Χρειάζονται τα δεξιόστροφα συστήματα στη μελέτη του «στερεού»;

Σε πολλά προβλήματα του κεφαλαίου «Στερεό Σώμα» είμαστε υποχρεωμένοι να έχουμε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων. Για παράδειγμα σε έναν κύλινδρο που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο ο ένας άξονας επιλέγεται παράλληλος στη ταχύτητα του κέντρου μάζας , ο δεύτερος κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο και ο τρίτος άξονας κάθετος στους δύο προηγούμενους με τον οποίο είναι παράλληλες η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση.
Σε αυτό το σημείο ξεκινά η σύγχυση περί «δεξιόστροφων» συστημάτων.

Πότε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz είναι δεξιόστροφο;

Όπως με τον κανόνα των τριών δακτύλων της δύναμης Laplace έτσι και εδώ αν προσανατολίσουμε τον αντίχειρα το δεξιού χεριού στον θετικό ημιάξονα Ox, το δείκτη στον θετικό ημιάξονα Oy και ο μέσος δείχνει τον θετικό ημιάξονα Oz τότε το σύστημα είναι δεξιόστροφο.

I	Ox
B	Oy
F	Oz

Πότε και γιατί είναι χρήσιμη η επιλογή του δεξιόστροφου συστήματος;

- Όταν χρησιμοποιείται το εξωτερικό γινόμενο στις διανυσματικές σχέσεις τότε υποχρεωτικά πρέπει να έχουμε επιλέξει εκ των προτέρων δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς γιατί π.χ. η σχέση $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ ισχύει μόνο σε δεξιόστροφα συστήματα.
- Αν όμως χρησιμοποιούμε αλγεβρικές σχέσεις διανυσμάτων τότε δεν υπάρχει **κανένας λόγος** να επιλέξουμε δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς.

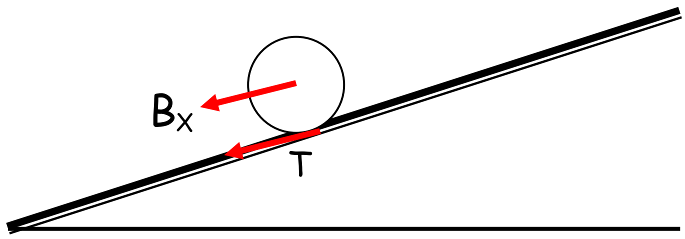
Δυστυχώς, η σύγχυση αυτή είχε (και θα εξακολουθεί να έχει) αρνητικές επιπτώσεις στη βαθμολογία των υποψηφίων στις Πανελλήνιες Εξετάσεις.
Για παράδειγμα στην ιστοσελίδα του εκλεκτού συνάδελφου Ανδρέα Κασσέτα :
http://users.sch.gr/kassetas/educ100mist.htm
αναφέρεται το πρόβλημα που προέκυψε στο 4^{o} Θέμα το 2004:

Συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας *m = 10 kg* και ακτίνας *R = 0,1 m* κυλίεται χωρίς ολίσθηση **ανερχόμενη** κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ με ημφ=0,56. Τη χρονική στιγμή ***t = 0*** το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει ταχύτητα με μέτρο $\upsilon_0 = 8\ m/s$. Να υπολογίσετε για τη σφαίρα:
α. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της τη χρονική στιγμή t = 0.
β. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της.
Δίνονται : η ροπή αδράνειας της σφαίρας περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο της. : $I = {}^{2}/_{5}\, mR^{2}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$.

Μεταφέρω εδώ τα σχόλια του συναδέλφου για το ερώτημα β **με μπλε χρώμα** και **με χρώμα κόκκινο είναι οι δικές μου παρατηρήσεις**

Μια λύση με λάθος την κατεύθυνση της τριβής
(Βρέθηκε σε δεκάδες γραπτά)

Ανδρέας Ιωάννου Κασσέτας



$$-T - mg_x = ma_{cm}$$

$$TR = 2/5 mR^2 a_{γων}$$

$$a_{cm} = a_{γων} R \quad \text{άρα}$$

$$a_{cm} = -5/7 g_x \qquad a_{cm} = -4\ m/s^2$$

Καταλήγει σε σωστό αποτέλεσμα.

Η ερώτηση: Υπάρχει άραγε λάθος και εάν ΝΑΙ που βρίσκεται;

Η απάντηση:

Δεν είναι μόνο το ότι έχει σημειωθεί λανθασμένα η στατική τριβή. Είναι και ότι οι αλγεβρικές σχέσεις δεν έδειξαν τη λάθος κατεύθυνση της τριβής. Ας τις δούμε:

Η στατική τριβή δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή σε όλα τα προβλήματα. Δεν είναι λάθος να επιλεγεί αυθαίρετα. Αν το αποτέλεσμα προκύψει αρνητικό αυτό σημαίνει ότι η πραγματική της φορά είναι αντίθετη από εκείνη που είχε επιλεχθεί.

Σε αντιδιαστολή με την στατική τριβή , η τριβή ολίσθησης που ασκείται σε ένα σώμα Α από ένα σώμα Β έχει πάντα αντίθετη φορά από τη σχετική ταχύτητα των σημείων επαφής των σωμάτων Α και Β ως προς το σημείο επαφής του Β . Δεν υπάρχει τότε περίπτωση να βγάλουμε σωστά αποτελέσματα αν σχεδιάσουμε λανθασμένα τη συγκεκριμένη φορά της, αφού θα έχει ήδη αντικατασταθεί από τον νόμο της (Τ=μΝ) στις εξισώσεις ($2^{ο}$ ΝΝ). <u>Δεν είναι δηλαδή ένας «άγνωστος» όπως η Στατική τριβή.</u>

1 $- T - mg_x = ma_{cm}$ **ΣΩΣΤΟ** εάν δεχθούμε ότι ο προσανατολισμός του άξονα x γίνεται με + προς τα πάνω δεξιά και ότι τα σύμβολα Τκαι mg_x παριστάνουν τα μέτρα των αντίστοιχων μεγεθών ($T > 0$, mg_x .> 0) ενώ το a_{cm} παριστάνει την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης

Δηλαδή αν του προκύψει στο τέλος T<0 δεν μπορεί να το δικαιολογήσει;

2 $TR = 2/5 mR^2 a_{γων}$ **ΛΑΘΟΣ** **ΣΩΣΤΟΤΑΤΟ**

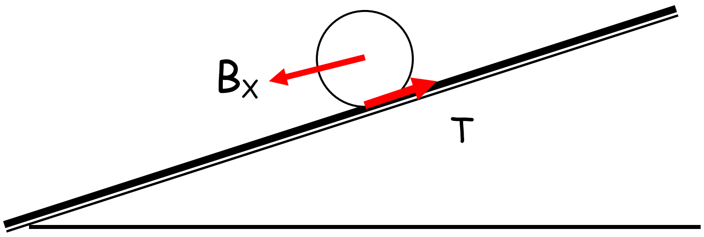
3 $a_{cm} = a_{γων} R$ **ΛΑΘΟΣ** **ΣΩΣΤΟΤΑΤΟ**

ο μαθητής επέλεξε ως θετικό ημιάξονα Oz κάθετο στη σελίδα με φορά προς τα μέσα : ⊗ (και καλά έκανε)

$a_{cm} = -5/7 g_x$ ΣΩΣΤΟ

Γιατί όμως οι δύο σχέσεις είναι *και* οι δύο ΛΑΘΟΣ; Δύσκολη η απάντηση

Ας δούμε τη λύση με αλγεβρικές τιμές



$T + mg_x = ma_{cm}$ (1) Η εξίσωση με τον δεύτερο νόμο απαιτεί κάποιο προσανατολισμό του άξονα x. Μόνο σε σχέση με αυτόν τον προσανατολισμό οι αλγεβρικές τιμές των μεγεθών αποκτούν αλγεβρική υπόσταση

$TR = 2/5 mR^2 a_{γων}$ (2) Η εξίσωση αυτή συσχετίζει αλγεβρικές τιμές μεγεθών (ροπή και γωνιακή επιτάχυνση) τα οποία αντιστοιχούν σε διανύσματα κάθετα στο επίπεδο του σχήματος. Για να λειτουργήσει συνεπώς απαιτεί κάποιο προσανατολισμό ενός άλλου άξονα του z , κάθετου στο σχήμα .

Για να είναι όμως συμβατές και οι δύο εξισώσεις, για να μπορεί δηλαδή το σύμβολο Τ να είναι κάτι ΘΕΤΙΚΟ (ή αρνητικό) ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΔΥΟ πρέπει ο συνδυασμός των δύο προσανατολισμών να μην οποιοσδήποτε. (και άμα ασκούνται και άλλες δυνάμεις και ροπές τι νόημα έχουν αυτά; καινοφανείς συλλογισμοί !) Από τους τέσσερις συνδυασμούς των δύο προσανατολισμών

x + δεξιά πάνω (δ) και z + ⊗ (δηλ Οx προς τα ↗, Οz προς τα μέσα)

x + δεξιά πάνω (δ) και z + προς τα έξω

x + αριστερά κάτω (α) και z + ⊗ (δηλ Οx προς τα ↙ , Οz προς τα μέσα) x + αριστερά κάτω (α) και z + προς τα έξω

μόνο οι δύο είναι συμβατοί

O x + δ και z + προς τα έξω (δηλ Ox προς τα ↗ , Oz προς τα έξω)

Και O x + α και z + ⊗ (δηλ Ox προς τα ↙ , Oz προς τα μέσα)

Λάθος Μέγα !!

Θα έστεκε «τυπικά» ένας τέτοιος ισχυρισμός μόνο εφόσον είχε προεπιλεχθεί ο άξονας Oy . Αν ο Oy έχει θετική φορά προς τα ↘ τότε το σύστημα

x + δ και z + ⊗ (δηλ Ox προς τα ↗ , Oz προς τα μέσα)

που διάλεξε ο μαθητής είναι δεξιόστροφο !

~~Με βάση αυτή τη σύμβαση η σχέση των αλγεβρικών τιμών των a_{cm} και $a_{γων}$ είναι η $\underline{a_{cm} = - a_{γων}R}$ (3) . Από τις τρεις σχέσεις προκύπτει $a_{cm} = 5/7 g_x$~~

~~Εξυπακούεται βέβαια ότι μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα μέτρα των αντίστοιχων μεγεθών.~~

~~Ας δούμε και τη λύση με μέτρα.~~

$$T - mg_x = ma_{cm} \qquad TR = 2/5\, mR^2 a_{γων} \qquad a_{cm} = a_{γων}R$$

$$a_{cm} = 5/7 g_x \qquad a_{cm} = 4m/s^2$$

Και ορισμένα συμπεράσματα (του κ. Κασσέτα)

1. Κατά τη μελέτη του φαινομένου ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ η χρήση ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ των διανυσματικών μεγεθών θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη είναι αναγκαία

2. Κατά τη μελέτη του φαινομένου ΚΡΟΥΣΗ και ειδικά κατά την εφαρμογή της Διατήρησης της ορμής η χρήση ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ για τα διανυσματικά μεγέθη ταχύτητα και ορμή είναι κατά τη γνώμη μας προτιμότερη και πιο κομψή από τη χρήση μέτρων για τα αντίστοιχα μεγέθη

3. Κατά τη μελέτη του φαινομένου ΚΥΛΙΣΗ όταν χρειαστεί να παρουσιάσουμε σχέσεις διανυσματικών μεγεθών σε δύο κάθετους άξονες η χρήση των ΜΕΤΡΩΝ των διανυσματικών μεγεθών είναι, από τη σκοπιά της Διδακτικής, προτιμότερη από τη χρήση αλγεβρικών τιμών.

Λάθος !! Χωρίς τις αλγεβρικές τιμές μπορούμε να έχουμε ένα πανηγύρι «ακροβατισμών» και στο τέλος δε θα είμαστε σε θέση να ελέγξουμε ποιες δυνάμεις είχαμε θέσει σωστά και ποιες όχι, και όχι μόνο αυτό ….

και επανέρχομαι στο μαύρο μελάνι …

Σχόλια – Συμπεράσματα

1. Από τη στιγμή που δεν χρησιμοποιούμε διανυσματικές σχέσεις με εξωτερικά γινόμενα στις εξισώσεις μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα όποια φορά θέλουμε ως θετική για κάθε έναν από τους τρεις άξονες. Δεν χρειάζονται δεξιόστροφα συστήματα.

2. Σχεδιάζουμε με όποια φορά θέλουμε τη στατική τριβή (ενώ αντίθετα η φορά της τριβής ολίσθησης πρέπει να είναι σωστά σχεδιασμένη).

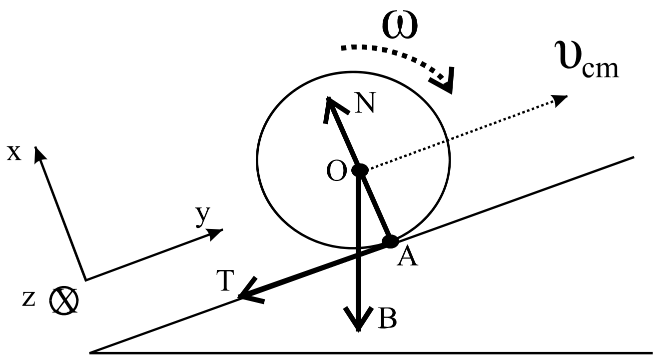
3. Κάνουμε χρήση των «αλγεβρικών τιμών» ή ορθότερα δεν επιβάλλουμε εκ των προτέρων τα μεγέθη να είναι θετικά (μέτρα μεγεθών) αλλά αφού εκτελέσουμε τις πράξεις προβαίνουμε στα τελικά συμπεράσματα λαμβάνοντας υπόψη τα πρόσημα των αποτελεσμάτων που βρήκαμε.

Σε «μη λυκειακά» προβλήματα όπου ο άξονας περιστροφής του στερεού (ή η στροφορμή του) δεν έχουν σταθερή διεύθυνση στο χώρο επιβάλλεται ο διανυσματικός λογισμός και επομένως η χρήση δεξιόστροφου συστήματος αφού τα ψευδο-ανύσματα της στροφορμής και της γωνιακής ταχύτητας συνδέονται με εξωτερικά γινόμενα ανυσμάτων.

Στην τρίτη σελίδα οι σχέσεις 1 , 2 και 3 χαρακτηρίστηκαν από το συνάδελφο ως Σωστή , Λάθος και Λάθος αντίστοιχα. Προσέξτε ότι η πρώτη αντιστοιχεί στον άξονα κίνησης του κέντρου μάζας με θετική φορά ↗ ενώ οι άλλες δύο είναι πάνω στον άξονα τον κάθετο στη σελίδα με φορά προς τα μέσα. Ακόμα και στην περίπτωση που ο μαθητής είχε επιλέξει αριστερόστροφο σύστημα οι αλγεβρικές τιμές που έγραψε για κάθε άξονα είναι σωστές !

Στην επόμενη σελίδα ακολουθεί η απόδειξη που είχα στείλει στον συνάδελφο τον Ιανουάριο του 2005. Επιλέγω **δεξιόστροφο** σύστημα συντεταγμένων και επιστρατεύω όλο τον αυστηρό μαθηματικό διανυσματικό φορμαλισμό για να δείξω ότι και οι τρεις παραπάνω σχέσεις είναι απολύτως ορθές. (Παρεμπιπτόντως δεν έλαβα μέχρι σήμερα, Ιούλιος 2010, καμία απάντηση στο e-mail που είχα στείλει).

Αν κάποιοι μαθητές αδικήθηκαν ας όψεται η … άγνοια κάποιων βαθμολογητών. Είναι χρέος όλων μας να τους ενημερώσουμε.



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow \quad \vec{B}+\vec{N}+\vec{T} = m\vec{a}_{cm} \quad \textbf{(1)}$$

$$\Sigma\vec{\tau}_{(cm)} = \mathrm{I}\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \quad \vec{r}_{OA}\times\vec{T} = \mathrm{I}\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \quad \textbf{(2)}$$

Με βάση **το δεξιόστροφο** σύστημα συντεταγμένων του σχήματος έχουμε:

$\vec{\upsilon}_{cm} = \upsilon_{cm}\vec{e}_y$ **(3)** $\Rightarrow \vec{a}_{cm} = a_{cm}\vec{e}_y$ **(4)** όπου

$a_{cm} = \dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt}$ **(5)**

$\vec{\omega} = \omega\cdot\vec{e}_z$ **(6)** $\Rightarrow \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\vec{e}_z$ **(7)** όπου $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{d\omega}{dt}$ **(8)**

$\vec{B} = -mg\eta\mu\phi\,\vec{e}_y - mg\sigma\upsilon\nu\phi\,\vec{e}_x$ **(9)** , $\vec{N} = N\,\vec{e}_x$ **(10)** , $\vec{T} = -T\,\vec{e}_y$ **(11)** , $\vec{r}_{OA} = -R\vec{e}_x$ **(12)**

$$(1) \underset{(4)}{\overset{(9),(10),(11)}{\Rightarrow}} \quad (-T - mg\eta\mu\phi)\,\vec{e}_y + (N - mg\sigma\upsilon\nu\phi)\,\vec{e}_x = m\cdot a_{cm}\,\vec{e}_y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -T - mg\eta\mu\phi = ma_{cm} & \textbf{(13)} \\ N - mg\sigma\upsilon\nu\phi = 0 \end{cases}$$

η σχέση 1

$$(2) \underset{(7)}{\overset{(11),(12)}{\Rightarrow}} \quad (-R\,\vec{e}_x)\times(-T\,\vec{e}_y) = I\alpha_{\gamma\omega\nu}\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad TR(\vec{e}_x\times\vec{e}_y) = I\alpha_{\gamma\omega\nu}\vec{e}_z$$

όμως $\vec{e}_x\times\vec{e}_y = \vec{e}_z$ **άρα** $TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ **(14)**

η σχέση 2

Τέλος , η κύλιση χωρίς ολίσθηση σημαίνει $\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}} = \vec{0}$**, αλλά**

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{OA} \underset{(6),(12)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} \quad 0 = \upsilon_{cm}\vec{e}_y + (\omega\vec{e}_z)\times(-R\vec{e}_x) \Rightarrow \quad 0 = \upsilon_{cm}\vec{e}_y - \omega R(\vec{e}_z\times\vec{e}_x)$$

όμως $\vec{e}_z\times\vec{e}_x = \vec{e}_y$ **, επομένως ισχύει** $\underline{\upsilon_{cm} = \omega R}$ **από την οποία με παραγώγιση**

προκύπτει: $\dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} \underset{(8)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}} \quad a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$ **(15)**

η σχέση 3

Από την επίλυση του συστήματος των (13), (14) και (15) προκύπτουν:

α) $T < 0$, από το οποίο οδηγούμαστε στην πραγματική φορά της στατικής τριβής που είναι προς τα επάνω τόσο με βάση το σχήμα όσο και με βάση την (11).

β) $\alpha_{cm}<0$ που είναι αληθές αφού επιβραδύνεται

γ) $\alpha_{\gamma\omega\nu}<0$ που σύμφωνα με τις (6) και (7) οδηγεί στο συμπέρασμα $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$, δηλαδή επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση.