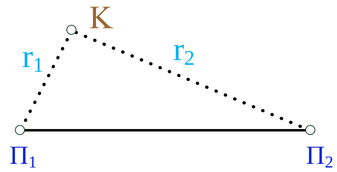
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ-1 2017

Θέμα Α.

1. β
2. α
3. γ
4. β
5. Λ,Λ,Λ,Λ,Λ.

B1



Στην επιφάνεια ελαστικού μέσου υπάρχουν δύο πανομοιότυπες πηγές κυμάτων που ξεκινούν ταυτόχρονα την ταλάντωση τους. Σε ένα σημείο Κ του ελαστικού μέσου φτάνουν τα δύο κύματα έχοντας διανύσει το ένα κύμα μεγαλύτερη απόσταση κατά 1,25λ από το άλλο (όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων). Ελαττώνουμε την συχνότητα ταλάντωσης των πηγών κατά $\frac{100}{3}\%$ σε σχέση με την αρχική, χωρίς μεταβολή στο πλάτος του.

Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Κ:

α. Θα αυξηθεί **β.** Θα μειωθεί **γ.** θα παραμείνει σταθερό

Να επιλέξτε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η διαφορά των δρόμων που ακολουθούν τα δύο κύματα είναι Δr = 1,25λ, οπότε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Κ μετά την συμβολή των κυμάτων σ' αυτό είναι:

$$A_K = 2A\left|\text{συν}\frac{\pi\Delta r}{\lambda}\right| = 2A\left|\text{συν}\frac{\pi\cdot 1,25\lambda}{\lambda}\right| \Rightarrow A_K = \sqrt{2}A$$

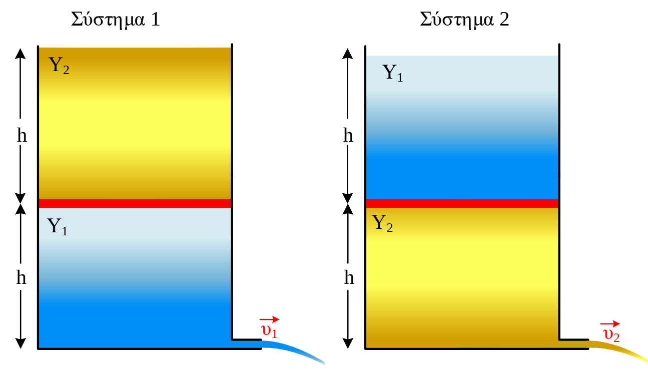
Η νέα τιμή της συχνότητας μετά την μείωση θα είναι $f' = f - \frac{1}{3}f \Rightarrow f' = \frac{2}{3}f \Rightarrow \frac{\upsilon}{\lambda'} = \frac{2}{3}\frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow \lambda' = \frac{3}{2}\lambda$

Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Κ μετά την αλλαγή της συχνότητας θα είναι:

$$A'_K = 2A\left|\text{συν}\frac{\pi\Delta r}{\lambda'}\right| = 2A\left|\text{συν}\frac{\pi\cdot 1,25\lambda}{\frac{3}{2}\lambda}\right| = 2A\left|\text{συν}\frac{\pi\cdot 5}{6}\right| \Rightarrow A'_K = \sqrt{3}A \text{ άρα το πλάτος θα αυξηθεί.}$$

Β2

Τα δύο υγρά Y_1 και Y_2 του σχήματος έχουν πυκνότητες ρ_1 και $\rho_2 < \rho_1$ αντίστοιχα. Οι δύο κύλινδροι είναι ανοιχτοί στο πάνω μέρος τους. Μεταξύ των δύο υγρών υπάρχει έμβολο αμελητέας μάζας που δεν επιτρέπει την ανάμιξη τους. Αρχικά το ύψος κάθε υγρού είναι h. Κάποια στιγμή ανοίγουμε την κάνουλα και σχεδόν αμέσως αποκαθίσταται η σταθερή ροή.

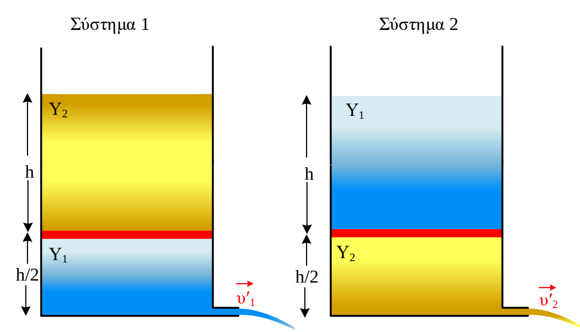


Σχήμα 1

Α. Για τις αρχικές ταχύτητες μόλις αποκατασταθεί η ροή ισχύει:

α. $\upsilon_1 > \upsilon_2$ **β.** $\upsilon_1 = \upsilon_2$ **γ.** $\upsilon_1 < \upsilon_2$

Β. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία έχοντας το "κάτω" υγρό σε κάθε σύστημα στο μισό ύψος απ' αυτό που το είχαμε αρχικά. Για τις διαφορές των τετραγώνων των ταχυτήτων $\Delta\upsilon^2 = |\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2|$ και $\Delta\upsilon'^2 = |\upsilon_2'^2 - \upsilon_1'^2|$ κατά την έναρξη στα σχήματα 1 και 2 ισχύει:



Σχήμα 2

α. $\Delta\upsilon^2 > \Delta\upsilon'^2$ **β.** $\Delta\upsilon^2 = \Delta\upsilon'^2$ **γ.** $\Delta\upsilon^2 < \Delta\upsilon'^2$

Γ. Από την κατάσταση που βλέπουμε στο σχήμα 1, ως την κατάσταση του σχήματος 2 θα φτάσει πιο γρήγορα (ξεκινώντας ταυτόχρονα) το:

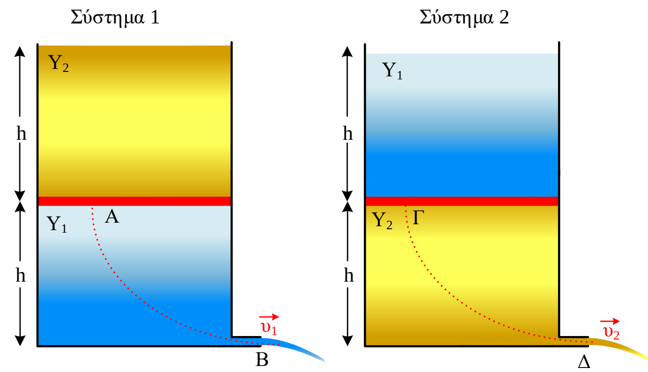
α. σύστημα 1 **β.** σύστημα 2 **γ.** ταυτόχρονα

Θεωρούμε σε κάθε περίπτωση ότι τα υγρά είναι ιδανικά, η ροή γίνεται αμέσως στρωτή το έμβολο κινείται χωρίς τριβές μέσα στον κάθε κύλινδρο η ελεύθερη επιφάνεια κατεβαίνει με σχεδόν μηδενική ταχύτητα.

Να αιτιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας.

Λύση

Α. Σωστή απάντηση η **γ**.



Σχήμα 1

Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς την βάση κάθε κυλίνδρου.

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Bernoulli για τα σημεία Α,Β και Γ,Δ και έχουμε:

$$p_A + \rho_1 g h = p_B + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_1^2 \ (1)$$

Αλλά $p_A = p_{ατ} + \rho_2 gh$ και $p_B = p_{ατ}$

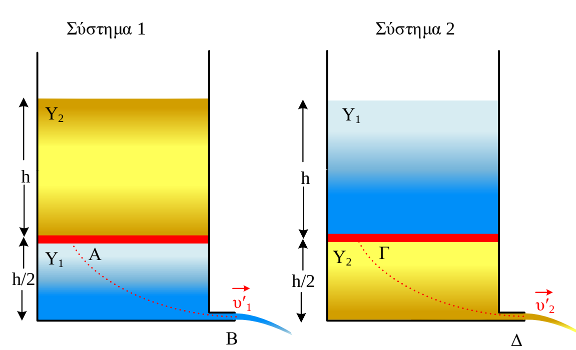
Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$p_{ατ} + \rho_2 gh + \rho_1 gh = p_{ατ} + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \rho_2 gh + \rho_1 gh = \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2gh(\rho_2+\rho_1)}{\rho_1}} \ (2)$$

Με ανάλογη διαδικασία για τα σημεία Γ και Δ προκύπτει: $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2gh(\rho_1+\rho_2)}{\rho_2}}$ (3)

Διαιρούμε τις (2) και (3): $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\sqrt{\frac{2gh(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1}}}{\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2gh(\rho_1+\rho_2)}{\rho_2}}} \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} < 1 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 < \upsilon_2}$

Β. Σωστή απάντηση είναι η **β**.



Σχήμα 2

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\Delta\upsilon^2 = |\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2| = |\frac{2gh(\rho_1+\rho_2)}{\rho_2} - \frac{2gh(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1}| =$$

$$= |2gh(\rho_1+\rho_2)(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1})| \Rightarrow \Delta\upsilon^2 = |2gh\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}| \ (4)$$

Με ανάλογη διαδικασία όπως στην περίπτωση Α θα έχουμε για τα σημεία Α και Β:

$$p_{\alpha\tau}+\rho_2 gh+\rho_1 g\frac{h}{2}=p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1'^2 \Rightarrow \rho_2 gh+\rho_1 g\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1'^2 \Rightarrow \upsilon_1'^2=\frac{gh(2\rho_2+\rho_1)}{\rho_1} \quad (5)$$

Και ομοίως για τα σημεία Γ και Δ θα ισχύει: $\upsilon_2'^2=\dfrac{gh(2\rho_1+\rho_2)}{\rho_2}$ (5)

Με αφαίρεση των (5) και (6) προκύπτει:

$$\Delta\upsilon'^2=|\upsilon_2'^2-\upsilon_1'^2|=|\frac{gh(2\rho_1+\rho_2)}{\rho_2}-\frac{gh(2\rho_2+\rho_1)}{\rho_1}|=|2gh(\frac{\rho_1}{\rho_2}+\frac{1}{2}-\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{1}{2})\Rightarrow \Delta\upsilon'^2=|2gh\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}| \quad (7)$$

Από τις (4) και (7) προκύπτει $\Delta\upsilon^2=\Delta\upsilon'^2$

Σημείωση: Οι ταχύτητες εκροής στα σχήματα 1 και 2 είναι διαφορετικές, παρόλα αυτά όμως οι διαφορές των τετραγώνων τους είναι σταθερές!!!

Γ. Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Έστω ότι το υγρό που εκρέει έχει κάποιο ύψος x με εφαρμογή του νόμου του Bernoulli για μία φλέβα ΑΒ θα δώσει $p_{\alpha\tau}+\rho_2 gh+\rho_1 gx=p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \rho_2 gh+\rho_1 gx=\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1^2=\dfrac{2gh\rho_2}{\rho_1}+2gx$ (8)

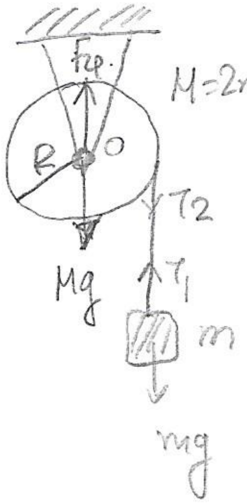
Με ανάλογη διαδικασία για μία φλέβα ΓΔ θα πάρουμε $\upsilon_2^2=\dfrac{2gh\rho_1}{\rho_2}+2gx$ (9)

Αλλά $\rho_1>\rho_2$ οπότε από τις (8) και (9) προκύπτει: $\upsilon_2>\upsilon_1$.

Δηλαδή σε κάθε ύψος ($x<h$) η ταχύτητα εκροής του συστήματος 2 είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα εκροής του συστήματος 1, συνεπώς το σύστημα 2 θα αδειάσει πιο γρήγορα το υγρό που υπάρχει στο κάτω μέρος.

B3

$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$



M=2m

Για το m

$\Sigma F = m\alpha_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow mg - T_1 = m\alpha_{cm}$

Για το M=2m

$\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2 \cancel{R} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\alpha_{\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma}$ όμως $\alpha_{επιτρ} = \alpha_{\gamma} \cdot R = \alpha_{cm}$

$T_1 = T_2$ σαν αντιδράσεις ίσων δυνάμεων.

$T_1 = T_2 = T$ Άρα $T = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}$

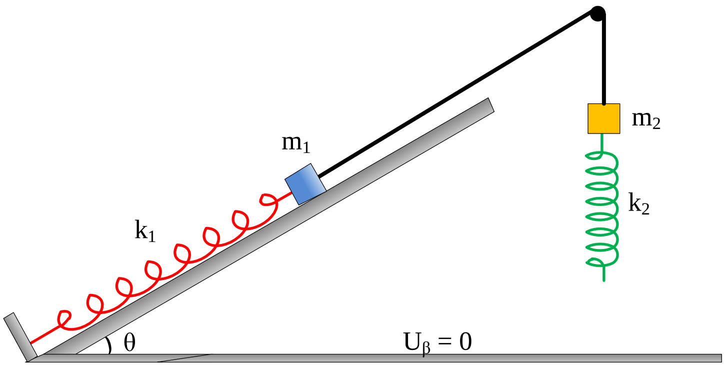
$mg - \frac{1}{2}M\alpha_{cm} = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg = \frac{1}{2}M\alpha_{cm} + \frac{M}{2}\alpha_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow mg = M\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{M}{2}g = \cancel{M}\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = g/2.$

Άρα $F_{τρ} = Mg + T_2 = Mg + T = Mg + \frac{M}{2}\frac{g}{2}.$

Άρα $F_{τρ} = \frac{5Mg}{4} \Rightarrow F_{τρ} = 1{,}25Mg$ Σωστό (γ)

ŪγεŬũ



Σώμα, μάζας m_1 = 4 kg, είναι δεμένο στο ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k_1, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο, και μέσω αβαρούς νήματος και ενός τελείως λείου καρφιού, με άλλο σώμα, μάζας m_2 = 6 kg, που φέρει στο κάτω μέρος του ελατήριο σταθεράς k_2 και φυσικού μήκους ℓ_0 = 1 m, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Το κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης θ = 30^o και αρχικά το ελατήριο k_1 είναι παραμορφωμένο κατά Δx = 0,2 m. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα μάζας m_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενώ το σώμα μάζας m_2 αρχικά πέφτει ελεύθερα και μόλις το άκρο του ελατηρίου πατήσει στο έδαφος (στιγμή που θεωρούμε ως t = 0), κολλάει σ' αυτό χωρίς απώλειες ενέργειας. Η ταλάντωση που εκτελεί κατόπιν το σώμα μάζας m_2 έχει εξίσωση απομάκρυνσης $x_2 = A_2 ημ(10t + \frac{5π}{6})$ S.I. Να βρείτε:

α. την σταθερά k_1 του ελατηρίου στο κεκλιμένο επίπεδο.

β. την μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύει το ελατήριο σταθεράς k_1.

γ. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής όταν το σώμα μάζας m_1 διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

δ. την αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος μάζας m_2 (πριν κόψουμε το νήμα) θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο.

ε. την ελάχιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος μάζας m_2

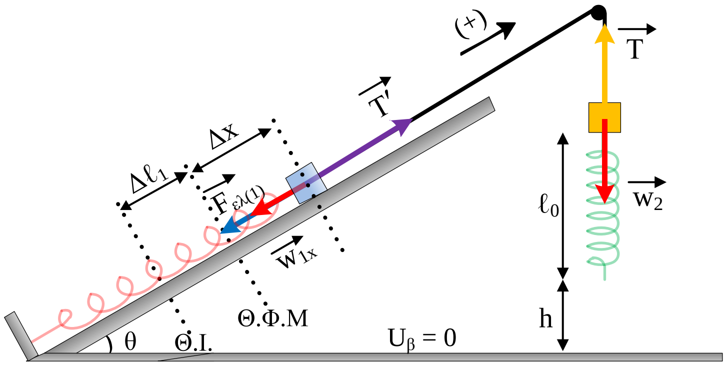
Θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα πάνω για την ταλάντωση του σώματος μάζας m_2. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

α. Η συνιστώσα του βάρους του σώματος μάζας m_1 έχει μέτρο $w_{1x} = m_1 g ημθ \Rightarrow \mathbf{w_{1x} = 20\,N}$

Από την ισορροπία του σώματος μάζας m_2 έχουμε:

$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{w}_2+\vec{T}=0 \Rightarrow T=w_2 \Rightarrow \mathbf{T = 60\,N}$

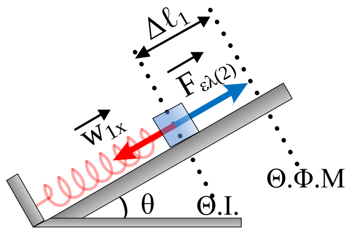


Επειδή για τα μέτρα έχουμε $T > w_{1x}$ για να ισορροπεί το σώμα μάζας m_1 θα πρέπει η δύναμη που δέχεται από το ελατήριο να είναι ομόρροπη της συνιστώσας του βάρους $\vec{w}_{1x}$, όπως στο σχήμα. Άρα:

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow \vec{T}'+\vec{w}_{1x}+\vec{F}_{\varepsilon\lambda(1)}=0 \Rightarrow T'=w_{1x}+F_{\varepsilon\lambda(1)} \overset{T'=T}{\Rightarrow} F_{\varepsilon\lambda(1)}=T-w_{1x} \Rightarrow k_1\Delta x=T-w_{1x} \Rightarrow k_1=\frac{T-w_{1x}}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\mathbf{k_1 = 200\frac{N}{m}}.$$

β. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 είναι κάτω από τη θέση φυσικού μήκους κατά: $\Sigma\vec{F}_x=0 \Rightarrow \vec{w}_{1x}+\vec{F}_{\varepsilon\lambda(2)}=0 \Rightarrow w_{1x}=F_{\varepsilon\lambda(2)} \Rightarrow$



$$k_1\Delta\ell_1=w_{1x} \Rightarrow \Delta\ell_1=\frac{w_{1x}}{k_1} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_1 = 0{,}1\,m}$$

Η ταλάντωση γίνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας και απέχει απ' αυτήν (την στιγμή που κόβεται το νήμα)

$A_1 = \Delta\ell_1 + \Delta x \Rightarrow \mathbf{A_1 = 0{,}3\ m}$

Κατά την διάρκεια της ταλάντωσης το ελατήριο υφίσταται μέγιστη παραμόρφωση $\Delta\ell_{max} = \Delta\ell_1 + A_1$

$\Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_{max} = 0{,}4\ m}$. Άρα $U^{\varepsilon\lambda}_{max}=\frac{1}{2}k_1\Delta\ell^2_{max} \Rightarrow \mathbf{U^{\varepsilon\lambda}_{max} = 16\,J}$.

γ. .Τη στιγμή που το σώμα μάζας m_1 περνά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, η μόνη δύναμη που του ασκείται στην διεύθυνση της κίνησης του είναι η συνιστώσα του βάρους του $\vec{w}_{1x}$. Άρα:

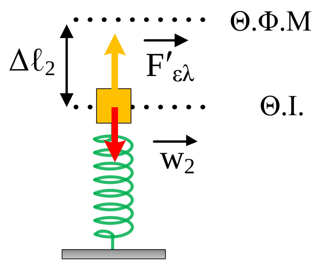
$$\left|\frac{dp}{dt}\right|=|\Sigma F|=w_{1x} \Rightarrow \mathbf{\left|\frac{dp}{dt}\right| = 20\frac{kg\cdot m}{s^2}}$$

δ. Το σώμα μάζας m_2 μετά το κόψιμο του νήματος κάνει ελεύθερη πτώση.

Σύμφωνα με τη σχέση $x_2=A_2\eta\mu(10t+\frac{5\pi}{6})$ (S.I.) προκύπτει ότι η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι:

$$\upsilon_2=\upsilon_{max,2}\sigma\upsilon\nu(10t+\frac{5\pi}{6})\ \text{(S.I.)}.$$

Στην ισορροπία ισχύει: $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{w}_2 + \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow w_2 = F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow k_2\Delta\ell_2 = m_2 g \Rightarrow$



$m_2\omega_2^2\Delta\ell_2 = m_2 g \Rightarrow \Delta\ell_2 = \dfrac{g}{\omega_2^2} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_2 = 0,1\,m}$

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης για t = 0 (στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο), έχουμε: $x_2 = A_2\eta\mu(\dfrac{5\pi}{6}) \Rightarrow x_2 = \dfrac{A_2}{2}$

Αλλά την t = 0 ισχύει επίσης και $x_2 = \Delta\ell_2$, άρα από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει: $0,1 = \dfrac{A_2}{2} \Rightarrow \mathbf{A_2 = 0,2\,m}$ και η εξίσωση της ταχύτητας τελικά είναι: $\upsilon_2 = 2\sigma\upsilon\nu(10t + \dfrac{5\pi}{6})$

Την χρονική στιγμή (t = 0) που το ελατήριο ακουμπά το δάπεδο το σώμα μάζας m_2 έχει ταχύτητα μέτρου $|\upsilon_2| = \left|2\sigma\upsilon\nu(\dfrac{5\pi}{6})\right| \Rightarrow \mathbf{|\upsilon_2| = \sqrt{3}\,\dfrac{m}{s}}$.

Εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. από τη στιγμή που το νήμα κόβεται μέχρι τη στιγμή που το ελατήριο σταθεράς k_2 ακουμπά στο έδαφος. $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = m_2 gh \Rightarrow h = \dfrac{\upsilon_2^2}{2g} \Rightarrow \mathbf{h = 0,15\,m}$. Δηλαδή το σώμα μάζας m_2 βρίσκεται αρχικά πάνω από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας σε ύψος $H = h + \ell_0 \Rightarrow$ **H = 1,15 m**

Άρα $U_{\alpha\rho\chi} = m_2 gH \Rightarrow$ **$U_{\alpha\rho\chi}$ = 69 J**.

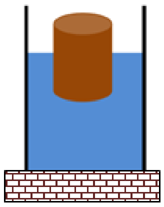
ε. Την ελάχιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια το σώμα μάζας m_2 την έχει όταν βρεθεί στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης του δηλαδή όταν το ελατήριο έχει μέγιστη παραμόρφωση.

οπότε $\Delta\ell'_{max} = \Delta\ell_2 + A_2 \Rightarrow$ **$\Delta\ell'_{max}$ = 0,3 m.** και το μήκος του ελατηρίου εκείνη τη στιγμή είναι

$\ell = \ell_0 - \Delta\ell'_{max} \Rightarrow$ **ℓ = 0,7 m**.

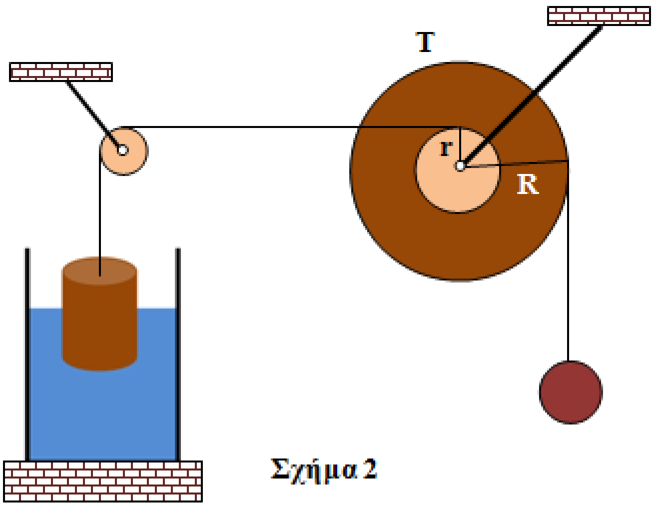
Συνεπώς η ελάχιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι: $U_{min} = m_2 g\ell \Rightarrow$ **U_{min} = 42 J**.

Θέμα Δ



Σχήμα 1

Ένας κύλινδρος μάζας m = 8kg και εμβαδού βάσης $A = 50.10^{-3}\ m^2$ επιπλέει όρθιος και ηρεμεί σε ισορροπία μέσα υγρό όπως φαίνεται στο σχήμα 1.
Το δοχείο που περιέχει το υγρό έχει εμβαδόν βάσης $A_1 = 200\ .10^{-3} m^3$ και στη θέση αυτή η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται σε ύψος h=1m από τον πυθμένα του δοχείου.
Α. Αγνοείστε την ατμοσφαιρική πίεση και υπολογίστε τη δύναμη που δέχεται ο πυθμένας του δοχείου από το υγρό.
Η πυκνότητα του υγρού είναι $\rho = 1000 kg/m^3$, και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.



Σχήμα 2

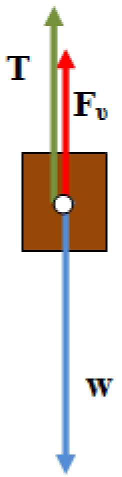
Β. Δένουμε τον κύλινδρο σε κατακόρυφο αβαρές και μη εκτατό νήμα (ιδανικό νήμα) , όπως στο σχήμα 2 και φέρνουμε το σύστημα σε ισορροπία.
Η διπλή τροχαλία Τ που φαίνεται στο σχήμα 2 έχει ακτίνες R = 2r = 0,4m , ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά της $I = 0{,}04 Kgm^2$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές ως προς οριζόντιο ακλόνητο άξονα κάθετο στο επίπεδό της διερχόμενο από το κέντρο μάζας της.
Τα νήματα δεν γλιστρούνε πάνω στις τροχαλίες.
Στο κάτω άκρο του ιδανικού νήματος που περιβάλει τον μεγάλο τροχό της τροχαλίας είναι δεμένη σφαίρα μάζας m_1 =2kg.
Β1. Να υπολογίσετε την πίεση στη βάση του κυλίνδρου που είναι βυθισμένη στο υγρό στη θέση ισορροπίας που φαίνεται στο σχήμα 2.
Β2. Να εξετάσετε αν το ύψος του υγρού στη νέα κατάσταση ισορροπίας βρίσκεται χαμηλότερα ή ψηλότερα από την αρχική θέση ισορροπίας στο σχήμα 1, και στη συνέχεια να βρείτε τη διαφορά των υψών.

Γ. Κάποια χρονική στιγμή κόβεται το κατακόρυφο νήμα που συνδέει τον κύλινδρο με την τροχαλία.
Γ1. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος σφαίρα – τροχαλία-κατακόρυφο νήμα , αμέσως μετά.
Γ2. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας τη στιγμή που η σφαίρα θα έχει μετακινηθεί από την αρχική της θέση προς τα κάτω κατά 1,8 m.

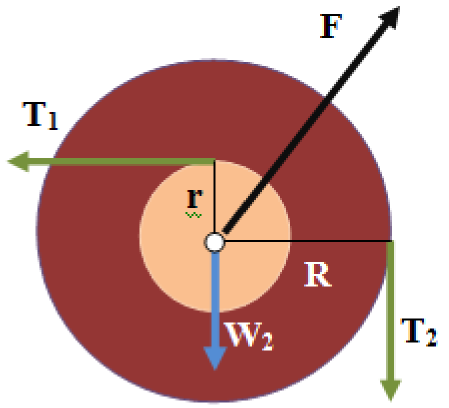
Απάντηση

Α. $F_\pi = p_\pi \cdot A_1 = \rho g h A_1 = 2000N$.

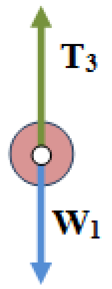
Β1. Στον κύλινδρο ασκείται το βάρος του **w** η τάση του νήματος **Τ** και η δύναμη από το υγρό $\mathbf{F_\upsilon}$ όπως στο σχήμα 2. Από την ισορροπία του κυλίνδρου προκύπτει ότι $F_\upsilon = w - T$ (1)



κύλινδρος
σχήμα 3



τροχαλία
σχήμα 4



σφαίρα
σχήμα 5

Από την στροφική ισορροπία της τροχαλίας (σχήμα 4) προκύπτει ότι $T_1 r = T_2 R = T_2 2r$ ή $T_1 = 2T_2$ (2) όπου **T₁** η τάση του οριζόντιου νήματος και **T₂** η τάση του κατακόρυφου νήματος. Το βάρος **w₂** της τροχαλίας και η δύναμη στήριξης **F** έχουν μηδενικές ροπές και δεν επηρεάζουν την στροφική ισορροπία.

Όμως $T = T_1$ (3) (νήμα ιδανικό) και έτσι η (1) με βάση τις (2) και (3) γράφεται: $F_\upsilon = w - 2T_2 = mg - 2T_2$ (4)

Από την ισορροπία του σώματος Σ (σχήμα 5) προκύπτει ότι $w_1 = T_3$ ή $T_3 = m_1 g = 20\text{N}$ (5)

Αλλά $T_3 = T_2$ (νήμα ιδανικό) άρα $T_2 = 20\text{N}$ και με βάση την (5) $F_\upsilon = (80 - 40)\,\text{N} = 40\,\text{N}$

Οπότε $p = \dfrac{F_\upsilon}{A} = \dfrac{40}{5 \cdot 10^{-3}}\,\text{pa} = 8 \cdot 10^4\,\text{pa}$.

B2. Η δύναμη **F$_{\upsilon,\alpha\rho}$** που δέχεται ο κύλινδρος από το υγρό στην αρχική θέση ισορροπίας (σχήμα 1) είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος του αφού δεν υπάρχει ατμοσφαιρικός αέρας. Έτσι αν h_1 το ύψος του κυλίνδρου που είναι μέσα στο υγρό θα έχουμε:

$$F_{\upsilon,\alpha\rho} = mg \;\text{ ή }\; p_{\upsilon,\alpha\rho} A = mg \;\text{ ή }\; \rho g h_1 A = mg \quad \text{άρα } h_1 A = \frac{m}{\rho} = 8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3.$$

Στην νέα θέση ισορροπίας σχήμα 2 θα είναι $F_\upsilon = \rho g h_2 A$ ή $h_2 A = \dfrac{F_\upsilon}{\rho g} = 4 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$, όπου h_2 το ύψος του κυλίνδρου που είναι μέσα στο υγρό στη θέση αυτή.

Επομένως στη νέα θέση ισορροπίας έχει μειωθεί ο όγκος του κυλίνδρου που είναι βυθισμένος στο υγρό, κατά συνέπεια θα έχει ελαττωθεί και όγκος του υγρού που εκτοπίζει, οπότε η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού θα βρίσκεται χαμηλότερα στη νέα θέση σε σχέση με την αρχική θέση (σχ1).

Στην αρχική θέση ο όγκος του υγρού είναι $V = A_1 h - h_1 A = 192 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$

Στη νέα θέση ο όγκος του δοχείου θα είναι $V = A_1 \cdot h' - h_2 A$ ή $A_1 h' = V + h_2 A$ ή $h' = \dfrac{V + h_2 A}{A_1} = 0{,}98\text{m}$

Συνεπώς η ελεύθερη επιφάνεια έχει πέσει κατά $h - h' = 0{,}02\text{m}$.

Γ1. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος είναι ίσος με την συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων. Οι δυνάμεις του νήματος είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα, το βάρος της τροχαλίας και η δύναμη του άξονα είναι μεν εξωτερικές δυνάμεις αλλά έχουν μηδενικές ροπές επειδή τέμνουν τον άξονα.

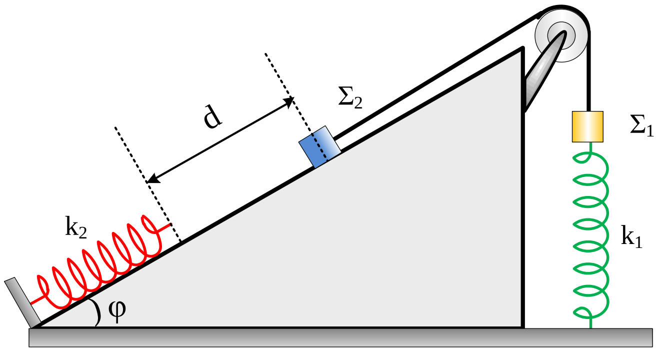
Οπότε $\dfrac{dL}{dt} = w_1 R = 8\text{Nm}$

Γ2. Μετά το κόψιμο του νήματος η τροχαλία επιταχύνεται γωνιακά και η σφαίρα μεταφορικά.

Με εφαρμογή της Αρχής διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα έχουμε ότι:

$m_1gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ όπου υ = ωR επειδή η γραμμική ταχύτητα στην περιφέρεια της τροχαλίας είναι ίση με την ταχύτητα του σώματος . Άρα $\omega = \sqrt{\frac{2m_1gh}{m_1R^2 + I}} = 10\sqrt{2}\,\mathrm{rad/s}$

Ūγε Ŭ Ά



Στο διπλανό σχήμα τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες m_1 = 0,5 kg και m_2 = 4 kg, αντίστοιχα και ισορροπούν όπως φαίνεται στο σχήμα. Το Σ_2 απέχει από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου σταθεράς k_2, απόσταση $d=\frac{2\pi^2}{45}\,m$ και με το κόψιμο του νήματος διανύει την απόσταση αυτή στο λείο κεκλιμένο επίπεδο ($\varphi = 30^o$), στο μισό χρόνο απ' αυτόν που χρειάζεται για να ακινητοποιηθεί στιγμιαία για πρώτη φορά. Μόλις το Σ_2 ακουμπήσει στο ελατήριο σταθεράς k_2 καρφώνεται σ' αυτό, χάνοντας μέρος της ενέργειας του και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση της μορφής $x_2 = A_2\eta\mu(\omega_2 t+\frac{11\pi}{6})$. Οι δύο ταλαντώσεις πραγματοποιούνται έχοντας ίσες ενέργειες ταλάντωσης. Να βρείτε:

α. σε πόσο χρόνο θα ακινητοποιηθεί το σώμα Σ_2 μετά το κόψιμο του νήματος

β. την σταθερά του ελατηρίου k_2

γ. το πλάτος της ταλάντωσης του Σ_2

δ. την απώλεια της ενέργειας του Σ_2 κατά το κάρφωμα στο ελατήριο

ε. το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της ορμής στο Σ_1

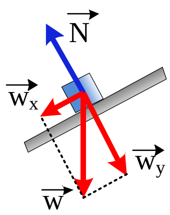
στ. το πλάτος και την σταθερά του ελατηρίου k_1.

Δίνεται g = 10 m/s^2, το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, ως στιγμή t_0 = 0 για την ταλάντωση του Σ_2 θεωρούμε τη στιγμή που ακουμπά στο ελατήριο.

Λύση

α. Το Σ_2 μετά το κόψιμο του νήματος και πριν ακουμπήσει στο ελατήριο κινείται με επιτάχυνση:

$$\Sigma\vec{F}_x = m_2\alpha \Rightarrow w_{2x} = m_2\alpha \Rightarrow m_2 g\cdot\eta\mu\varphi = m_2\alpha \Rightarrow \alpha = g\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 5\frac{m}{s^2}}.$$



Οπότε $d=\frac{1}{2}\alpha\Delta t_1^2 \Rightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2d}{\alpha}} \Rightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2\frac{2\pi^2}{45}}{5}}s \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t_1 = \frac{2\pi}{15}s}$

Άρα για να ακινητοποιηθεί στιγμιαία για πρώτη φορά χρειάζεται άλλο τόσο χρόνο $\mathbf{\Delta t_2 = \frac{2\pi}{15} s}$ έτσι λοιπόν θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία για πρώτη φορά μετά από χρονικό διάστημα $\mathbf{\Delta t = \frac{4\pi}{15} s}$ μετά το κόψιμο του νήματος.

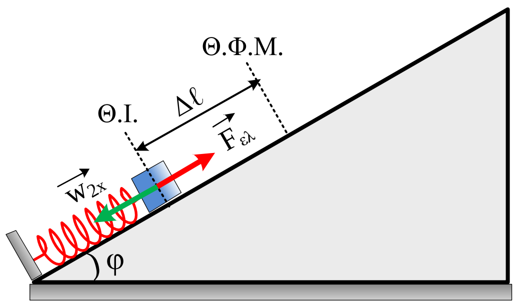
β. Σύμφωνα με την εξίσωση της απομάκρυνσης την στιγμή που ακουμπά το σώμα στο ελατήριο βρισκόμαστε στον αρνητικό ημιάξονα ($x_2 = A_2 \eta\mu(\frac{11\pi}{6}) < 0$) άρα το σώμα θα σταματήσει για πρώτη φορά όταν φτάσει στο θετικό άκρο (το προς τα κάτω). Άρα για $t_1 = \frac{2\pi}{15} s$:

$$A_2 = A_2 \eta\mu(\omega_2 \frac{2\pi}{15} + \frac{11\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(\omega_2 \frac{2\pi}{15} + \frac{11\pi}{6}) = 1 \Rightarrow \omega_2 \frac{2\pi}{15} + \frac{11\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_2 \frac{2}{15} = 2\kappa - \frac{4}{3} \Rightarrow \omega_2 = 15\kappa - 10$$

$\mathbf{\omega_2 = 5\ rad/s}$. Άρα $k_2 = m_2 \omega_2^2 \Rightarrow \mathbf{k_2 = 100 \frac{N}{m}}$.

γ. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_2 βρίσκεται κάτω από το φυσικό μήκος κατά: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_{2x} \Rightarrow$

$$k_2 \Delta\ell = m_2 g \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow \Delta\ell = \frac{m_2 g \cdot \eta\mu\varphi}{k_2} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,2\,m}$$



Όταν το σώμα ακουμπά στο ελατήριο ($t_0 = 0$) η ταλάντωση ξεκινά με απομάκρυνση αλγεβρικής τιμής $x_2 = -\Delta\ell = -0,2$ m. Άρα για $t_0 = 0$ έχουμε: $-0,2\,m = A_2 \eta\mu(\frac{11\pi}{6}) \Rightarrow -0,2\,m = A_2(-\frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbf{A_2 = 0,4\,m}$

δ. Την στιγμή που ακουμπά το Σ_2 στο ελατήριο έχει ταχύτητα $\upsilon = \alpha\Delta t \Rightarrow \upsilon = 5\frac{2\pi}{15} \Rightarrow \mathbf{\upsilon = \frac{2\pi}{3} \frac{m}{s}}$

Η ταλάντωση ξεκινά με ταχύτητα $\upsilon' = \omega_2 A_2 \sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \mathbf{\upsilon' = \sqrt{3} \frac{m}{s}}$

Η απώλεια είναι $E_{\alpha\pi} = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2 - \frac{1}{2} m_2 \upsilon'^2 \Rightarrow E_{\alpha\pi} = (\frac{1}{2} 4 \frac{4\pi^2}{9} - \frac{1}{2} 4 \cdot 3)\,J \Rightarrow \mathbf{E_{\alpha\pi} = \frac{26}{9} J}$

ε. Από την ισορροπία του Σ_2 έχουμε: $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow w_{2x}=T \Rightarrow \mathbf{T=20\,N}$

Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό οπότε στα άκρα του ασκεί ίδιου μέτρου δύναμη.

Η αρχική θέση ισορροπίας του Σ_1 μόλις κοπεί το νήμα αποτελεί άκρο για την ταλάντωση, άρα εκεί θα έχουμε και μέγιστη δύναμη.

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\Sigma\vec{F} \Rightarrow \left.\frac{dp}{dt}\right|_{max}=F_{\varepsilon\lambda,1}+w_1=T \Rightarrow \left.\mathbf{\frac{dp}{dt}}\right|_{\mathbf{max}}\mathbf{=20\,\frac{kg\cdot m}{s^2}}$$

στ. Από την παραπάνω σχέση είδαμε ότι $\left.\frac{dp}{dt}\right|_{max}=F_{max} \Rightarrow \mathbf{F_{max}=20\,N}$

Η ενέργεια της ταλάντωσης του Σ_2 είναι: $E_2=\frac{1}{2}k_2A_2^2 \Rightarrow E_2=8\,J$ άρα και $\mathbf{E_1=8\ J}$.

Ισχύει: $\frac{E_1}{F_{max}}=\frac{\frac{1}{2}k_1A_1^2}{k_1A_1} \Rightarrow \frac{E_1}{F_{max}}=\frac{A_1}{2} \Rightarrow A_1=\frac{2E_1}{F_{max}} \Rightarrow \mathbf{A_1=0,8\,m}$

και επειδή $F_{max}=20$ N, έχουμε: $F_{max}=k_1A_1 \Rightarrow \mathbf{k_1=25\ N/m}$.