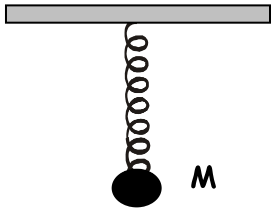
Πρόβλημα

Σε ένα ομοιόμορφο ελατήριο σταθεράς επαναφοράς κ, κρεμάμε μια μάζα Μ, και όταν αυτή ισορροπεί το μήκος του ελατηρίου είναι L. Το σύστημα τίθεται σε ταλάντωση. Να υπολογισθεί η κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης. Δίνεται ότι το ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke, και ότι η μάζα του είναι m.

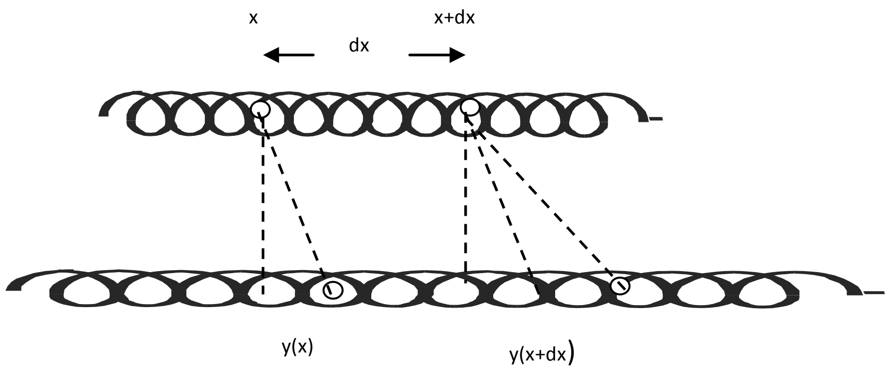


Απάντηση:

Όταν το σύστημα τεθεί σε ταλάντωση, διαμήκη κύματα διαδίδονται στο ελατήριο και τελικά έχουμε στάσιμα κύματα.

Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα διάδοσης διαμήκους διαταραχής στο ελατήριο.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν η σταθερά ενός ομοιόμορφου ελατηρίου μήκους L_1 είναι $κ_1$, τότε τμήμα αυτού μήκους L_2 έχει $κ_2=κ_1. L_1/L_2$



Κατά την διάδοση μιας διαταραχής στο ελατήριο, ένα τμήμα dx (δες σχήμα) έχει σταθερά κ(dx)=κ.L/dx. Αν η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας στις θέσεις x και x+dx είναι αντίστοιχα y(x) και y(x+dx) τότε η τείνουσα δύναμη στα άκρα είναι F=κ(dx).{ y(x+dx)- y(x) }= κ.L/dx.{ y(x+dx)- y(x) }. Άρα σε κάθε θέση x ορίζεται δύναμη

$$F(x) = K.\frac{\partial y}{\partial x}$$

με K=κ.L , μέτρο ελαστικότητας του ελατηρίου.

Ένα στοιχειώδης τμήμα dx έχει μάζα dm=μ.dx, όπου μ=m/L η γραμμική πυκνότητα. Η συνισταμένη δύναμη πάνω σε αυτό το τμήμα είναι

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx = K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα για το στοιχειώδες τμήμα έχουμε

$$dF = dm.a$$

$$K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{K}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

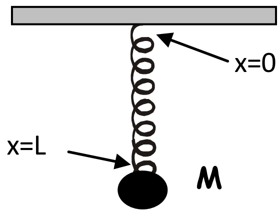
Άρα έχουμε διάδοση διαταραχής με ταχύτητα $u = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$. Άρα

$$u = L\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

Όπου κ η σταθερά του ελατηρίου

Για το πρόβλημά μας, θεωρούμε θετική φορά αυτή προς τα κάτω, και ως θέση

x=0 το ανώτατο σημείο στο οποίο είναι συνδεδεμένο το ελατήριο και για το οποίο είναι y(0,t)=0.



Στο ελατήριο σχηματίζονται στάσιμα κύματα με γενική εξίσωση

$y(x,t) = (Asinkx + Bcoskx).sin\omega t$

Από την συνθήκη y(0,t)=0 προκύπτει ότι B=0 οπότε η μορφή της λύσης είναι:

$$y(x,t) = A.sinkx.sin\omega t$$

Στη θέση x=L ισχύει F=M.a. Επομένως έχουμε:

$$M.\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=L} = -K.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=L}$$

Άρα παίρνουμε την συνθήκη

$$-M\omega^2 sinkL = -Kkcos kL$$

Είναι $k = \frac{\omega}{u} = \frac{\omega}{L}\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$ και $K = \kappa.L$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$M.\omega\tan\left(\omega\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\right) = \kappa\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$$

Από την παραπάνω εξίσωση προσδιορίζεται με διάφορες προσεγγίσεις η κυκλική συχνότητα ω.

Μια πρώτη προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε τη μάζα m του ελατηρίου πολύ μικρή και να στο ανάπτυγμα Taylor για την $\tan\left(\omega\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\right)$ να κρατήσουμε τους δύο πρώτους όρους:

$$M.\omega\left\{\omega\sqrt{\frac{m}{\kappa}} + 1/3.\left(\omega\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\right)^3\right\} = \kappa\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$$

Οπότε έχουμε:

$$\omega^2\left(1+\frac{\omega^2 m}{3\kappa}\right)=\frac{\kappa}{M}$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε το ω^2 της παρένθεσης με αυτό του ελατηρίου χωρίς μάζα, δηλ με την τιμή κ/M, παίρνουμε την προσεγγιστική τιμή

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{M+\frac{m}{3}}}$$