Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής / Φυσικών "Αριστοτέλης"
και Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής
Ελληνική Εταιρεία Φυσικής για την Επιστήμη και την Εκπαίδευση
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2017 - Γ' Λυκείου

Β΄ Φάση: 22/04/2017

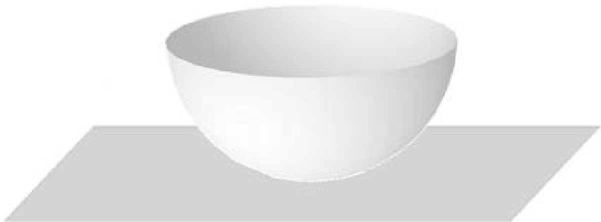
ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Οι απαντήσεις σε *όλα* τα ερωτήματα θα πρέπει να αναγραφούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που θα σας δοθεί χωριστά από τις εκφωνήσεις.
2. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε φύλλα Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί. Τα υλικά αυτά θα παραδοθούν στο τέλος της εξέτασης μαζί με το ***Φύλλο Απαντήσεων***.
3. Το γράφημα που ζητείται στο **Πειραματικό Μέρος** θα τα σχεδιάσετε στο χιλιοστομετρικό χαρτί του ***Φύλλου Απαντήσεων***.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α.1. Δύο σφαίρες με μάζες m_1 και $m_2=2m_1$, εκτοξεύονται η μία εναντίον της άλλης με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες, έστω υ, κινούμενες σε λεία οριζόντια επιφάνεια και συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Να βρείτε το ποσοστό Π της κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατρέπεται σε θερμότητα. Να θεωρήσετε αμελητέα τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών.



Α.2. Τρία υλικά σημεία, που έχουν μάζες $m_1=m$, m_2 και m_3 με αναλογίες 3:4:5, τοποθετούνται σε διαφορετικές θέσεις, στο εσωτερικό μιας λείας ημισφαιρικής επιφάνειας S, ακτίνας R. Η επιφάνεια στερεώνεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, κατά τρόπο ώστε η κυκλική τομή της να είναι παράλληλη προς το επίπεδο αυτό (βλ. σχ.). Αφήνουμε ταυτόχρονα τα υλικά σημεία ελεύθερα να κινηθούν. Αν είναι γνωστό ότι οι μεταξύ τους κρούσεις είναι πλαστικές, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες (x_i,y_i,z_i), i=1,2,3 των αρχικών τους θέσεων, ώστε η θερμική ενέργεια λόγω της κρούσης να είναι μέγιστη. ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να θεωρήσετε ότι η αρχή του συστήματος αναφοράς, σημείο έστω Ο, συμπίπτει με το σημείο επαφής της ημισφαιρικής επιφάνειας με το επίπεδο.

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Β.1. Γνωρίζουμε ότι ένα σώμα που βυθίζεται μέσα σε ρευστό (που ηρεμεί) δέχεται από αυτό μια δύναμη $F_{ολ}$ που εξαρτάται από τον όγκο $V_β$ του βυθισμένου τμήματος του σώματος και την πυκνότητα $ρ_υ$ του υγρού. Να βρείτε μια έκφραση του μέτρου της δύναμης αυτής σε συνάρτηση με τα μεγέθη $V_β$, $ρ_υ$, και πιθανώς αναγκαίων φυσικών σταθερών.

Β.2. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως σωστή ή λανθασμένη, δικαιολογώντας την επιλογή σας. "Όταν ένα σώμα, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, βυθίζεται μέσα σε ρευστό (που βρίσκεται σε ηρεμία) κατά τρόπο ώστε η βάση του να διατηρείται οριζόντια, η δύναμη που δέχεται από αυτό έχει πάντοτε φορά προς τα πάνω."

Β.3. Πορώδης τσιμεντόλιθος αναρτάται από δυναμόμετρο με σκοπό τη μέτρηση του βάρους του. Η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι w_1. Στη συνέχεια βυθίζουμε ένα μέρος του τσιμεντόλιθου μέσα σε δοχείο με νερό, ενώ αυτός παραμένει αναρτημένος στο δυναμόμετρο, χωρίς να ακουμπά στον πυθμένα του δοχείου.

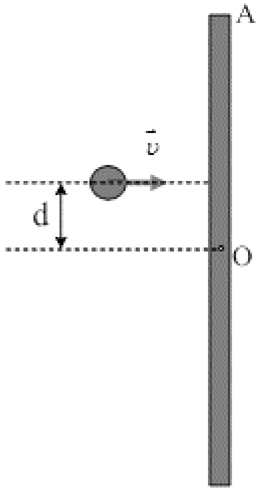
α. Η ένδειξη του οργάνου θα παραμείνει σταθερή.
β. Η ένδειξη του οργάνου θα μηδενιστεί.
γ. Η ένδειξη του οργάνου θα αυξηθεί.
δ. Η ένδειξη του οργάνου θα μειωθεί.
ε. Τίποτε από τα παραπάνω.

Β.3.1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Β.3.2. Να δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Β.4. Κατασκευάζουμε ένα τσιμεντόλιθο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, η πλευρική επιφάνεια του οποίου είναι πορώδης και ένα δεύτερο, εξ ολοκλήρου συμπαγή, με εσωτερική - στεγανή - κοιλότητα, ώστε να έχει ίδιο βάρος και ίδιες διαστάσεις με τον πρώτο. Κατόπιν τους τοποθετούμε στον πυθμένα δοχείου που είναι γεμάτος με νερό, κατά τρόπο ώστε να βρίσκονται σε μεγάλη (συγκριτικά με τις διαστάσεις τους) απόσταση μεταξύ τους. Αφήνουμε να παρέλθει επαρκής χρόνος, ώστε το σύστημα να επανέλθει σε ηρεμία. Σε ποιον από τους δύο πρέπει να ασκήσουμε μικρότερη κατακόρυφη δύναμη, ώστε να τον κάνουμε να αναδυθεί; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας, λαμβάνοντας υπόψη ότι: α) κατά την ανάδυση των τσιμεντόλιθων η ταχύτητά τους είναι τόσο μικρή, ώστε η αντίσταση του υγρού θεωρείται αμελητέα, β) οι διαστάσεις του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερες από τις διαστάσεις των τσιμεντόλιθων, συνεπώς δεν παρατηρείται κατακόρυφη μετατόπιση της στάθμης του υγρού κατά την εκτέλεση των περιγραφόμενων ενεργειών.

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Μια ομογενής ράβδος μήκους L=1,5 m και μάζας M=6 Kg ηρεμεί πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Ένα σφαιρίδιο μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ=4 m/s κάθετη στη ράβδο. Το σφαιρίδιο συγκρούεται ελαστικά με τη ράβδο σε απόσταση d=L/6 από το μέσο της.



Γ.1. Πόση πρέπει να είναι η μάζα m του σφαιριδίου, ώστε να παραμείνει ακίνητο αμέσως μετά την ελαστική κρούση;
Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σε αυτή: $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$

Γ.2. Μετά την κρούση περνά χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{\pi}{12}s$. Εκείνη τη στιγμή να υπολογίσετε:
Γ.2.1. Την ταχύτητα υ_A και την επιτάχυνση α_A του άκρου Α της ράβδου
Γ.2.2. Το λόγο λ του μέτρου της επιτρόχιας προς το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του άκρου Α ως προς το στιγμιαίο κέντρο Κ της καμπύλης τροχιάς που διαγράφει.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Προσδιορισμός Ροπής Αδράνειας Αγνώστου Σώματος

Σε ένα εργαστήριο Φυσικής διατίθεται η παρακάτω διάταξη, με τη βοήθεια της οποίας μπορεί κανείς να προσδιορίσει τη ροπή αδράνειας στερεού σώματος με ακανόνιστο σχήμα, ως προς επιλεγμένο άξονα περιστροφής.

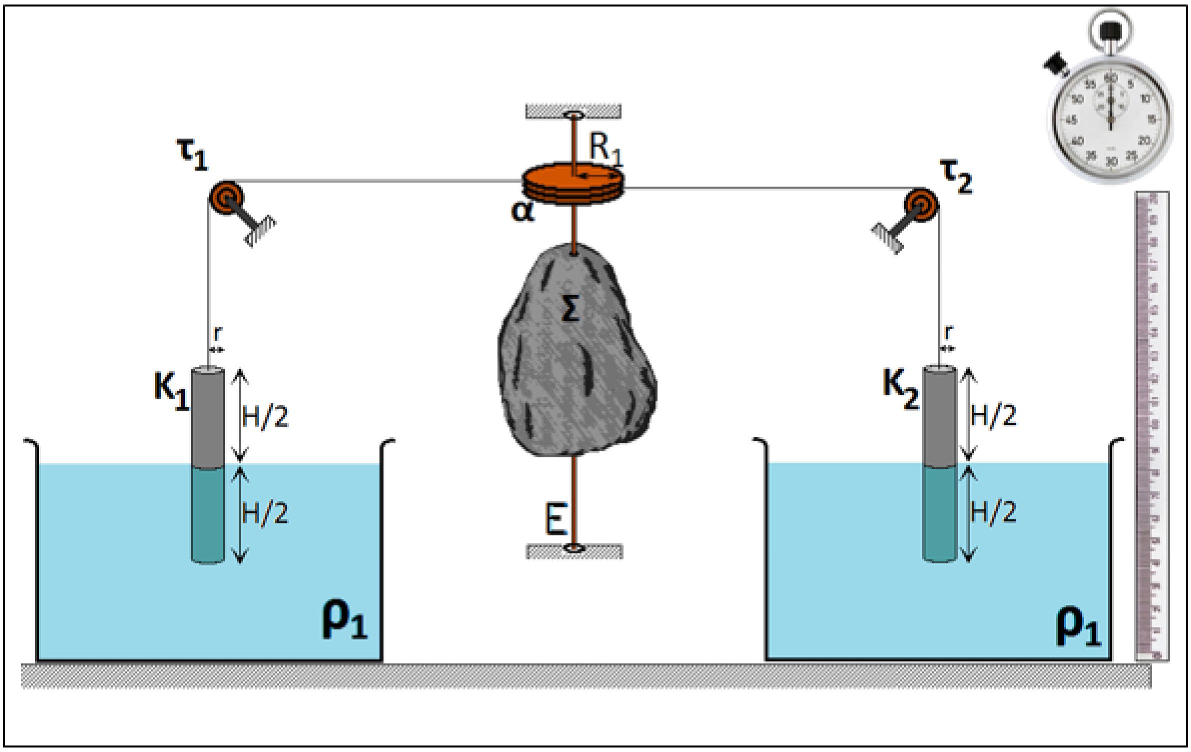
Πειραματική διάταξη:

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από ένα κατακόρυφο άξονα (λεπτή ανθεκτική ράβδο με αμελητέα μάζα και πάχος) «**Ε**» ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται αναρτημένος σε ακλόνητα σημεία άνω και κάτω. Εκατέρωθεν του άξονα και σε κάποια απόσταση από αυτόν βρίσκονται δύο ίδια υάλινα κυλινδρικά δοχεία (**1, 2**, αντίστοιχα) στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, επί τράπεζας της οποίας το ύψος από το δάπεδο μπορεί να μεταβληθεί αν χρειαστεί που είναι γεμισμένα ισόποσα από υγρό πυκνότητας $\boldsymbol{\rho_1}$. Σε καθένα από τα δοχεία βρίσκεται μερικώς βυθισμένος ένας κατακόρυφος και ομογενής κύλινδρος («$\mathbf{K_1}$», «$\mathbf{K_2}$», αντίστοιχα) πυκνότητας $\boldsymbol{\rho_\kappa}$, ακτίνας **r** και ύψους **Η** το οποίο είναι μικρότερο από το ύψος των υάλινων δοχείων. Κάθε κύλινδρος είναι αναρτημένος από το κέντρο της επάνω βάσης του, από αβαρές και μη εκτατό κατακόρυφο νήμα το οποίο μέσω μιας αβαρούς σταθερής τροχαλίας («$\boldsymbol{\tau_1}$», «$\boldsymbol{\tau_2}$», αντίστοιχα) μετατρέπεται σε οριζόντιο που συγκλίνει κάθετα προς τον κατακόρυφο άξονα «**Ε**», όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1. Ένα σύστημα δύο ίδιων, οριζόντιων κι ομόκεντρων δίσκων «**α**», ακτίνας $\mathbf{R_1}$, με αυλάκι στην περιφέρειά τους, κολλημένων σταθερά μεταξύ τους, έχουν ως άξονα περιστροφής τον «**Ε**» και είναι σταθερά συνδεδεμένοι με αυτόν κατά τρόπον ώστε όταν αυτοί περιστρέφονται κατά γωνία $\boldsymbol{\theta}$, να περιστρέφεται και ο άξονας κατά την ίδια γωνία. Καθένα από τα δύο οριζόντια νήματα τυλίγεται αρκετές φορές μέσα στο αυλάκι του αντίστοιχου δίσκου ώστε να μην ολισθαίνει καθώς τυλίγεται ή ξετυλίγεται. Επί του άξονα «**Ε**» δύναται να αναρτηθεί σταθερά ένα σώμα «**Σ**», μάζας **Μ** και ακανόνιστου σχήματος του οποίου η άγνωστη ροπή αδράνειας **Ι** -ως προς αυτόν τον ίδιο άξονα «**Ε**»- ζητείται να προσδιοριστεί. Στη διάταξη περιλαμβάνεται μετροταινία (που επιτρέπει μετρήσεις ακρίβειας ±0.5 mm) καθώς και χρονόμετρο (ακρίβειας ±0.5 sec). (Βλέπε σχ. 1.1). Προς χάριν σαφήνειας τα σχ. 1.2 και 1.3 δείχνουν την κάτοψη και αντίστοιχα την αριστερή όψη, του διπλού δίσκου με τα νήματα.

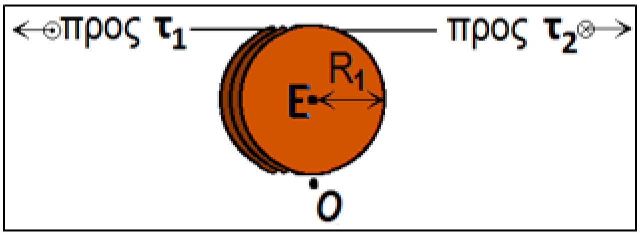
Η πειραματική διάταξη επίσης είναι εφοδιασμένη με:

i) Άλλο ένα ζεύγος δοχείων, «**Β**» ίδιου με το αρχικό, αλλά με υγρό διαφορετικής πυκνότητας $\boldsymbol{\rho_2}$.
ii) Άλλα τέσσερα συστήματα διπλών δίσκων «**β**», «**γ**», «**δ**» και «**ε**» που έχουν διαφορετικές ακτίνες $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$, $\mathbf{R_4}$ και $\mathbf{R_5}$ αντίστοιχα (Βλέπε σχ. 2).

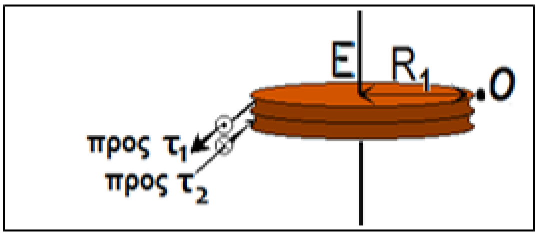
Παρακάτω φαίνεται η διάταξη (Σχ. 1 & 2) και τα δεδομένα του πειράματος:



Σχήμα 1.1



Σχήμα 1.2

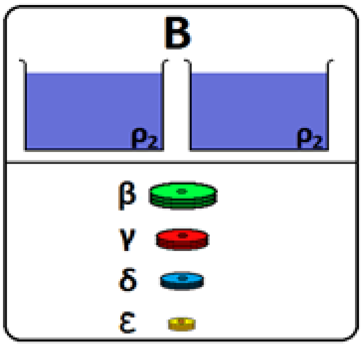


Σχήμα 1.3

Ερμηνεία του συμβόλου «άθροισμα»:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_5$$

- $\rho_\kappa = 1500\ kg/m^3$, $R_1 = 0.05$ m
- H = 0.3 m , $R_2 = 0.06$ m
- r = 0.02 m , $R_3 = 0.07$ m
- $\rho_1 = 1000\ kg/m^3$, $R_4 = 0.10$ m
- $\rho_2 = 1400\ kg/m^3$, $R_5 = 0.12$ m
- $g = 10\ m/s^2$, π = 3.14



Σχήμα 2

Η πειραματική διαδικασία και η λήψη μετρήσεων:

1) Αναρτούμε το σώμα Σ επάνω στον κατακόρυφο άξονα «**ε**».

2) Μετατοπίζουμε ελαφρώς κατακόρυφα τον κύλινδρο «K_1» βυθίζοντας τον κατά x_o~ 3 cm προς τα κάτω εντός του υγρού του δοχείου 1.

3) Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί υπο την επίδραση της άνωσης του υγρού και του βάρους που ασκούνται σε κάθε κύλινδρο, οπότε ξεκινά η ταλάντωσή του συστήματος.

4) Με τη βοήθεια του χρονομέτρου μετράμε την περίοδο Τ της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα, πχ. το χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων βυθίσεων ή αναδύσεων κάθε κυλίνδρου.

- *Ας σημειωθεί ότι μία συνηθισμένη πειραματική τεχνική για τη μείωση του σφάλματος και άρα τη βελτίωση της ακρίβειας της μέτρησης μας, είναι να μετρήσουμε το χρόνο, όχι μίας μόνο, αλλά περισσοτέρων περιόδων εφόσον αυτό είναι δυνατόν, πχ. μετράμε το χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση τεσσάρων πλήρων ταλαντώσεων δηλ. $t=4T\pm\delta t$, όπου δt η αβεβαιότητα/σφάλμα που υπεισέρχεται αυτούσια και αναπόφευκτα σε κάθε μέτρηση μας, άρα $T = t/4 \pm \delta t/4$ (δηλ. μείωση σφάλματος και συνεπώς αύξηση ακρίβειας στον προσδιορισμό της περιόδου Τ).*

5) Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το διπλό δίσκο «**α**» με το «**β**» και επαναλαμβάνουμε τα βήματα (2), (3) και (4) καταγράφοντας πάλι την περίοδο. Το ίδιο κάνουμε και με τους άλλους διπλούς δίσκους «**γ**», «**δ**» και «**ε**».

6) Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το ζεύγος των δοχείων **Α**, με το ζεύγος **Β** που αντιστοιχεί σε υγρό διαφορετικής πυκνότητας ρ_2 και επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα (2) εως και (5).

7) Με αυτό τον τρόπο, έχουμε λάβει ένα σύνολο 10 ζευγών/σημείων της μορφής (R_i, T_i) (πέντε για την περίπτωση του υγρού 1 και πέντε για την περίπτωση του υγρού 2) όπου i=1,2,3,4,5 ένας δείκτης που δηλώνει το i-οστό διπλό δίσκο ακτίνας R_i που χρησιμοποιήθηκε και T_i η αντίστοιχη περίοδος ταλάντωσης του συστήματος με αυτόν το δίσκο. Οι μετρηθείσες τιμές φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.

ρ_1 = 1000 kg/m^3	
R_i (m)	T_i (s)
0.05	10.5
0.06	9.0
0.07	7.5
0.10	5.5
0.12	4.5

ρ_2 = 1400 kg/m^3	
R_i (m)	T_i (s)
0.05	9.0
0.06	7.5
0.07	6.5
0.10	4.5
0.12	4.0

Ερωτήσεις:

1) Συμπληρώστε, με τις παραπάνω μετρηθείσες τιμές, τις κατάλληλες στήλες των πινάκων υπολογισμών που θα βρείτε στο Φύλλο Απαντήσεων.

2) Με βάση αυτές, υπολογίστε τις ποσότητες που αναφέρονται στην κεφαλίδα κάθεμιας από τις υπόλοιπες στήλες των πινάκων και συμπληρώστε τες αντίστοιχα. Βρείτε τα αθροίσματα σε κάθε στήλη όπως υποδεικνύεται με το σύμβολο του αθροίσματος στην τελευταία γραμμή.

3) Αποτυπώστε τα σημεία $(x_i, y_i) = (1/R_i^2\ ,\ T_i^2/4\pi^2)$ και για τις δύο περιπτώσεις υγρών ρ_1 και ρ_2, σε ένα κοινό διάγραμμα με τη βοήθεια του χιλιοστομετρικού χαρτιού (millimetre) που δίδεται στο Φύλλο Απαντήσεων.

4) Με τη βοήθεια της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, βρείτε τις εκτιμήτριες παραμέτρους $\hat{\alpha}$ (τμήση) και $\hat{\beta}$ (κλίση) των δύο ευθειών των ελαχίστων τετραγώνων (Ε.Ε.Τ.) $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ που προσαρμόζεται καλύτερα στα πειραματικά δεδομένα. Σε κάθε υγρό αντιστοιχεί μία από τις δύο πεντάδες ζευγών $(x_i, y_i) = (1/R_i^2\ ,\ T_i^2/4\pi^2)$, άρα και μια Ε.Ε.Τ. Οι σχέσεις υπολογισμού των εκτιμητριών δίνονται ως κάτωθι, όπου N=5 το πλήθος των σημείων:

$$D = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{D}$$

$$\hat{\beta} = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{D}$$

5) Αποδείξτε ότι κάθε κύλινδρος θα εκτελέσει κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση, τη σταθερά επαναφοράς D της οποίας να εκφράσετε τελικά συναρτήσει των ρ, ρ_κ, r, H g, R και I (όπου I η ροπή αδράνειας του άγνωστου σώματος).

6) Από τη σχέση υπολογισμού της περιόδου $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_k}{D}}$ για κάθε κύλινδρο, εκφράσετε την ποσότητα $y=T^2/4\pi^2$ ως συνάρτηση του $x=1/R^2$ και αποδείξτε ότι είναι μια ευθεία. Προσδιορίστε την κλίση της ευθείας αυτής, σαν συνάρτηση των, ρ, ρ_κ, r, H g και I.

7) Με άμεση σύγκριση των ευθειών ελαχίστων τετραγώνων που προσδιορίσατε και της θεωρητικής ευθείας που αποδείξατε στο βήμα (12) $T^2/4\pi^2=y(x)$ σαν συνάρτηση του $x=1/R^2$ και απο την υπολογισθείσα τιμή της κλίσης $\hat{\beta}$ (για τις δυό ευθείες ελαχίστων τετραγώνων) υπολογίστε την άγνωστη ροπή αδράνειας I_1 και I_2 που αντιστοιχεί σε καθεμια ευθεία. Να υπολογιστεί η μέση τιμή τους $I=(I_1+I_2)/2$

8) Γιατί διαφέρουν ελαφρώς οι τιμές της ροπής αδρανειας I_1 και I_2 που βρήκατε; Αναζητήστε και συζητήστε πιθανες αιτίες σφαλμάτων κατά τη μέτρηση ή παρεκκλίσεων από τις «ιδανικές» παραδοχές του πειράματος.

Να ληφθούν βοηθητικά υπόψη τα παρακάτω:

- Συνθήκες – παραδοχές εκτέλεσης πειράματος:

i) Φροντίζουμε ώστε η διάταξη να ισορροπεί αρχικά όπως φαίνεται στο σχήμα 1 με τα νήματα τεντωμένα και τους κυλίνδρους μερικώς και ίδια βυθισμένους στα υγρά.

ii) Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος, κανένας από τους δύο κυλίνδρους δεν βυθίζεται εξολοκλήρου στο υγρό ούτε εξέρχεται πλήρως εκτός αυτού.

iii) Κατά την ταλάντωση του συστήματος, τα νήματα διατηρούνται πάντοτε τεντωμένα (με κατάλληλη επιλογή των A, ρ_κ, ρ_υ, και του ύψους στήριξης των υάλινων δοχείων).

iv) Η αντίσταση του υγρού στην παλινδρομική κίνηση του κυλίνδρων καθώς και οι τριβές στο νήμα και στην περιστροφή των τροχαλιών και του άξονα θεωρήθηκαν αμελητέες (και επομένως οι ταλαντώσεις του συστήματος αμείωτες-μη φθίνουσες)

v) Η ακτίνα r<< της διαμέτρου των δοχείων με το υγρό, άρα η μεταβολή της στάθμης του υγρού, ανύψωσης ή καταβύθισης, εξαιτίας της καταβύθιση ή ανάδυσης αντίστοιχα του κυλίνδρου σε αυτό αντίστοιχα, θεωρείται αμελητέα.

vi) Η κίνηση ποσοτήτων υγρού εντός των δοχείων εξαιτίας της κίνησης των κυλίνδρων μέσα σε αυτά και επομένως η μεταφορά ορμής από τους κυλίνδρους στα υγρά θεωρείται σε πρώτη προσέγγιση αμελητέα.

- Συμβουλές για το σχεδιασμό ενός διαγράμματος

i) Πριν από την βαθμολόγηση των αξόνων, την αποτύπωση των σημειων και τη χάραξη των ευθειών, προσέξτε να έχετε λάβει υπόψη το εύρος μεταβολής των μεγεθών ώστε να καθορίσετε σωστά την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή κάθε άξονα. Έτσι, το σμήνος των σημείων που θα απεικονιστούν να μην είναι συγκεντρωμένο σε μια μικρή περιοχή του διαγράμματος ούτε κάποιο/α σημείο/α να είναι ακροβολισμένα έξω από απ το διάγραμμα ή να πέφτουν ακριβώς επάνω σε κάποιον άξονα (πρέπει να ορίζουν μια ορθογώνια περιοχή περί το 80-90% της συνολικής ορθογώνιας επιφάνειας του διαγράμματος).

ii) Σε κάθε άξονα να γράψετε το σύμβολο/όνομα του μεγέθους (ποσότητας) που αναπαριστάται σε αυτόν.

iii) Δίπλα από το σύμβολο/όνομά του να γράψετε τη μονάδα μέτρησης του μεγέθους αυτού εντός παρένθεσης.

iv) Να ορίσετε τη φορά αύξησης της ποσότητας επι του άξονα τοποθετώντας ένα βελάκι κάτω ή δίπλα από τον άξονα.

v) Τέλος, σε κάθε άξονα να σημειώσετε και αναγράψετε τις βασικές αριθμητικές υποδιαιρέσεις του (και όχι τις συντεταγμένες των σημείων) ώστε να είναι εύκολη η εκτίμηση και η εύρεση των συντεταγμένων των σημείων.

Καλή Επιτυχία

Όνομα και Επώνυμο: …………………………………………………………
Όνομα Πατέρα: …………………….. Όνομα Μητέρας: …………………..
Σχολείο: ……………………….. e-mail: ………………………..….
Τηλ. επικοινωνίας (σταθ / κινητό): …………………………………

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α.1. Π=…………………

Α.2. (x_1, y_1, z_1)= …………………

(x_2, y_2, z_2)= …………………

(x_3, y_3, z_3)= …………………

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Β.1. $F_{ολ}$ =…………………

Β.2. Η πρόταση είναι ……………………

(γράψτε τη δικαιολόγηση στις επόμενες γραμμές)

Β.3.1. Σωστή είναι η πρόταση ……………………

Β.3.2. (γράψτε τη δικαιολόγηση στις επόμενες γραμμές)

Β.4. Πρέπει να ασκήσουμε μικρότερη δύναμη στον ……………………………………………

(γράψτε τη δικαιολόγηση στις επόμενες γραμμές)

ΘΕΜΑ 3^Ο

Γ.1. m=……………………………………….

Γ.2.1. υ_A=…………………………….. α=……………………………..

Γ.2.2. λ=……………………………..

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. και **2.** Συμπληρώστε του πίνακες που ακολουθούν:

ρ_1 1000 kg/m^3	R_i (m)	T_i (sec)	$x_i = 1/R_i^2$ (m^{-2})	$y_i = T_i^2/4\pi^2$ (s^2)	x_i^2	$x_i * y_i$
1						
2						
3						
4						
5						

N	$\sum_{i=1}^{5} R_i$	$\sum_{i=1}^{5} T_i$	$\sum_{i=1}^{5} x_i$	$\sum_{i=1}^{5} y_i$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i$
5						
ρ₂ **1400 kg/m³**	***R_i*** **(m)**	***T_i*** **(sec)**	***$x_i = 1/R_i^2$*** **(m^{-2})**	***$y_i = T_i^2/4\pi^2$*** **(s^2)**	**x_i^2**	**$x_i * y_i$**
1						
2						
3						
4						
5						
N	$\sum_{i=1}^{5} R_i$	$\sum_{i=1}^{5} T_i$	$\sum_{i=1}^{5} x_i$	$\sum_{i=1}^{5} y_i$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i$
5						

3. *Σχεδιάστε το γράφημα στο χιλιοστομετρικό χαρτί που θα βρείτε στην επόμενη σελίδα.*

4.

Γράψτε τις τιμές των εκτιμητριών παραμέτρων ακολούθως:

Πρώτο υγρό: $\hat{\alpha} =$…………………….. , $\hat{\beta} =$……………………..

Δεύτερο υγρό: $\hat{\alpha} =$…………………….. , $\hat{\beta} =$……………………..

5. (*στο τετράδιό σας)*

6. (*στο τετράδιό σας)*

7. (*στο τετράδιό σας)*

8. γράψτε την απάντησή σας στο χώρο που ακολουθεί.

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

Συνοπτικές Απαντήσεις

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α.1. Έστω ότι η m_1 κινείται προς τα δεξιά και η m_2 προς τα αριστερά. Έστω επίσης ότι η φορά προς τα δεξιά λαμβάνεται ως θετική. Η συνολική ορμή του συστήματος πριν την κρούση έχει μέτρο:

$$P_{ολ} = m_1 υ - m_2 υ \Rightarrow P_{ολ} = (m_1 - m_2)υ \Rightarrow P_{ολ} = -m_1 υ$$

Συμβολίζοντας την ταχύτητα του συσσωματώματος με V, η ολική ορμή του συστήματος μετά την κρούση είναι:

$$P'_{ολ} = (m_1 + m_2)V \Rightarrow P'_{ολ} = 3m_1 V$$

Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$-m_1 υ = 3m_1 V \Rightarrow V = \frac{-m_1 υ}{3m_1} \Rightarrow V = -\frac{υ}{3}$$

Δηλ. το συσσωμάτωμα κινείται προς τα αριστερά.
Η (κινητική) ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι:

$$K_{ολ} = \frac{1}{2} m_1 υ^2 + \frac{1}{2} m_2 υ^2 \Rightarrow K_{ολ} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ^2 \Rightarrow K_{ολ} = \frac{3}{2} m_1 υ^2$$

Η (κινητική) ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι:

$$K'_{ολ} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow K'_{ολ} = \frac{3}{2} m_1 \frac{υ^2}{9} \Rightarrow K'_{ολ} = \frac{1}{6} m_1 υ^2$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος ισούται με:

$$ΔK = K'_{ολ} - K_{ολ} \Rightarrow ΔK = \frac{1}{6} m_1 υ^2 - \frac{3}{2} m_1 υ^2 \Rightarrow ΔK = -\frac{4}{3} m_1 υ^2$$

Το πρόσημο υποδηλώνει μείωση.
Άρα το ζητούμενο ποσοστό $Π$ μείωσης της ενέργειας είναι:

$$Π = \frac{|ΔK|}{K_{ολ}} 100\% \Rightarrow Π = \frac{\frac{4}{3} m_1 υ^2}{\frac{3}{2} m_1 υ^2} 100\% \Rightarrow Π = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} 100\% \Rightarrow Π = \frac{8}{9} 100\% \Rightarrow Π \cong 88{,}9\%$$

Α.2. Για να είναι μέγιστη η θερμική ενέργεια, πρέπει κατά τις κρούσεις να χάνεται όλη η κινητική ενέργεια.
Επίσης η κινητική τους ενέργεια θα γίνεται μέγιστη όταν όλη η αρχική τους δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική. Αυτό συμβαίνει στο χαμηλότερο σημείο της S (δηλ. στο σημείο Ο).
Επιπρόσθετα, η κινητική ενέργεια που έχει ένα υλικό σημείο τη στιγμή της κρούσης θα είναι μέγιστη, αν η δυναμική ενέργεια της θέσης εκκίνησης είναι μέγιστη. Λόγω της γεωμετρίας της S, αυτό συμβαίνει όταν τα υλικά σημεία αφεθούν από το μέγιστο δυνατό ύψος, δηλ. από το χείλος της S. Συνεπώς και για τα τρία υλικά σημεία ισχύει z_i=R, i=1,2,3.
Δεδομένου ότι τα σώματα αφήνονται (δηλ. δεν έχουν αρχική ταχύτητα), και κινούνται στο εσωτερικό λείας ημισφαιρικής επιφάνειας (άρα η κίνηση καθενός εξελίσσεται σε

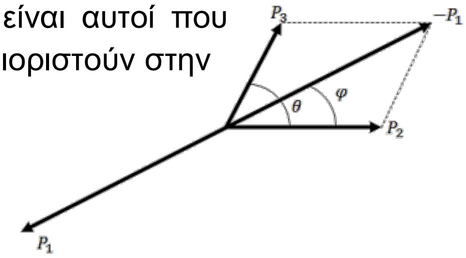
κατακόρυφο επίπεδο), συμπεραίνουμε ότι οι κινήσεις τους από την αφετηρία του καθενός μέχρι το σημείο Ο έχουν ίδια διάρκεια. Άρα, αφού τα σώματα αφήνονται ταυτόχρονα, καταλήγουμε ότι θα φτάσουν στο Ο επίσης ταυτόχρονα, συνεπώς θα συμβεί μία και μοναδική κρούση, στην οποία θα εμπλακούν και τα τρία, μετά την οποία το συσσωμάτωμα θα παραμείνει ακίνητο.
Θα πρέπει λοιπόν οι αρχικές θέσεις να είναι τέτοιες ώστε:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = 0$$

Απομένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τις αρχικές συντεταγμένες x_i και y_i για κάθε υλικό σημείο.
Λόγω διατήρησης της ενέργειας, τα σώματα φτάνουν στο Ο με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες. Άρα η αναλογία των μέτρων των ορμών τους θα είναι ίση με την αναλογία των μαζών τους, δηλ.:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 3 : 4 : 5 \Rightarrow \begin{cases} P_2 = \dfrac{4}{3} P_1 \\ P_3 = \dfrac{5}{3} P_1 \end{cases}$$

Έστω ότι οι προσανατολισμοί των τριών διανυσμάτων είναι αυτοί που φαίνονται στο σχήμα (όπου θ και φ γωνίες που θα προσδιοριστούν στην πορεία της μελέτης):



Έχουμε:

$$P_1{}^2 = P_2{}^2 + P_3{}^2 + 2P_2P_3\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1{}^2 = \frac{16}{9}P_1{}^2 + \frac{25}{9}P_1{}^2 + 2\frac{20}{9}P_1{}^2\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{16}{9} + \frac{25}{9} + \frac{40}{9}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

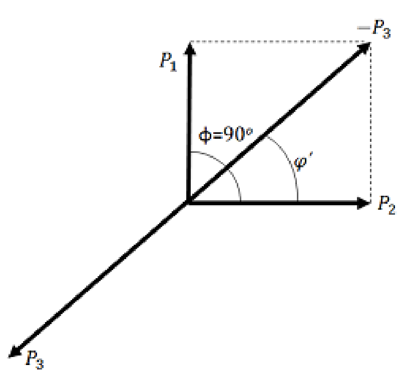
$$\Rightarrow 9 = 16 + 25 + 40\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow -32 = 40\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{32}{40} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$$

Το πρόσημο του αποτελέσματος υποδηλώνει ότι η γωνία θ είναι μεγαλύτερη των 90^o.
Για τη γωνία φ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{P_3\eta\mu\theta}{P_2 + P_3\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\frac{5}{3}P_1\eta\mu\theta}{\frac{4}{3}P_1 + \frac{5}{3}P_1\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\frac{5}{3}\eta\mu\theta}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{5\eta\mu\theta}{4 + 5\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\theta$ καταλήγουμε σε μηδενικό παρονομαστή, δηλ. δεν ορίζεται η εφφ. Αυτό σημαίνει ότι η γωνία φ (μεταξύ των $\vec{P}_1$ και $\vec{P}_2$) είναι ίση με 90^o, άρα ο σχετικός προσανατολισμός των διανυσμάτων είναι αυτός που εικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



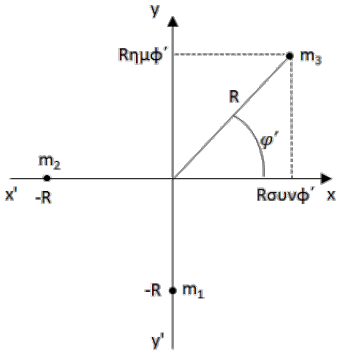
Για τη γωνία φ΄ ισχύει:

$$\eta\mu\varphi' = \frac{P_1}{P_3} \Rightarrow \eta\mu\varphi' = \frac{P_1}{\frac{5}{3}P_1} \Rightarrow \eta\mu\varphi' = \frac{3}{5}$$

και

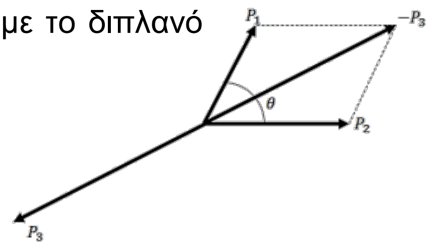
$$\sigma\upsilon\nu\varphi' = \frac{P_2}{P_3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi' = \frac{\frac{4}{3}P_1}{\frac{5}{3}P_1} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi' = \frac{4}{5}$$

Συνεπώς, μια αρχική τοποθέτηση (όχι η μοναδική), που οδηγεί σε απλοποίηση των τελικών εκφράσεων και ικανοποιεί την απαίτηση μεγιστοποίησης της απώλειας ενέργειας, είναι αυτή που φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Καταλήγουμε λοιπόν ότι:
Αν το m_1 τοποθετηθεί στη θέση (x_1, y_1, z_1)=(0, $-R$, R), το m_2 πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση ($-R$, 0, R) και το m_3 στη θέση ($\frac{4}{5}R$, $\frac{3}{5}R$, R).

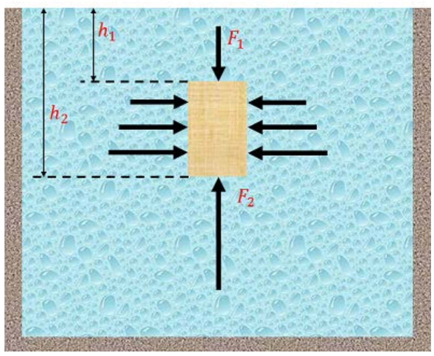
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν τύχαινε να είχαμε ξεκινήσει τη διερεύνηση με το διπλανό σχήμα, θα είχαμε την εξίσωση:



$$P_3{}^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2P_1P_2\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{25}{9}P_1{}^2 = P_1{}^2 + \frac{16}{9}P_1{}^2 + 2P_1\frac{4}{3}P_1\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{25}{9} = 1 + \frac{16}{9} + \frac{8}{3}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25 = 9 + 16 + 24\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow 24\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^o$$

από την οποία προκύπτει αμεσότερα η αρχική διάταξη των τριών υλικών σημείων.

ΘΕΜΑ 2^{O}



Β.1. Ας υποθέσουμε ότι το σώμα έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Έστω επίσης ότι είναι βυθισμένο στο ρευστό εξ ολοκλήρου (βλ. σχ.). Αν η πάνω πλευρά του βρίσκεται σε βάθος h_1, η (ρευστό) στατική πίεση που δέχεται θα είναι:

$$P_1 = \rho_\upsilon g h_1$$

Υποθέτουμε επίσης ότι το εμβαδό της πάνω πλευράς είναι S. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται θα είναι:

$$F_1 = P_1 S = \rho_\upsilon g h_1 S$$

Αντίστοιχα, η κάτω πλευρά θα δέχεται δύναμη:

$$F_2 = P_2 S = \rho_\upsilon g h_2 S$$

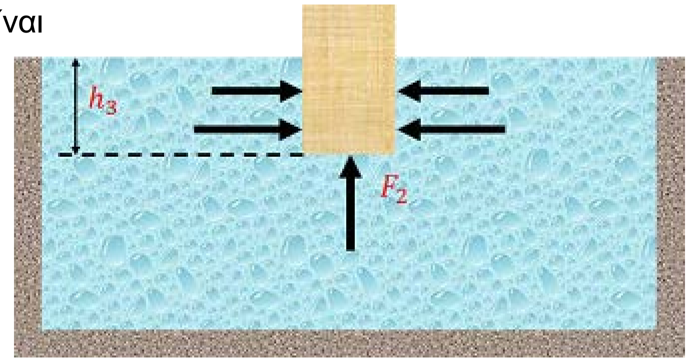
Οι πλευρικές πιέσεις (και οι εξ αυτών προκύπτουσες δυνάμεις) θα αυξάνονται γραμμικά με το βάθος (από την τιμή F_1 ως την τιμή F_2), αλλά επειδή εμφανίζονται πάντα σε ζευγάρια θα αλληλοαναιρούνται.

Άρα η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα από το ρευστό είναι:

$$F_{o\lambda} = F_2 - F_1 = \rho_\upsilon g h_2 S - \rho_\upsilon g h_1 S \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_{o\lambda} = \rho_\upsilon g (h_2 - h_1) S$$

Ο όρος στην παρένθεση ισούται με το ύψος h του σώματος, και το γινόμενο hS ισούται με τον όγκο του V_o. Καταλήγουμε λοιπόν στη σχέση:

$$F_{o\lambda} = \rho_\upsilon g V_o$$



Σε περίπτωση που το σώμα δεν είναι πλήρως βυθισμένο στο ρευστό, ο όρος F_1μηδενίζεται και ό όρος F_2 μειώνεται στη τιμή:

$$F_2 = \rho_\upsilon g h_3 S$$

Όπου h_3 το ύψος του βυθισμένου τμήματος του σώματος. Το γινόμενο $h_3 S$ ισούται με το βυθισμένο όγκο V_β του σώματος, άρα καταλήγουμε σε ανάλογη σχέση:

$$F_{o\lambda} = \rho_\upsilon g V_\beta$$

Αν το ρευστό βρίσκεται εκτεθειμένο στην ατμόσφαιρα, θα πρέπει στο αποτέλεσμα αυτό να συνυπολογίσουμε και την ατμοσφαιρική πίεση: $F_{o\lambda} = \rho_\upsilon g V_\beta + P_{\alpha\tau\mu}$

Σε περίπτωση, τέλος, που το σώμα δεν έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μπορούμε να το “τεμαχίσουμε” σε πολύ μικρά τμήματα και, εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο, να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Β.2. Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε ότι σε περίπτωση που το δοθέν σώμα εφάπτεται στον πυθμένα του δοχείου που περιέχει το ρευστό, η συνιστώσα F_2 μηδενίζεται, άρα η δύναμη από το ρευστό έχει φορά προς τα κάτω. Συνεπώς η πρόταση είναι λανθασμένη.

Β.3.1. Σωστή απάντηση είναι η ε.

Β.3.2. Αρχικά ο όγκος του εκτοπιζόμενου υγρού ισούται με τον όγκο του τσιμεντόλιθου που είναι βυθισμένος στο υγρό. Η προκύπτουσα άνωση στηρίζει ένα μέρος του βάρους w_1 του σώματος, συνεπώς η ένδειξη του οργάνου μειώνεται σε μια τιμή έστω w_2. Σταδιακά όμως, καθώς οι πόροι του τσιμεντόλιθου γεμίζουν με νερό, ο εκτοπιζόμενος όγκος μειώνεται, άρα η ένδειξη του οργάνου αυξάνεται και σταθεροποιείται σε μια τιμή w_3, για την οποία ισχύει:

$$w_1 > w_3 > w_2$$

Β.4. Η δύναμη που πρέπει να υπερνικήσουμε για να πετύχουμε την ανάδυση του τσιμεντόλιθου ισούται με τη συνισταμένη του βάρους και της F_1. Οι δύο τσιμεντόλιθοι έχουν ίσα βάρη εκτός του υγρού, αλλά οι πόροι του πρώτου, γεμίζουν σταδιακά με ποσότητα νερού, καθώς το σύστημα επανέρχεται σε ηρεμία. Άρα, στην περίπτωση του πρώτου τσιμεντόλιθου, το βάρος που πρέπει να υπερνικήσουμε προσαυξάνεται κατά το βάρος αυτής της ποσότητας νερού (η οποία θα αρχίσει να ρέει έξω από τον τσιμεντόλιθο, όταν τα, προηγουμένως βυθισμένα, τμήματά του αρχίσουν να εξέρχονται από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού). Αντίθετα, οι τιμές της F_1 είναι ίσες λόγω των ίσων διαστάσεων των δύο τσιμεντόλιθων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η απαιτούμενη δύναμη είναι μικρότερη στην περίπτωση του συμπαγούς τσιμεντόλιθου.

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Γ.1. Εφόσον το σύστημα της ράβδου και του σφαιριδίου μάζας m είναι μονωμένο, διατηρούνται η ορμή και η στροφορμή του κατά τον άξονα περιστροφής της ράβδου:

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon = M\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{m\upsilon}{M}$$ όπου υ_{cm} η ταχύτητα του ΚΜ της ράβδου

Η ράβδος ως ελεύθερο στερεό στρέφεται γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, δηλαδή το μέσο της:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon d = I_{cm}\omega \Rightarrow m\upsilon d = \frac{1}{12}ML^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{12m\upsilon d}{ML^2}$$

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική διατηρείται η κινητική ενέργεια πριν και μετά την κρούση:

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^{\ 2} + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow m\upsilon^2 = M\frac{m^2\upsilon^2}{M^2} + \frac{1}{12}ML^2(\frac{12m\upsilon d}{ML^2})^2 \Rightarrow$$

$$m\upsilon^2 = m\upsilon^2(\frac{m}{M} + \frac{12md^2}{ML^2}) \Rightarrow 1 = \frac{mL^2 + 12md^2}{Ml^2} \Rightarrow m = M\frac{L^2}{L^2 + 12d^2} \Rightarrow m = M\frac{L^2}{L^2 + 12\frac{L^2}{36}}$$

$$\Rightarrow m = M\frac{L^2}{L^2 + \frac{L^2}{3}} \Rightarrow m = \frac{3}{4}M \Rightarrow m = 4,5Kg$$

Γ.2. Η ράβδος αμέσως μετά την κρούση εκτελεί σύνθετη κίνηση, η οποία εξετάζεται ως επαλληλία μεταφορικής και περιστροφικής γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσο της.

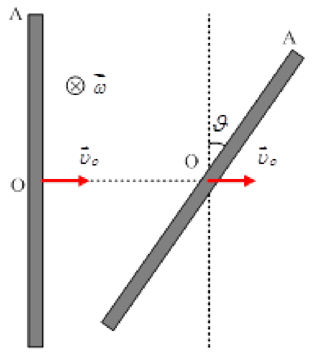
Η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης είναι: $\upsilon_{cm} = \dfrac{m\upsilon}{M} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \dfrac{4,5\times 4}{6}\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_{cm} = 3\dfrac{m}{s}$

Η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφικής κίνησης είναι:

$$\omega = \frac{12m\upsilon d}{ML^2} \Rightarrow \omega = \frac{12\cdot\frac{3}{4}M\upsilon\frac{L}{6}}{ML^2} \Rightarrow \omega = \frac{3}{2}\frac{\upsilon}{L} \Rightarrow \omega = 4\frac{rad}{s}$$

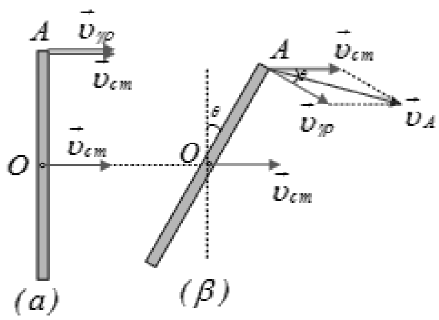
Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \dfrac{\pi}{12}s$ μετά την κρούση, η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία:

$$\theta = 4\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}rad$$



Γ.2.1. Η ταχύτητα του άκρου Α προκύπτει ως το διανυσματικό άθροισμα της μεταφορικής ταχύτητας και της γραμμικής: $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega\dfrac{L}{2} \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = 4\times\dfrac{1,5}{2} = 3\dfrac{m}{s}$

λόγω της περιστροφικής κίνησης που εκτελεί η ράβδος γύρω από το μέσο της Ο:



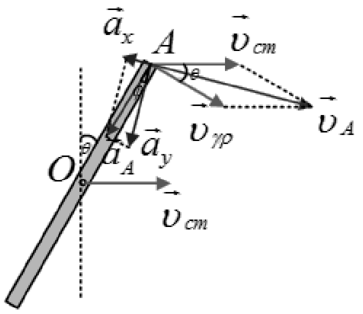
$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu\theta} = \sqrt{3\upsilon_{cm}^2} = \upsilon_{cm}\sqrt{3} \Rightarrow \upsilon_A = 3\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο έχει ίσες πλευρές, συνεπώς είναι ρόμβος και η διαγώνιος διχοτομεί την γωνία θ, οπότε η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ σχηματίζει γωνία φ=30° με την οριζόντια διεύθυνση.

Η μεταφορική κίνηση της ράβδου είναι ευθύγραμμη ομαλή, συνεπώς δεν υπάρχει επιτάχυνση. Λόγω όμως της στροφικής κίνησης της ράβδου το σημείο Α εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από το μέσο Ο, έχοντας κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$a_A = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{L/2} = \frac{2\upsilon_{\gamma\rho}^2}{L} \Rightarrow a_A = \frac{2\cdot 3^2}{1{,}5}\,m/s^2 \Rightarrow a_A = 12\,m/s^2$$

με κατεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς, δηλαδή το μέσο Ο της ράβδου. Αυτή είναι η επιτάχυνση του άκρου Α.



Γ.2.2. Αναλύουμε την επιτάχυνση $\vec{a}_A$ σε δύο συνιστώσες μια $\vec{a}_x$ που έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_A$ και μια $\vec{a}_y$ με διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$. (Η γωνία μεταξύ της επιτάχυνσης $\vec{a}_A$ και της $\vec{a}_y$ είναι ίση με 30°, αφού με τη γωνία φ έχουν τις πλευρές κάθετες μία προς μία και είναι οξείες γωνίες). Τα μέτρα τους είναι:

$$\alpha_x = \alpha_A \cdot \eta\mu\varphi = 12\cdot \tfrac{1}{2}\, m/s^2 = 6 m/s^2$$

$$\alpha_y = \alpha_A \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,m/s^2 = 6\sqrt{3}\,m/s^2$$

Η συνιστώσα $\vec{a}_x$ ως συγγραμμική με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ μεταβάλλει το μέτρο της, οπότε είναι η επιτρόχια επιτάχυνση της καμπυλόγραμμης τροχιάς του άκρου Α, ενώ η συνιστώσα $\vec{a}_y$ ως κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ μεταβάλλει τη διεύθυνσή της, οπότε είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση της καμπυλόγραμμης τροχιάς του άκρου Α. Ο λόγος λ των μέτρων τους είναι:

$$\lambda = \frac{\alpha_{\varepsilon\pi}}{\alpha_k} = \frac{\alpha_x}{\alpha_y} = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

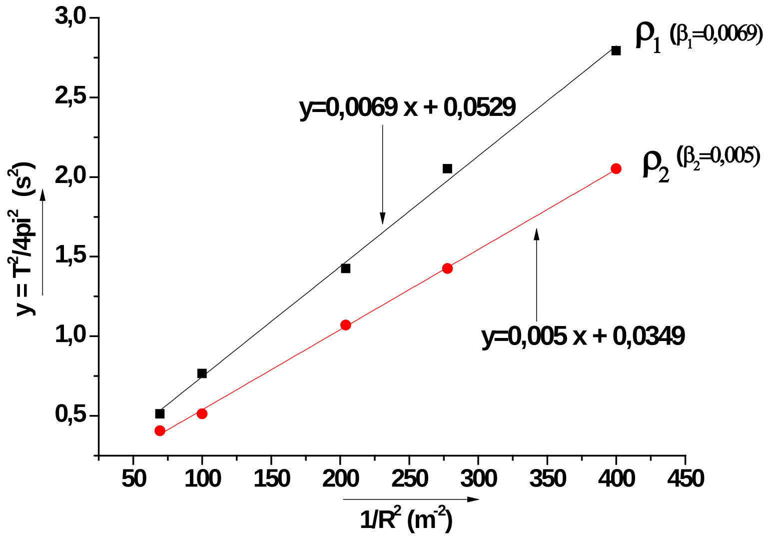
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. και **2.**

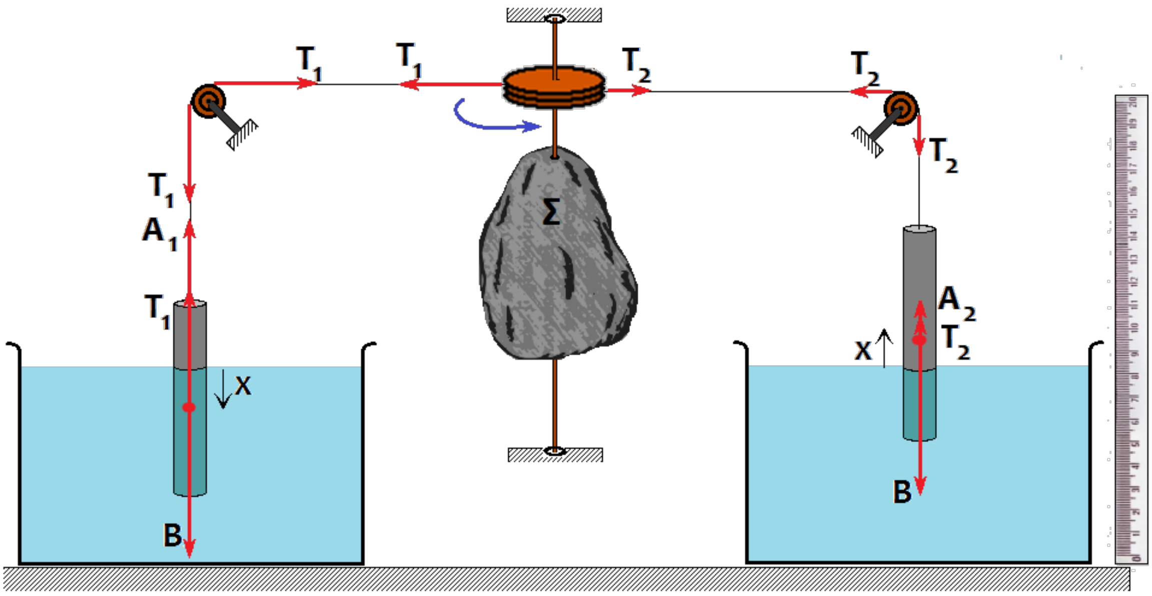
ρ_1 1000 kg/m^3	R_i (m)	T_i (sec)	$x_i = 1/R_i^2$ (m^{-2})	$y_i = T_i^2/4\pi^2$ (s^2)	x_i^2	$x_i * y_i$
1	0.05	10.5	400.00	2.79283	160000.0	1117.13
2	0.06	9.0	277.78	2.05187	77160.5	569.96
3	0.07	7.5	204.08	1.42491	41649.3	290.80
4	0.10	5.5	100.00	0.76629	10000.0	76.63
5	0.12	4.5	69.44	0.51297	4822.5	35.62
N	$\sum_{i=1}^{5} R_i$	$\sum_{i=1}^{5} T_i$	$\sum_{i=1}^{5} x_i$	$\sum_{i=1}^{5} y_i$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i$
5	0.4	37	1051.30	7.54887	293632.3	2090.15

ρ_2 1400 kg/m^3	R_i (m)	T_i (sec)	$x_i = 1/R_i^2$ (m^{-2})	$y_i = T_i^2/4\pi^2$ (s^2)	x_i^2	$x_i * y_i$
1	0.05	9.0	400.00	2.05187	160000.0	820.75
2	0.06	7.5	277.78	1.42491	77160.5	395.81
3	0.07	6.5	204.08	1.07026	41649.3	218.42
4	0.10	4.5	100.00	0.51296	10000.0	51.30
5	0.12	4.0	69.44	0.40530	4822.5	28.15
N	$\sum_{i=1}^{5} R_i$	$\sum_{i=1}^{5} T_i$	$\sum_{i=1}^{5} x_i$	$\sum_{i=1}^{5} y_i$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i$
5	0.4	31.5	1051.30	5.46533	293632.3	1514.42

3. και **4.**



5.



- Εφαρμόζοντας το 2ο Νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση στους δύο κυλίνδρους, καθώς και το 2ο Νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση του περιστρεφόμενου στερεού Σ (λαμβανομένου ως ενιαίο στερεό σύστημα μαζί με τον άξονα και το διπλό δίσκο), σε μια τυχαία θέση του συστήματος που αντιστοιχεί όταν ο ένας από τους δύο κυλίνδρους είναι κατά Χ βυθισμένος μέσα στο υγρό (ισοδύναμα ο άλλος είναι κατά Χ ανυψωμένος έξω από το υγρό αντίστοιχα) σχετικά με την αρχική του θέση

- Λαμβάνοντας υπόψη το φυσικό σύνδεσμο που απαιτεί
    - την ίδια κατά μέτρο επιτρόχια επιτάχυνση σε κάθε κύλινδρο, σε κάθε σημείο των νημάτων, σε κάθε σημείο της περιφέρειας του διπλού δίσκου λόγω μη εκτατού νήματος
    - και τη συνθήκη κίνησης για το δίσκο και το νήμα λόγω μη ολίσθησης του νήματος επί της περιφέρειας του δίσκου

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} B - A_1 - T_1 &= m_\kappa a_1 \\ B - A_2 - T_2 &= m_\kappa a_2 \\ T_1 R - T_2 R &= I a_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} m_\kappa g - \rho g V_1 - T_1 &= m_\kappa a \\ m_\kappa g - \rho g V_2 - T_2 &= -m_\kappa a \\ T_1 R - T_2 R &= I a / R \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

όπου $V_1 = \pi r^2 (h_o + x)$, $V_2 = \pi r^2 (h_o - x)$, και h_o το αρχικό βύθισμα των κυλίνδρων (πχ. Η/2 όπως στο σχήμα 1). Συνδυάζοντας τις 3 παραπάνω σχέσεις και επιλύοντας το 3x3 σύστημα εξισώσεων προκύπτει:

$$\boldsymbol{\alpha = -\frac{2\rho g \pi r^2 R^2}{I + 2 m_\kappa R^2} x}$$

Άρα ο κύλινδρος 1 υφίσταται επιτάχυνση α, και ο 2ος Ν. Νεύτωνα λέει ότι $F = m_\kappa a$ ή $F = -m_\kappa \frac{2\rho g \pi r^2 R^2}{I + 2 m_\kappa R^2} x$ ή $\boldsymbol{F = -Dx}$. Άρα η κίνηση που κάνει ο κύλινδρος είναι απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς

$$\boldsymbol{D = \frac{2\rho g \pi r^2 m_\kappa R^2}{I + 2 m_\kappa R^2}}$$

6. Από τη σχέση $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{1}{\omega^2}$ ή $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m_K}{D}$ ή $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I + 2 m_\kappa R^2}{2\rho g \pi r^2 R^2}$ και επομένως: $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I}{2\rho g \pi r^2 \boldsymbol{R}^2} + \frac{m_\kappa}{\rho g \pi r^2}$

$$y \equiv \boldsymbol{\frac{T^2}{4\pi^2}} = \left(\frac{I}{2\rho g \pi r^2}\right) \boldsymbol{\frac{1}{R^2}} + \frac{m_\kappa}{\rho g \pi r^2}$$

7. $\widehat{a} \equiv \frac{m_\kappa}{\rho g \pi r^2}$ και $\widehat{\beta} \equiv \left(\frac{I}{2\rho g \pi r^2}\right)$, επομένως $I \equiv 2\rho g \pi r^2 \widehat{\beta}$

$I_1 = 0.0966$ kg·m^2
$I_2 = 0.0982$ kg·m^2
$I = (I_1 + I_{2+})/2 = 0.0974$ kg·m^2

8. Όλες οι συνθήκες – παραδοχές αποτελούν λόγους απόκλισης από το ιδανικό.