Πλαστική Κρούση σε Κινούμενο Τροχό

Στην καρότσα ενός ημιφορτηγού που κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα V βρίσκεται τροχός μάζας Μ και ακτίνας R σε κατακόρυφο επίπεδο (σε ακλόνητη βάση πάνω στην καρότσα) που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Ο τροχός αρχικά δεν περιστρέφεται μέχρι που ένα κομμάτι πλαστελίνης μικρής μάζας m (πολύ μικρότερη από τη μάζα του τροχού και τη μάζα του ημιφορτηγού) πέφτει κατακόρυφα από τον ουρανό (που βρέθηκε άραγε;) και συγκρούεται πλαστικά με τον τροχό στο ανώτερο σημείο του (δηλ. πάνω στην κατακόρυφη που περνά από το κέντρο του τροχού. (Θεωρείστε ότι η ταχύτητά του ημιφορτηγού δεν μεταβάλλεται λόγω της … αύξησης της μάζας !!)

α)Πόση είναι η στροφορμή του συστήματος λίγο πριν την κρούση ως προς το κέντρο του τροχού;

β)Θα στραφεί ο δίσκος; Αν ναι ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση;

Λύση

Έστω Ο το κέντρο του τροχού, ότι η καρότσα κινείται προς τα δεξιά (την οποία φορά θεωρούμε ως θετική) και ως θετική φορά περιστροφής την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

α) Ένα λεπτό σημείο: Δεν αρκεί να λέμε η στροφορμή σώματος ως προς σημείο Ο αλλά και το σύστημα αναφοράς. Πραγματικά:

Η στροφορμή του συστήματος τροχού πλαστελίνης ως προς το Ο με σύστημα αναφοράς (παρατηρητή) <u>ακίνητο ως προς το **έδαφος**</u> είναι ΜΗΔΕΝ

Αλλά η στροφορμή του συστήματος τροχού πλαστελίνης ως προς το Ο με σύστημα αναφοράς (παρατηρητή) <u>ακίνητο ως προς την **καρότσα**</u> είναι mVR (διότι η ταχύτητα της πλαστελίνης ως προς τον παρατηρητή της «καρότσας» έχει δύο συνιστώσες: μία την κατακόρυφη και μία οριζόντια αντίθετη εκείνης του ημιφορτηγού)

β) Επειδή οι εξωτερικές ροπές ως προς το Ο είναι μηδέν **ισχύει η διατήρηση της στροφορμής** (<u>και για τα δύο συστήματα αναφοράς</u>)

1ος τρόπος (με διατήρηση της στροφορμής ως προς το Ο **στο σύστημα «καρότσας»**)

$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow mVR = I_{cm}\omega + m\upsilon_1 R$ όπου υ_1 η ταχύτητα της πλαστελίνης (ως προς την <u>καρότσα</u>) αμέσως μετά την κρούση που είναι προς τ' αριστερά.

Όμως $\upsilon_1 = \omega R$ (αφού το κέντρο του τροχού είναι ακίνητο ως προς την καρότσα)

Με αντικατάσταση προκύπτει : $\omega = \dfrac{mVR}{(I_{cm} + mR^2)}$

2ος τρόπος (με διατήρηση της στροφορμής ως προς το Ο **στο σύστημα «εδάφους»**)

<u>Στο σύστημα «εδάφους»</u>, μετά την κρούση:

i) ο τροχός γενικά έχει στροφορμή λόγω spin (ιδιοπεριστροφή) και λόγω τροχιακής κίνησης. Αλλά ως προς το Ο εμφανίζεται μόνο το spin. $I_{cm}\omega$

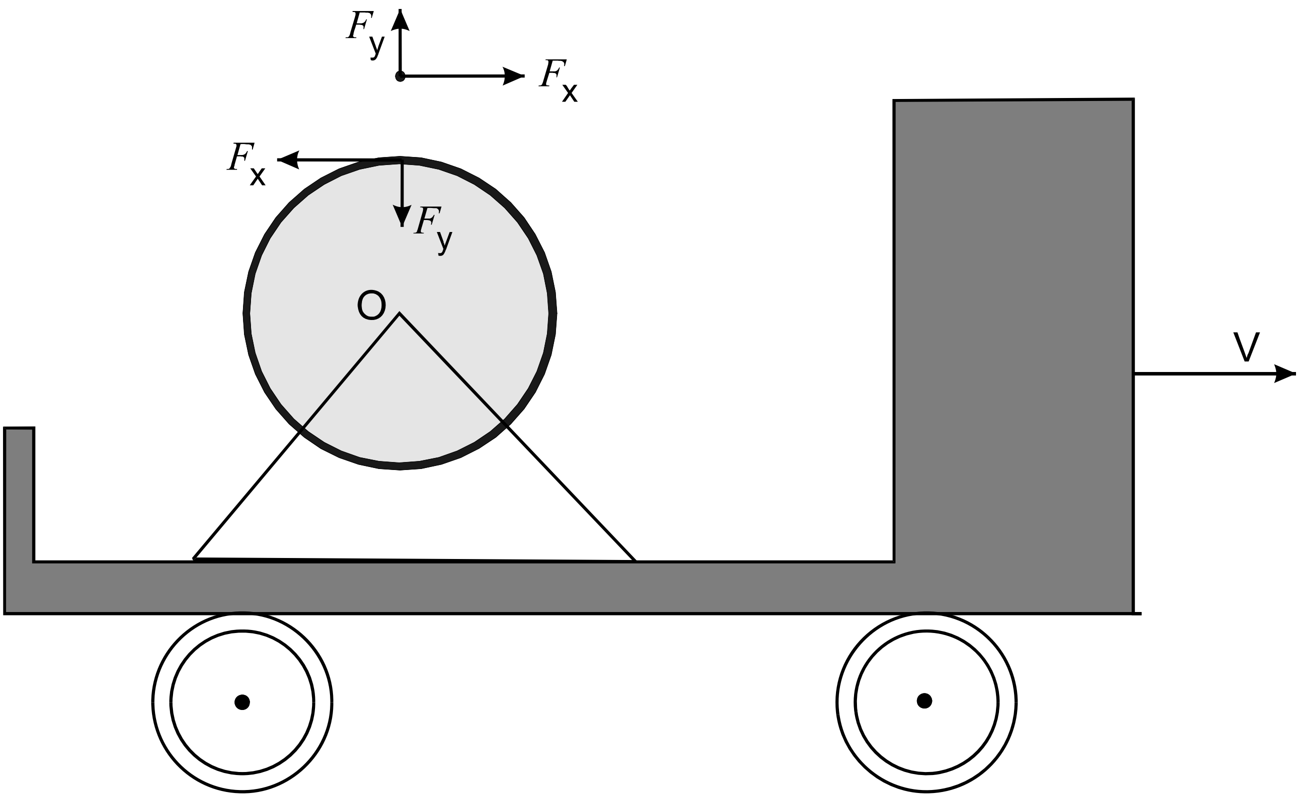
ii) η πλαστελίνη σίγουρα αποκτά (οριζόντια) ταχύτητα υ_1' (στο σύστημα εδάφους) προς τα δεξιά, επομένως η στροφορμή της είναι αρνητική ως προς το Ο.

$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow 0 = I_{cm}\omega - m\upsilon_1' R$

Όμως, επειδή το στερεό ως προς το έδαφος εκτελεί σύνθετη κίνηση, η ταχύτητα του ανώτατου σημείου (ως επαλληλία κινήσεων) είναι : $\upsilon_1' = V - \omega R$

Με αντικατάσταση προκύπτει πάλι ο ίδιος τύπος.

3^{ος} τρόπος (με νόμους Νεύτωνα στο σύστημα «εδάφους»)



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται ξεχωριστά σε κάθε σώμα κατά τη διάρκεια της κρούσης . Η πλαστελίνη περιμένουμε να αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα και μάλιστα προς τα δεξιά (στη κατεύθυνση κίνησης του ημιφορτηγού). Άρα κατά την κρούση η οριζόντια δύναμη που του ασκείται έχει τη φορά του σχήματος. Σχεδιάζουμε με βάση τον 3^{ο} ΝΝ τις δυνάμεις στο άλλο σώμα και …αμέσως γίνεται φανερό ότι ο τροχός θα περιστραφεί.

Εφαρμόζουμε τον 2^{ο} ΝΝ

Για την **πλαστελίνη** : $\Sigma F_x = \dfrac{\Delta p_x}{\Delta t} \Rightarrow \quad m\upsilon' - 0 = F_x \Delta t \quad (1)$

όπου υ' η (οριζόντια) ταχύτητα της πλαστελίνης αμέσως μετά την κρούση.

Για τον **τροχό**: $\Sigma\tau = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \quad I_{cm}\omega - 0 = F_x R \Delta t \qquad (2)$

Από (1) και (2) (με απαλοιφή της ώθησης): $I_{cm}\omega = Rm\upsilon' \qquad (3)$

Όμως επειδή το στερεό ως προς τον έδαφος εκτελεί σύνθετη κίνηση, η ταχύτητα του ανώτατου σημείου (ως επαλληλία κινήσεων) είναι : $\upsilon' = V - \omega R$ (4)

Από (3) και (4) προκύπτει πάλι ο ίδιος τύπος.

Σχόλιο: Η λύση της άσκησης με τον 3ο τρόπο μειώνει τις παρανοήσεις και τα εύκολα λάθη που μπορούν να γίνουν με το 2ο τρόπο, γράφοντας π.χ. τη διατήρηση της στροφορμής ως :

$$0 = (I_{cm} + mR^2)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = 0 \quad \text{(που φυσικά δεν ισχύει !!)}$$