Σημειακό αντικείμενο μάζας $\boldsymbol{m}$ βρίσκεται εντός πεδίου βαρύτητας έντασης $\boldsymbol{g}$ και επί ακλόνητης οριζόντιας επίπεδης επιφανείας με την οποία παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\boldsymbol{\mu_{o\lambda}} \approx \boldsymbol{\mu_{o\rho}} \approx \boldsymbol{\mu}$. Κάποια στιγμή δέχεται δύναμη μέτρου $\boldsymbol{F}$.

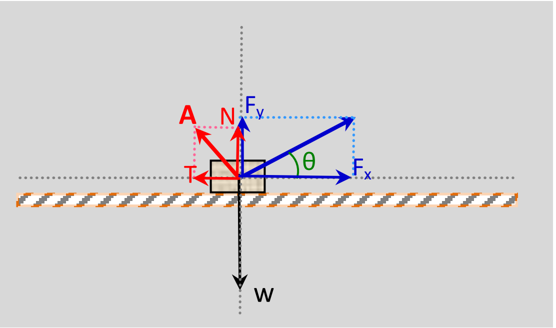
Α) Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε το σώμα να μην χάσει την επαφή του με την επιφάνεια.

*Β) Με δεδομένη την συνθήκη που υπολογίσατε στο Α ερώτημα (ώστε το αντικείμενο να μν χάνει την επαφή του με την επιφάνεια) ,να βρεθεί η γωνία $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ που πρέπει να σχηματίζει ο φορέας της δύναμης μέτρου **F** , με την οριζόντια επιφάνεια ώστε το αντικείμενο να αποκτά μέγιστη οριζόντια επιτάχυνση .*

Γ) Να βρεθεί η μέγιστη οριζόντια επιτάχυνση που θα αποκτήσει το αντικείμενο.

(Υπόδειξη : Σε όλα τα ρωτήματα να θεωρηθούν σταθερά και δεδομένα τα μεγέθη $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{F}$)

Απάντηση.



Σχεδιάζουμε τις τρεις δυνάμεις :

$\vec{\boldsymbol{w}} = m\vec{g}$ *το βάρος του αντικειμένου από την γη*

$\vec{\boldsymbol{F}}$ *: η εξωτερική δύναμη και*

$\vec{\boldsymbol{A}}$*: η δύναμη από το επίπεδο …*

… και τις αναλύουμε (προτιμότερο είναι να αναλύσουμε πρώτα την F ώστε να εκτιμήσουμε περίπου την κατακόρυφη συνιστώσα της Α, που είναι η δύναμη στήριξης Ν, που απαιτείται για να έχουμε $\Sigma F_y=0$)

Α) *Για να μην χάνεται η επαφή του αντικειμένου με το οριζόντιο επίπεδο :* $N \geq 0$

Αλλά $\Sigma \vec{F}_y = 0 \implies N + F \cdot sin\theta = mg \implies N = mg - F \cdot sin\theta \geq 0 \implies \boldsymbol{sin\theta} \leq \dfrac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{F}}$ ❶

Β) $a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{F_x - T}{m} = \frac{F \cdot cos\theta - \mu N}{m} = \frac{F \cdot sin\theta - \mu \cdot (mg - F \cdot sin\theta)}{m} \implies$

$$\implies a = \frac{F}{m} \cdot (cos\theta + \mu \cdot sin\theta) - \mu g \quad ❷$$

η συνάρτηση $f(\theta) = cos\theta + \mu \cdot sin\theta$ παρουσιάζει ακρότατο (τοπικό μέγιστο) όταν η πρώτη παράγωγος αυτής μηδενιστεί. Δηλαδή έχουμε μεγιστοποίηση της επιτάχυνσης όταν:

$\dot{f}(\theta) = -sin\theta + \mu \cdot cos\theta = 0 \implies sin\theta = \mu \cdot cos\theta \implies \boldsymbol{tan\theta = \mu}$ ❸

ή $\boldsymbol{\theta = arc\,tan(\mu)}$ ❹

Γ) Η σχέση $a = \frac{F}{m} \cdot (cos\theta + \mu \cdot sin\theta) - \mu g$ ❷

και επειδή $cos\theta = \frac{1}{\sqrt{tan^2\theta+1}}$ και $sin\theta = \frac{tan\theta}{\sqrt{tan^2\theta+1}}$ **{ δείτε αποδείξεις στο τέλος }**

γράφεται: $a = \frac{F}{m} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{tan^2\theta+1}} + \mu \cdot \frac{tan\theta}{\sqrt{tan^2\theta+1}} \right) - \mu g$ ❺

και λαμβάνει σύμφωνα με τα προηγούμενα την μέγιστη τιμή της $\boldsymbol{\alpha_{max}}$ όταν $\boldsymbol{tan\theta = \mu}$ ❸ ...

Άρα : $\boldsymbol{\alpha_{max}} = \frac{F}{m} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}} + \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2+1}} \right) - \mu g \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{max} = \frac{F}{m} \cdot \left(\sqrt{\mu^2+1}\right) - \mu g}$ ❻

Παρατηρήσεις :

1. Αν δεν είναι δεδομένο ότι το αντικείμενο δεν ανασηκώνεται και εμείς θέλουμε μέγιστο μέτρο οριζόντιας επιτάχυνσης, τότε...

Η ❻ ισχύει υπό την προϋπόθεση βεβαίως της $sin\theta \leq \frac{mg}{F}$ ❶

η οποία τώρα μπορεί να μεταγραφεί και ως $tan\theta \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{F^2}{m^2 \cdot g^2} - 1}}$

Συνεπώς αν $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{F^2}{m^2 \cdot g^2} - 1}}$

Θα έχουμε άλλη τιμή για την μέγιστη οριζόντια επιτάχυνση την οποία υπολογίζουμε αντικαθιστώντας στην $a = \frac{Fcos\theta}{m}$ το $cos\theta = \sqrt{1 - sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{m^2 \cdot g^2}}$ αφού για κάθε μεγαλύτερη γωνία όχι μόνο το αντικείμενο θα χάσει την επαφή του αλλά θα μειωθεί και η οριζόντια συνιστώσα της επιτάχυνσης αφού μειώνεται το cosθ. Έτσι $\boldsymbol{\alpha_{max}} = \boldsymbol{\frac{F}{m}} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{F^2}{m^2 \cdot g^2}} \right)$

2. Αν δεν ζητάμε την μεγιστοποίηση της οριζόντιας επιτάχυνσης αλλά γενικώς της επιτάχυνσης και από τα δεδομένα προκύπτει ότι $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{F^2}{m^2 \cdot g^2} - 1}}$ δηλαδή το αντικείμενο ανασηκώνεται πριν να μεγιστοποιηθεί η (μέχρι εκείνη την στιγμή οριζόντια) επιτάχυνση , τότε :....

Τότε και πάλι $\boldsymbol{\alpha_{max}} = \boldsymbol{\frac{F}{m}} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{F^2}{m^2 \cdot g^2}} \right)$ αφού οι δυνάμεις F και w έχουν σταθερό μέτρο και αναγκαστικά σχηματίζουν γωνία αμβλεία (θ+ 90°) οπότε κάθε αύξηση της μεταξύ τους γωνίας αναγκαστικά θα μειώσει την συνισταμένη τους η οποία την στιγμή της απώλειας επαφής είναι :

$\Sigma F = \boldsymbol{F} \left(\sqrt{1 - \frac{F^2}{m^2 \cdot g^2}} \right)$

3. ***Ομοίως*** *μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι και για* ***κεκλιμένο επίπεδο σταθερής κλίσης φ****, ισχύει ότι η μέγιστη επιτάχυνση ανόδου είναι :*

$$\alpha_{max} = \frac{F}{m} \cdot \left(\sqrt{\mu^2+1}\right) - g \cdot (\sin\varphi + \mu \cos\varphi) \ , \quad \forall \quad \mu \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{F^2}{m^2 \cdot g^2 \cdot \cos^2\varphi} - 1}} \quad \text{και}$$

$$\alpha_{max} = \frac{F}{m} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{F^2}{m^2 \cdot g^2 \cdot \cos^2\varphi}}\right) \ , \qquad \forall \quad \mu \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{F^2}{m^2 \cdot g^2 \cdot \cos^2\varphi} - 1}} \quad \text{και}$$

(Πριν 7 περίπου χρόνια, μετά από δικό μου ερώτημα σε παρόμοιο θέμα είχε επιλυθεί με μια εκπληκτική γεωμετρική απόδειξη από τον Διονύση Μητρόπουλο στο ylikonet.ning …αλλά δυστυχώς δεν μπόρεσα να το ξαναβρώ)

Αποδείξεις τριγονομετρικών σχέσεων:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\theta \cdot \tan^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \quad \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta - \sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \sin^2\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta \cdot (1 + \tan^2\theta) = \tan^2\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \quad \Rightarrow$$