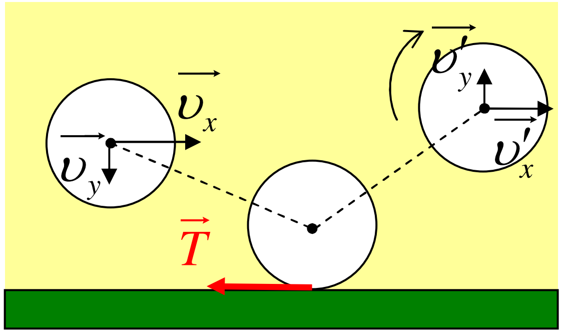
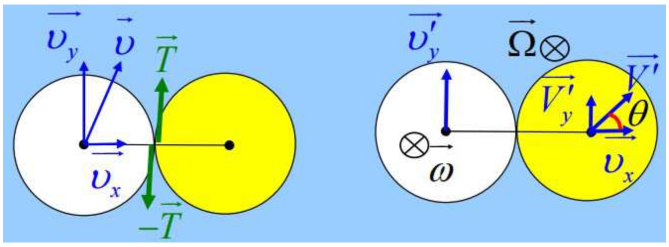
Διατήρηση στροφορμής ως προς το σημείο επαφής.

Υπάρχουν πολλά προβλήματα κρούσης τα οποία μπορούμε να εξηγήσουμε ποιοτικά, αλλά είναι δύσκολοι οι όποιοι υπολογισμοί. Δεν είναι βολικός ο υπολογισμός της ροπής μιας δύναμης που δρα για χρονικό διάστημα πολύ σύντομο. Ιδιαίτερα αν αυτή είναι η τριβή.

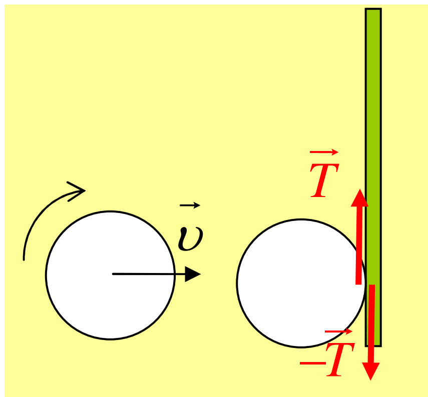
Μια μπάλα εκτελώντας μεταφορική κίνηση προσπίπτει σε τοίχωμα όχι λείο.
Η τριβή μειώνει την ταχύτητα στον x άξονα από τη μια και θέτει το σώμα σε περιστροφή.
Αν μας έλεγε κάποιος ότι τα σώματα είναι ελαστικά θα μπορούσαμε να πούμε πως η y ταχύτητα διατηρείται κατά μέτρον.
Υπολογισμοί όμως δύσκολοι.

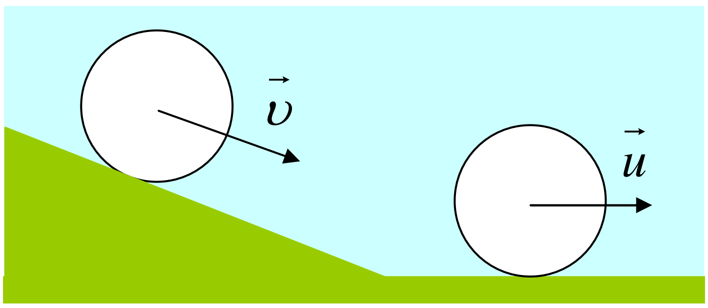




Η άσπρη μπάλα συγκρούεται με την ακίνητη κίτρινη. Αν ήταν λείες θα εκινούντο, μετά την κρούση, με ταχύτητες κάθετες μεταξύ τους.
Τώρα όμως δρουν οι τριβές.
Η άσπρη δεν διατηρεί την y ταχύτητά της και η κίτρινη αποκτά μια y ταχύτητα.
Η μεταξύ ταχυτήτων γωνία δεν είναι πλέον 90^o.
Πόση είναι όμως,
Οι μπάλες αποκτούν ιδιοστροφορμές. Πόσες είναι αυτές;

Ένας δίσκος συγκρούεται με ράβδο ακίνητη.
Εκτός από τις κάθετες αντιδράσεις υπάρχουν και τριβές.
Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου θα μειωθεί.
Η ράβδος θα αποκτήσει ταχύτητα άλλης διεύθυνσης από αυτήν της $\vec{\upsilon}$.
Η ράβδος θα αποκτήσει και ιδιοστροφορμή διαφορετική από αυτήν που θα αποκτούσε ελλείψει τριβών.
Μπορούμε να το συλλάβουμε. Μπορούμε να κάνουμε προσομοιώσεις.
Όμως οι υπολογισμοί είναι δύσκολοι.





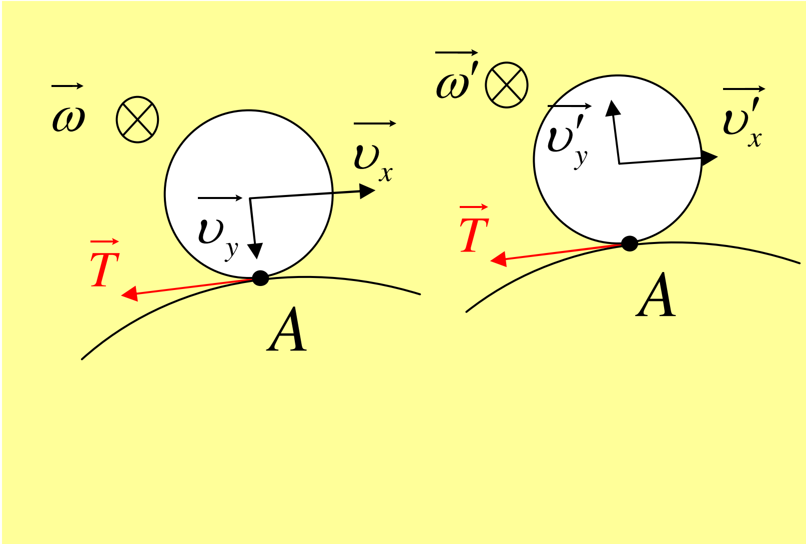
Η μπάλα κατρακυλάει στο κεκλιμένο επίπεδο.
Με ποια ταχύτητα θα κινηθεί στο οριζόντιο;
Συνήθως βάζουμε την ίδια επικαλούμενοι διατήρηση ενέργειας.
Όμως κρούση γίνεται και η ενέργεια μειώνεται.
Πόση έγινε η ταχύτητα;
Αυτό είναι το ευκολότερο πρόβλημα από τα προηγούμενα.

Τα προβλήματα αυτά δεν είναι εύκολα. Δεν απευθύνονται σε μαθητές, εκτός αν τροποποιηθούν και αν δοθούν περισσότερα δεδομένα από αυτά που χρειάζονται.
Τότε όμως υπάρχει κίνδυνος να είναι λανθασμένη η άσκηση.
Λόγου χάριν δεν επιτυγχάνεται οιαδήποτε γωνία ανάκλασης επειδή εσύ αύξησες τον συντελεστή τριβής.
Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίζονται με επίκληση της διατήρησης στροφορμής ως προς σημείο. Το σημείο επαφής.

Η ιδέα.

Η τριβή μεταβάλλει την x ταχύτητα και την γωνιακή ταχύτητα.
Όμως η τριβή διέρχεται από το ακίνητο σημείο Α του χώρου.
Το σημείο στο οποίο γίνεται η επαφή.
Το σημείο που δεν είναι σημείο κάποιου από τα σώματα.
Η στροφορμή του λευκού σώματος διατηρείται ως προς το Α.
Όχι γενικώς διατηρείται η ολική στροφορμή, κάτι που ελάχιστα θα μας βοηθούσε.
Δηλαδή:

$$m\cdot R\cdot \upsilon_x + I\cdot\omega = m\cdot R\cdot\upsilon'_x + I\cdot\omega'$$

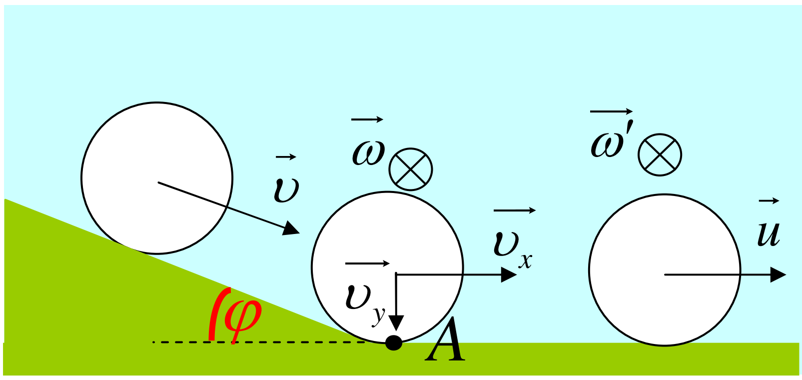


Φανταστείτε λόγου χάριν να μας έδιναν ότι ο συντελεστής τριβής είναι μεγάλος.
Θα ξέραμε τότε ότι όταν αποκολλάται το σώμα δεν ολισθαίνει και $\upsilon'_x = R\cdot\omega'$.
Πολύ εύκολα θα λέγαμε ότι:

$$m\cdot R\cdot\upsilon_x + I\cdot\omega = \left(m\cdot R + \frac{I}{R}\right)\cdot\upsilon'_x$$

Θα βρίσκαμε και την ταχύτητα και την γωνιακή ταχύτητα πανεύκολα.
Θα μου πείτε ότι δεν σας βρήκα την y ταχύτητα.
Αν τα σώματα είναι ελαστικά είναι ίση κατά μέτρον με την αρχική.
Αλλιώς δώστε μου απώλειες ενέργειας ή κάποια άλλη πληροφορία.

Μια απλή περίπτωση.



Η στροφορμή διατηρείται ως προς το Α.

$$m\cdot\upsilon\cdot R\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi + I\cdot\omega = m\cdot u\cdot R + I\cdot\omega'$$

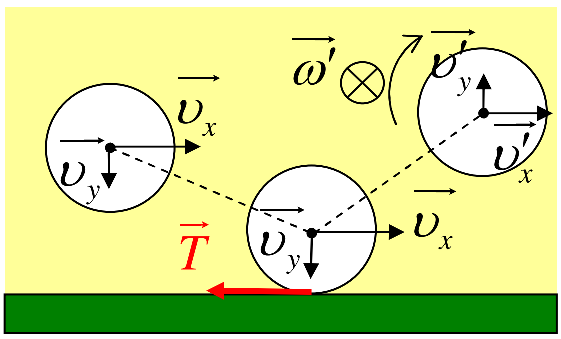
Επειδή δεν έχω ολίσθηση ούτε αρχικά, ούτε τελικά……

$$m\cdot\upsilon\cdot R\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{I}{R}\cdot\upsilon = m\cdot u\cdot R + \frac{I}{R}\cdot u$$

$$\Rightarrow u = \upsilon\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi + \dfrac{I}{m\cdot R^2}}{1+\dfrac{I}{m\cdot R^2}}$$

Μια περίπτωση μικρής δυσκολίας.
Ας υποθέσουμε πως έχουμε μεγάλο συντελεστή τριβής.
Το σώμα στην αρχή ολισθαίνει αλλά τελικά αναχωρεί με γωνιακή ταχύτητα $\omega' = \dfrac{\upsilon'_x}{R}$.

$$m\cdot\upsilon_x\cdot R = m\cdot\upsilon'_x\cdot R + \frac{I}{R}\cdot\upsilon'_x \Rightarrow \upsilon'_x = \frac{\upsilon_x}{1+\dfrac{I}{m\cdot R^2}}$$



Αν τα σώματα είναι ελαστικά $\upsilon'_y = \upsilon_y$ (κατά μέτρον).
Θα μπορούσε να δοθεί πως αν πέσει κάθετα στο τοίχωμα χάνει το 75% της ενέργειάς του.
Τότε θα ξέραμε ότι $\upsilon'_y = \dfrac{\upsilon_y}{2}$.

Μια δυσκολότερη εκδοχή.

Αν δεν ξέραμε ότι αναχωρεί χωρίς ολίσθηση, δεν θα μπορούσαμε να πούμε ότι $\omega' = \frac{\upsilon'_x}{R}$.

Πάλι όμως θα είχαμε ότι η στροφορμή διατηρείται ως προς το σημείο επαφής.

$m \cdot \upsilon_x \cdot R = m \cdot \upsilon'_x \cdot R + I \cdot \omega$

Θα μπορούσε να ήταν γνωστό το ότι $\upsilon'_y = \upsilon_y$ (κατά μέτρον).

Τι κάνουμε τώρα που έχουμε μια σχέση με δύο αγνώστους;
Αφού έχουμε συνεχώς ολίσθηση, ισχύει συνεχώς η σχέση $T = \mu \cdot N$.
Επομένως τα μέτρα των ωθήσεων των δύο δυνάμεων έχουν λόγο μ.
Τον ίδιο λόγο έχουν και τα μέτρα των μεταβολών της ορμής που οι δυνάμεις προκαλούν.
Δηλαδή:

$m \cdot \upsilon_x - m \cdot \upsilon'_x = \mu \cdot 2m \cdot \upsilon_y$

Έτσι έχουμε ένα σύστημα:

$m \cdot \upsilon_x \cdot R = m \cdot \upsilon'_x \cdot R + I \cdot \omega$ και $m \cdot \upsilon_x - m \cdot \upsilon'_x = \mu \cdot 2m \cdot \upsilon_y$

Άγνωστοι είναι η υ'_x και η ω. Υπολογίζονται.

Ξέροντας ταχύτητες αναχώρησης υπολογίζουμε και την γωνία ανάκλασης.

Ποιος είναι ο ελάχιστος συντελεστής τριβής;
Είπαμε ότι με μεγάλο συντελεστή αναχωρεί χωρίς να ολισθαίνει. Πόσο όμως μεγάλο;

$$\mu \geq \frac{T}{N} \Rightarrow \mu \geq \frac{\Omega_T}{\Omega_N} \Rightarrow \mu \geq \frac{|\Delta P_x|}{|\Delta P_y|} \Rightarrow \mu \geq \frac{m \cdot \upsilon_x - m \cdot \dfrac{\upsilon_x}{1 + \dfrac{I}{m \cdot R^2}}}{2m \cdot \upsilon_y}$$

Με πράξεις υπολογίζεται.
Αν ο συντελεστής τριβής υπερβαίνει αυτήν την τιμή, όσο και να αυξηθεί ουδεμία διαφορά εμφανίζεται.

Γενικότερα.
Μπορεί να έχουμε μια πλάγια κρούση. Μεταξύ σφαιρών , μεταξύ δίσκου και ράβδου, μεταξύ….
Διατηρείται η ορμή.
Διατηρείται η στροφορμή του συστήματος.
Διατηρείται όμως και η στροφορμή **<u>κάθε σώματος</u>** ως προς το σημείο επαφής.
Με την ενέργεια έχουμε κάποια προβλήματα. Ακόμα και ελαστικά αν είναι τα σώματα, δεν διατηρείται.
Όμως σε διεύθυνση κάθετη στην τριβή μπορούμε να υπολογίσουμε ταχύτητες κατά τα γνωστά,
Αν λ.χ. έχουμε ισόμαζα σώματα, ανταλλάσσουν τις y ταχύτητές τους. Τούτο διότι εκεί θα οδηγούσε η επίλυση ενός προβλήματος ελαστικής κρούσης που θα γινόταν στον y άξονα, τον κάθετο στις τριβές.

Σε κάθε περίπτωση τα προβλήματα είναι δύσκολα. Πριν δω τις προσομοιώσεις δεν ήμουν σίγουρος πως τα έλυσα σωστά.