ΟΒ/0,4⇒ΟΒ = 0,2√3=0,34m

Η δύναμη του ελατηρίου στον οριζόντιο άξονα λειτουργεί ως δύναμη επαναφοράς. Κατευθύνεται συνεχώς αντίθετα από την απομάκρυνση x του σώματος από τη Θ.Ι..

Συγκεκριμένα με σημείο αναφοράς το σημείο Ο στην τυχαία θέση που απέχει x από το Ο με θετική φορά την δεξιά έχουμε

$\Sigma F_x = -F_{\varepsilon\lambda,x} \Rightarrow$

$\Sigma F_x = -F_{\varepsilon\lambda}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$

$\Sigma F_x = -k\cdot\Delta l\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$

$\Sigma F_x = -k\cdot(l - l_0)\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$

$$\Sigma F_x = -k(l-l_0)\cdot\frac{x}{l} \Rightarrow$$

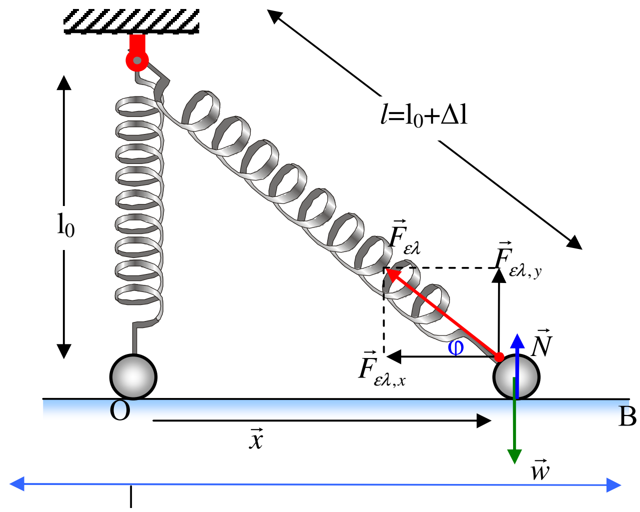
$$\Sigma F_x = -\frac{k(l-l_0)}{l}\cdot x \quad (2)$$

Ή διανυσματικά

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda,x} = -\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\hat{x} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda,x} = -k(l-l_0)\cdot\frac{x\cdot\hat{x}}{l} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda,x} = -\frac{k(l-l_0)}{l}\cdot\vec{x}$$



Σχήμα 4

Η δύναμη έχει αντίθετη φορά από αυτή της απομάκρυνσης και τείνει να φέρει το σώμα στη Θ.Ι. δηλ λειτουργεί σαν δύναμη επαναφοράς.

Φαίνεται ότι είναι της μορφής –Dx αλλά ουδεμία σχέση έχει.

Αν θέσουμε $\tilde{D} = \frac{k(l-l_0)}{l}$ η σχέση **δεν** είναι της μορφής – Dx καθώς το $\tilde{D}$ δεν έχει σταθερή τιμή διότι η τιμή του εξαρτάται από το μήκος *l* και έτσι το σώμα δεν εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Εκτελεί απλά γραμμική ταλάντωση.

Αν συνεχίσουμε την σχέση (2) αντικαθιστώντας το $l = \sqrt{l_0^2 + x^2}$ έχουμε το εξής:

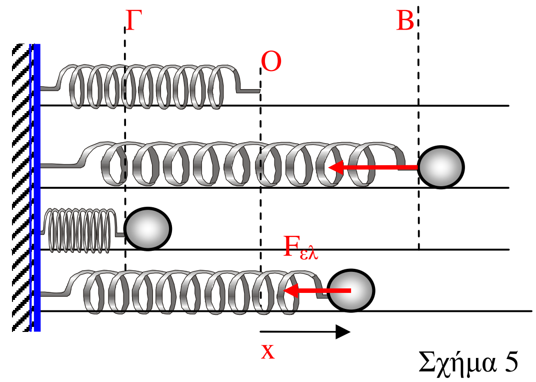
$\Sigma F_x = -\frac{k(l-l_0)}{l}\cdot x = -\frac{k\left(\sqrt{l_0^2+x^2} - l_0\right)x}{\sqrt{l_0^2+x^2}}$ η οποία δηλώνει ότι δεν έχει καμία σχέση με το F= – Dx.

iv) Εάν το σώμα εκτελούσε Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς D=k θα είχε περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{6}{600}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

Συγκρίνοντας την σχέση (2) η σταθερά $\tilde{D}$ στιγμιαία έχει μία συγκεκριμένη τιμή, αλλά μικρότερη συνεχώς από το k. Στη θέση ισορροπίας έχει $\tilde{D}=0$. Αυτό σημαίνει ότι ακόμη και Α.Α.Τ. να εκτελούσε με μία οποιαδήποτε τιμή που προκύπτει από το $\tilde{D}$ θα ίσχυε $\tilde{D}<k$ και $\tilde{T}>2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Έτσι η περίοδος $\tilde{T}$ της γραμμικής ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη από Τ δηλ. $\tilde{T} > \frac{\pi}{5}s$.

Αυτό είναι και λογικό αν σκεφτούμε το εξής: Συγκρίνουμε το πρόβλημά μας με σώμα ίσης μάζας δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο που κάνει ταλάντωση γύρω από το σημείο Ο με ίδιο πλάτος ΟΒ με αυτό του προβλήματός μας, σχήμα 5. Η δύναμη του ελατηρίου σε ίδια απομάκρυνση από τη Θ.Ι. θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη δύναμη $F_{ελ,x}$ που έχουμε στο πρόβλημά μας καθώς δεν συμμετέχει όλη η $F_{ελ}$ στην οριζόντια διεύθυνση αλλά μία συνιστώσα αυτής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να έχει μικρότερη επιβράδυνση και επιτάχυνση καθώς μετακινείται γύρω από τη Θ.Ι. από ότι αν έκανε Α.Α.Τ. στο οριζόντιο ελατήριο. Έτσι για το ίδιο πλάτος θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο να μηδενιστεί η ταχύτητά του από τη Θ.Ι. σε ακραία θέση.



Σχήμα 5

Για να δούμε αν θα γίνει η κρούση μεταξύ του m_1 και του m_2 θα σκεφτούμε ως εξής:

Η κρούση μπορεί να γίνει σε θέση αριστερά από τη Θ.Ι. Ο δηλ. στο χρονικό διάστημα $\frac{\tilde{T}}{2}<t\leq\frac{3\tilde{T}}{4}$ καθώς ο ταλαντωτής αρχικά κινείται προς τα δεξιά ενώ το m_1 προς τα αριστερά. Αν το σώμα m_1 σε χρόνο $\frac{\tilde{T}}{2}$ έχει διανύσει μεγαλύτερη απόσταση από το πλάτος Α τότε η κρούση σίγουρα δεν πραγματοποιείται.

Αν το σώμα εκτελούσε ταλάντωση με περίοδο Τ=π/5s τότε το m_1 σε χρόνο t=T/2=π/10=0,314s θα διένυε απόσταση $x_1=\upsilon'_1\cdot t=2\cdot 0{,}314=0{,}628$m που είναι μεγαλύτερη από το πλάτος Α=0,34m. Έτσι το m_1 με βεβαιότητα δεν θα συγκρουστεί με το m_2 αφού το m_2 και με μικρότερη περίοδο από αυτή που έχει δεν καταφέρνει να συγκρουστεί, πόσο μάλλον με την $\tilde{T}$ που είναι μεγαλύτερη από π/5s. Το m_1 σε κάθε περίπτωση διανύει απόσταση όσο το πλάτος Α=0,34m σε χρόνο $t=A/\upsilon'_1=0{,}34/2=0{,}17$s.

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com