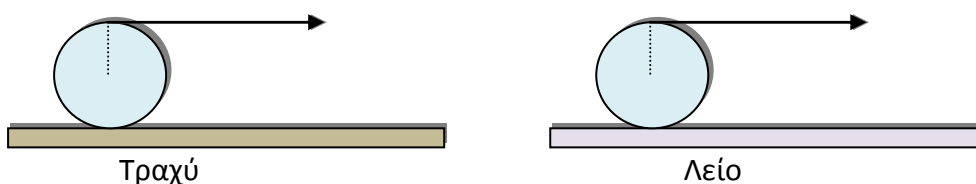


## ΕΝΑ Β ΘΕΜΑ

Ο κύλινδρος του διπλανού σχήματος διαθέτει μια αμελητέου βάθους εγκοπή στην περιφέρειά του, στην οποία είναι τυλιγμένο πολλές φορές γύρω του μη εκτατό και αβαρές νήμα. Ο κύλινδρος έχει μάζα  $m$ , έχει ακτίνα  $R$  και ροπή αδράνειας  $I_{cm} = MR^2/2$  και βρίσκεται ακίνητος πάνω σε οριζόντιο τραχύ δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής  $\mu$ . Ασκούμε στο άκρο του νήματος οριζόντια σταθερή δύναμη  $F$  και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει ξεκινώντας από την ηρεμία χωρίς το νήμα να ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο.



**A)** η μέγιστη οριζόντια δύναμη  $F_{max}$  που μπορούμε να ασκήσουμε στο άκρο του νήματος έτσι ώστε ο κύλινδρος να μην ολισθαίνει στο τραχύ δάπεδο είναι:  
 α)  $\mu mg/4$     β)  $\mu mg/3$     γ)  $mg3\mu$

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα τοποθετώντας τον κύλινδρο σε λείο δάπεδο ασκώντας στο άκρο του νήματος την ίδια οριζόντια δύναμη  $F$ .

**B)** το πηλίκο των επιταχύνσεων του κέντρου μάζας που αποκτά ο κύλινδρος στο τραχύ δάπεδο που κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, προς την επιτάχυνση που αποκτά το κέντρο μάζας του στο λείο δάπεδο είναι  
 α)  $2/3$     β)  $7/5$     γ)  $4/3$

**Γ)** Το πηλίκο της κινητικής ενέργειας που αποκτά ο κύλινδρος στο τραχύ προς την κινητική ενέργεια που αποκτά στο λείο δάπεδο για ίση χρονικά μετατόπιση του κέντρου μάζας του από την ηρεμία είναι:  
 α)  $4/5$     β)  $8/7$     γ)  $8/9$

**Δ)** Για να ξεκινήσει να κυλιέται ο κύλινδρος χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο μετά την άσκηση της οριζόντιας  $F$  στην άκρη του νήματος τότε θα έπρεπε η ακτίνα της εγκοπής στην οποία είναι τυλιγμένο το νήμα να είναι:  
 α)  $R/3$     β)  $R/5$     γ)  $R/2$   
 εξαρτάται η απάντηση από το μέτρο της  $F$ ;

**Ε)** Αν ασκούσαμε στο άκρο του νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του κυλίνδρου που βρίσκεται στο τραχύ δάπεδο οριζόντια δύναμη διπλάσια από αυτήν που θα του επέτρεπε να μην ολισθαίνει οριακά τότε το ποσοστό της προσφερόμενης στον κύλινδρο ενέργειας, που μετατρέπεται σε κινητική είναι:  
 α)  $99/102\%$     β)  $87/90\%$     γ)  $92/110\%$

## Συνοπτική λύση

**A)** αφού κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο τραχύ

δάπεδο τότε ισχύει  $u = u_{\gamma\rho} = \omega R$  άρα

ισχύει  $\alpha = \alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma R}$

$$\Sigma F_X = ma$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma}$$

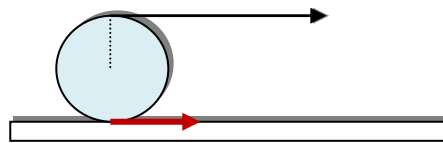
$$\Sigma F_Y = 0$$

$$F + T = ma \quad (1)$$

$$FR - TR = \alpha m R^2 / 2R$$

$$mg = N$$

$$F - T = ma / 2$$



Άρα έχουμε  $T = F/3$  κάθε στιγμή όμως η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι η οριακή τριβή  $T_{\text{οριακή}} = \mu N = mg\mu$ , δηλαδή στην  $F_{\text{max}}$  αντιστοιχεί η οριακή τριβή άρα  **$F_{\text{max}} = 3mg\mu$  άρα  $\gamma$  σωστή**

**B)** από (1) έχουμε  $\alpha_1 = (F+T)/m \rightarrow \alpha_1 \rightarrow 4F/3m$ . Τώρα για τον κύλινδρο στο λείο δάπεδο έχουμε  $\Sigma F_X = ma_2 \rightarrow a_2 = F/m$  άρα  **$\alpha_1/\alpha_2 = 4/3$  άρα  $\gamma$  σωστή**

**Γ)** στην περίπτωση του κυλίνδρου στο τραχύ δάπεδο το σημείο εφαρμογής Z

της F έχει επιτάχυνση  $\alpha_{Z\chi} = \alpha_1 + \alpha_{\epsilon\pi} = 2\alpha_1$  άρα  $\Delta\chi_Z = \alpha_{Z\chi} \Delta t^2 / 2 = 2\alpha_1 \Delta t^2 / 2 = 2\Delta\chi$

άρα από ΘΜΚΕ έχουμε  $K_{\text{TEΛ}} - K_{\text{ΑΡΧ}} = W_F \rightarrow K_{\text{TEΛ1}} = 2F\Delta\chi$

στην περίπτωση του κυλίνδρου στο λείο έχουμε:  $\alpha_{\gamma} = \Sigma \tau / I = FR / I = 2F/mR$  (2) άρα

τότε  $\alpha_{Z\chi} = \alpha_2 + \alpha_{\gamma R} = F/m + 2F/m = 3F/m = 9\alpha_1/4$  οπότε στην περίπτωση αυτή

$\Delta\chi_Z = \alpha_{Z\chi} \Delta t^2 / 2 = 2,25\Delta\chi$  άρα από ΘΜΚΕ έχουμε  $K_{\text{TEΛ}} - K_{\text{ΑΡΧ}} = W_F \rightarrow K_{\text{TEΛ2}} = 2,25F\Delta\chi$

άρα ο λόγος  **$K_1/K_2 = 8/9$  άρα  $\gamma$  σωστή**

**Δ)** η εγκοπή έχει ακτίνα r και αφού ο κύλινδρος

κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει θα ισχύει  $u = u_{\gamma\rho} = \omega R$

άρα θα ισχύει  $\alpha = \alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma R}$  οπότε έχουμε :

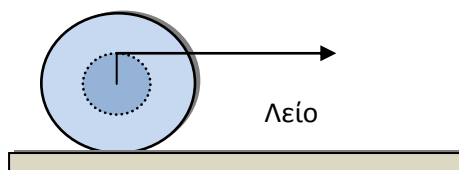
$$\Sigma F_X = ma$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma}$$

$$F = ma$$

$$Fr = \alpha m R^2 / 2R$$

άρα  $mar = ma R/2 \rightarrow r = R/2$  άρα το βάθος της εγκοπής από την περιφέρεια είναι  **$R/2$  δηλαδή  $\gamma$  σωστή. Το αποτέλεσμα δεν συνδέεται με το μέτρο της F.**



**Ε)** ο κύλινδρος τώρα θα ολισθαίνει αφού  $F > F_{\text{max}}$

άρα θα δέχεται τριβή ολίσθησης  $T = T_{\text{ορ}} = \mu mg$

**Φορά της  $T_{\text{ολίσθ}}$ : αν ο κύλινδρος δεν δέχονταν**

**τριβή τότε το σημείο επαφής του Λ με το δάπεδο**

**θα είχε μεταφορική επιτάχυνση  $\alpha_2 = F/m$  προς τα δεξιά και από  $\alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma R}$  όπου**

**(από σχέση 2)  $\alpha_{\gamma} = 2F/mR$  δηλαδή  $\alpha_{\epsilon\pi} = 2F/m$  προς τα αριστερά και αφού  $\alpha_{\epsilon\pi} > \alpha_2$**

**το Λ ξεκινώντας από την ηρεμία έχει 'πρόθεση κίνησης' προς τα αριστερά άρα η**

**τριβή ολίσθησης έχει φορά προς τα δεξιά.**

$$\Sigma F = ma \rightarrow F + T = ma \rightarrow 2F_{\text{max}} - T = ma \rightarrow 2 \cdot 3\mu mg + mg\mu = \alpha m \rightarrow \alpha = 7\mu g$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma} \rightarrow FR - TR = mR^2 \alpha_{\gamma} \rightarrow \alpha_{\gamma} = 10mg/R$$

άρα για τα σημεία της περιφέρειας ισχύει

$\alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma R} = 10\mu g$  άρα το σημείο εφαρμογής Z της F έχει  $\alpha_Z = \alpha + \alpha_{\epsilon\pi} = 17\mu g$  και σε χρόνο  $\Delta t$

το οποίο μετατοπίζεται κατά  $\Delta\chi_Z = \alpha_Z \Delta t^2 / 2$  ενώ αντίστοιχα το σημείο εφαρμογής Λ

της τριβής ολίσθησης αποκτά επιτάχυνση  $\alpha_{\Lambda} = \alpha - \alpha_{\epsilon\pi} = 7\mu g - 10\mu g = -3\mu g$  και σε χρόνο  $\Delta t$

μετατοπίζεται κατά  $\Delta\chi_{\Lambda} = \alpha_{\Lambda} \Delta t^2 / 2$ . Από ΘΜΚΕ για χρονικό διάστημα  $\Delta t$  από τη στιγμή

της εκκίνησης του κυλίνδρου έχουμε:  $K_{\text{TEΛ}} - K_{\text{ΑΡΧ}} = F\Delta\chi_Z + T\Delta\chi_{\Lambda} \rightarrow K = 6\mu mg \cdot 17\mu g \Delta t^2 / 2 -$

$- mg\mu \cdot 3\mu g \Delta t^2 / 2 \rightarrow K = 51mg^2 \mu^2 \Delta t^2 - 1,5mg^2 \mu^2 \Delta t^2 \rightarrow K = 49,5 mg^2 \mu^2 \Delta t^2$ , ενώ στο χρονικό

αυτό διάστημα η προσφερόμενη ενέργεια στον κύλινδρο, μέσω του έργου της F είναι

$E_{\text{ΠΡΟΣΦ}} = W_F = 51mg^2 \mu^2 \Delta t^2$  άρα  **$K/W = 99/102$  άρα  $99/102\%$  α σωστή**

