

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Ιδιότητες δυνάμεων

$$\alpha^k \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{k+\lambda}$$

$$\alpha^k \cdot \beta^k = (\alpha\beta)^k$$

$$(\alpha^k)^{\lambda} = \alpha^{k\lambda}$$

$$\frac{\alpha^k}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{k-\lambda}$$

$$\frac{\alpha^k}{\beta^k} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

Ορισμοί

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}, \quad \alpha \neq 0$$

Άξιοσημείωτες ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^v - \beta^v = (\alpha - \beta)(\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{v-2} + \beta^{v-1})$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = \beta = \gamma \end{array} \right\} \text{τότε } \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$$

Ιδιότητες ανισοτήτων

- Av $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Av $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
- Av $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- Av $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει
Av $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$
- Για θετικούς αριθμούς α, β και ν φυσικός $\neq 0$, ισχύει:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$$

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$
- Av α, β ομόσημοι τότε

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

Ιδιότητες των απολύτων τιμών

- ✓ $|\alpha| \geq 0$
- ✓ $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- ✓ $|\alpha|^2 = \alpha^2$
- ✓ Av $\theta > 0$ τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- ✓ $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
- ✓ Av $\theta > 0$, τότε $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
- ✓ Av $\theta > 0$ τότε $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta$



✓ $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

✓ $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

✓ $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Ιδιότητες ριζών

► $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

► Av $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$ και $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$

► Av $\alpha, \beta \geq 0$ τότε

i) $\sqrt[\nu]{\alpha} \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

ii) $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}, \beta \neq 0$

► Av $\alpha \geq 0$

i) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$

ii) $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Απόσταση σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ευθείες παράλληλες, κάθετες

Av $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$

- τότε
- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$
 - $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 = -1$

Μελέτη συνάρτησης

• i) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **άρπια** αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x).$$

ii) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιπτή** αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

iii) Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει.

$$\text{αν } x_1 < x_2 \text{ τότε } f(x_1) < f(x_2)$$

iv) Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$\text{αν } x_1 < x_2 \text{ τότε } f(x_1) > f(x_2)$$

v) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 \in A$ όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

vi) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0 \in A$ όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A.$$

Συστήματα

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix} = a\beta' - a'\beta$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix} = a\gamma' - a'\gamma$$

• αν $D \neq 0$, έχει μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$

• αν $D = 0$ και $(D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0)$ είναι αδύνατο

• αν $D = D_x = D_y = 0$ είναι αόριστο,

εκτός αν $a = a' = \beta = \beta' = 0$ και $\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$, οπότε είναι αδύνατο.

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ $a \neq 0$

$\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	2 ρίζες πραγματικές και άνισες
$\Delta = 0$	$x_0 = \frac{-\beta}{2a}$	1 ρίζα πραγματική και διπλή
$\Delta < 0$	δεν έχει πραγματικές ρίζες	

Άθροισμα S και γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + c$

Av $\Delta > 0 \quad f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Av $\Delta = 0 \quad f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Av $\Delta < 0 \quad \text{Δεν παραγοντοποιείται}$

Πρόσημο τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

i) $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του a	επερόσημο του a	ομόσημο του a	

ii) $\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του a		ομόσημο του a

iii) $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του a	

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τύποι Τριγωνομετρίας

ημ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ημ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

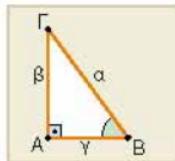
ημ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

εφx = $\frac{\etaμx}{\sin x}$

σφx = $\frac{\sin x}{\etaμx}$

εφx = $\frac{1}{\sigmaφx}$

σφx = $\frac{1}{\epsilonφx}$



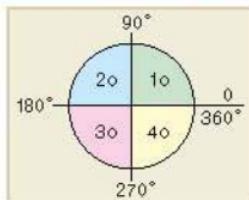
ημB = $\frac{\beta}{a}$

εφB = $\frac{\beta}{y}$

συνB = $\frac{y}{a}$

σφB = $\frac{y}{\beta}$

Πρόσημο Τριγωνομετρικών αριθμών



	1o	2o	3o	4o
ημίτονο	+	+	-	-
συνημίτονο	+	-	-	+
εφαπτομένη	+	-	+	-
συνεφαπτομένη	+	-	+	-

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

ημx = ημa $\Rightarrow x = 2k\pi + a$ $x = 2k\pi + \pi - a$ $\left. \right\} k \in \mathbb{Z}$

συνx = συνa $\Rightarrow x = 2k\pi \pm a, k \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{εφχ} = \text{εφα} \\ \text{σφχ} = \text{σφα} \end{array} \right\} \Rightarrow x = k\pi + a, k \in \mathbb{Z}$$

Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο

- i) $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$ $\varepsilon\phi(-x) = -\varepsilon\phi x$
 $\sigma\sin(-x) = \sigma\sin x$ $\sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x$
- ii) Τόξα στα οποία υπάρχει το 90° ή 270° οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αλλάζουν και το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο που λήγει το τόξο. π.χ $\eta\mu(90^\circ + a) = \sigma\sin a$ (θεωρούμε πάντα ότι $0^\circ < a < 90^\circ$)
- iii) Τόξα στα οποία υπάρχει το 180° , 360° ή πολλαπλάσιο του 360° , οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν αλλάζουν και το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο που λήγει το τόξο π.χ. $\eta\mu(180^\circ - a) = \eta\mu a$ (θεωρούμε πάντα ότι $0^\circ < a < 90^\circ$)

Γνωστοί τριγωνομετρικοί αριθμοί

	$45^\circ (\pi/4)$	$60^\circ (\pi/3)$	$30^\circ (\pi/6)$
ημίτονο	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
συνημίτονο	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
εφαπτομένη	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
συνεφαπτομένη	1	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$

	0°	$90^\circ (\pi/2)$	$180^\circ (\pi)$	$270^\circ (3\pi/2)$	$360^\circ (2\pi)$
ημίτονο	0	1	0	-1	0
συνημίτονο	1	0	-1	0	1
εφαπτομένη	0	-	0	-	0
συνεφαπτομένη	-	0	-	0	-

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu\alpha\sin\beta + \eta\mu\beta\sin\alpha \\ \eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu\alpha\sin\beta - \eta\mu\beta\sin\alpha \\ \sigma\sin(\alpha + \beta) &= \sigma\sin\alpha\sin\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \\ \sigma\sin(\alpha - \beta) &= \sigma\sin\alpha\sin\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \\ \varepsilon\phi(\alpha + \beta) &= \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta} & \varepsilon\phi(\alpha - \beta) &= \frac{\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta}{1 + \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta} \\ \sigma\phi(\alpha + \beta) &= \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha} & \sigma\phi(\alpha - \beta) &= \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha} \end{aligned}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $2a$

$$\begin{aligned} \checkmark \eta\mu 2a &= 2\eta\mu a \sin\alpha \\ \checkmark \sigma\sin 2a &= \frac{\sigma\sin^2 a - \eta\mu^2 a}{1 - 2\eta\mu^2 a} \\ \checkmark 1 - \sigma\sin 2a &= 2\eta\mu^2 a & \checkmark 1 + \sigma\sin 2a &= 2\sigma\sin^2 a \\ \checkmark \varepsilon\phi 2a &= \frac{2\varepsilon\phi a}{1 - \varepsilon\phi^2 a} & \checkmark \varepsilon\phi^2 a &= \frac{1 - \sigma\sin 2a}{1 + \sigma\sin 2a} \\ \checkmark \eta\mu^2 a &= \frac{1 - \sigma\sin 2a}{2} & \checkmark \sigma\sin^2 a &= \frac{1 + \sigma\sin 2a}{2} \end{aligned}$$

Αριθμητικές πρόσδοι

1. $a_{v+1} = a_v + \omega \Leftrightarrow a_{v+1} - a_v = \omega$, όπου ω η διαφορά της αριθμ. προσδόου
 2. $a_v = a_1 + (v-1) \omega$, ο νοστός όρος (ή όρος τάξεως v) της αριθμ. προσδόου.
 3. a, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμ. προσδόου $\Leftrightarrow 2\beta = a + \gamma$
 (όπου $\beta = \frac{a + \gamma}{2}$ ο αριθμητικός μέσος των a, γ)
 4. $S_v = \frac{(a_1 + a_v) \cdot v}{2}$
 5. $S_v = \frac{[2a_1 + (v-1)\omega] \cdot v}{2}$
- $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Άθροισμα ν πρώτων όρων αριθμητικής προσδόου}$

Γεωμετρικές πρόσδοι

1. $a_{v+1} = a_v \cdot \lambda \Leftrightarrow \frac{a_{v+1}}{a_v} = \lambda$, όπου λ ο λόγος της γεωμετρικής προσδόου
2. $a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$ ο νοστός όρος (ή όρος τάξεως v) της γεωμετρικής προσδόου
3. a, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμ. προσδόου $\Leftrightarrow \beta^2 = a \cdot \gamma$
 (όπου $\beta = \sqrt{a \cdot \gamma}$ ο γεωμετρικός μέσος των a, γ)
4. $S_v = \frac{a_1 \cdot (\lambda^v - 1)}{\lambda - 1}$
 'Άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προσδόου

Εκθετικές συναρτήσεις

1. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$, αν $a \neq 1$, λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση a , ενώ αν $a = 1$ έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$ (Γενικά είναι $a > 0$)
2. • Γενικά, για την εκθετική συνάρτηση ισχύουν:
 - αν $a > 1$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα
 - αν $0 < a < 1$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα
3. Η εκθετική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών $f(A) = (0, +\infty)$.

Λογαριθμικές συναρτήσεις

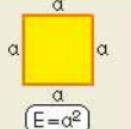
1. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_a x$ λέγεται λογαριθμική συνάρτηση ως προς βάση a , με $0 < a \neq 1$.
2. • Για τη συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ ισχύουν:
 - αν $a > 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα
 - αν $0 < a < 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα
3. • Ιδιότητες λογαρίθμων
 - $\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta < \begin{array}{l} \log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta \\ (\theta > 0 \text{ και } 0 < a \neq 1) \quad \ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta \end{array}$
 - $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
 - $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$
 - $\log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$
 - $\log_a a = 1, \ln e = 1, \log 10 = 1$

- $\log_a 1 = 0, \ln 1 = 0$
- $\log_a a^x = x, a^{\log_a \theta} = \theta$

- $\lambda \log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$ (αλλαγή βάσης)

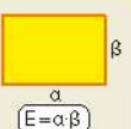
Εμβαδά

Τετράγωνο



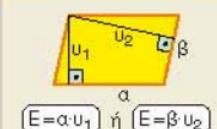
$$E = a^2$$

Ορθογώνιο



$$E = a \cdot \beta$$

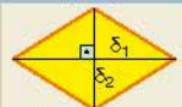
Παραλληλόγραμμο



$$E = a \cdot u_1$$

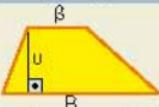
$$\text{ή } E = \beta \cdot u_2$$

Ρόμβος



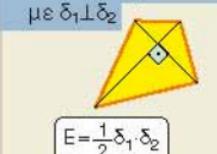
$$E = \frac{1}{2} \delta_1 \cdot \delta_2$$

Τραπέζιο



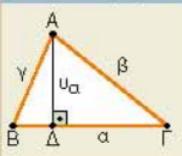
$$E = \frac{\beta + B}{2} u$$

Τετράπλευρο με δ₁, δ₂



$$E = \frac{1}{2} \delta_1 \cdot \delta_2$$

Τυχαίο τρίγωνο



- $E = \frac{1}{2} a \cdot u_a = \frac{1}{2} \beta \cdot u_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot u_\gamma$

- $E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \eta_m A = \frac{1}{2} a \cdot \gamma \eta_m B = \frac{1}{2} a \beta \eta_m \Gamma$

- $E = \frac{a \beta \gamma}{4R} = \tau \cdot \rho$ όπου R , ρ οι ακτίνες περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου και $\tau = \frac{a + \beta + \gamma}{2}$

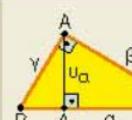
Ισόπλευρο τρίγωνο



$$E = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$u = \frac{a \sqrt{3}}{2}$$

Ορθογώνιο τρίγωνο



$$E = \frac{1}{2} \beta \gamma$$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2} a \cdot u_a$$

✓ Αν λγ, a_v η πλευρά και το απόστημα κανονικού ν-γωνου, τότε:

- $a_v^2 + \frac{\lambda_g^2}{4} = R^2$
- $E_v = \frac{1}{2} P_v a_v$ όπου P_v η περίμετρος του ν-γωνου

$$\bullet \lambda_6 = R$$

$$\bullet \lambda_3 = R\sqrt{3}$$

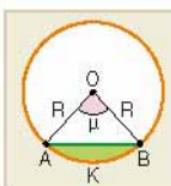
$$\bullet \lambda_4 = R\sqrt{2}$$

$$\bullet a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet a_3 = \frac{R}{2}$$

$$\bullet a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Μέτρηση κύκλου



• $L = 2\pi R$: Μήκος κύκλου

• Μήκος τόξου

$$\mu^\circ: l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ}, \quad \text{α rad: } l_{\widehat{AB}} = \alpha R$$

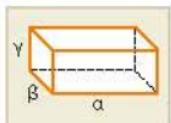
• $E = \pi R^2$: Εμβαδό κυκλικού δίσκου

• Εμβαδό κυκλικού τομέα $O\widehat{AB}$

$$\text{τόξο } \mu^\circ: (O\widehat{AB}) = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ}, \quad \text{τόξο α rad: } (O\widehat{AB}) = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

Εμβαδά και όγκοι στερεών

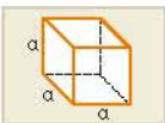
1. Ορθ. Παραλίπεδο



$$E = 2(a\beta + \beta\gamma + a\gamma)$$

$$V = a\beta\gamma$$

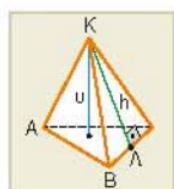
2. Κύβος



$$E = 6a^2$$

$$V = a^3$$

3. Κανονική πυραμίδα

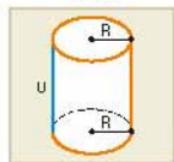


$E_{\pi} = \frac{\Pi \cdot h}{2}$ εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας (όπου Π η περίμετρος, h παράπλευρο ύψος και u το ύψος της πυραμίδας)

$$E_{\text{ολ}} = E_{\beta} + E_{\pi}, \text{ ολικό εμβαδό}$$

$$V = \frac{1}{3} E_{\beta} \cdot u$$

4. Κύλινδρος

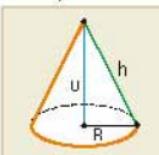


$E_{\pi} = 2\pi R \cdot u$ εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας

$$E_{\text{ολ}} = 2\pi R^2 + 2\pi R u$$

$$V = \pi R^2 u$$

5. Κώνος

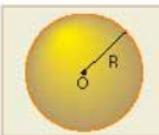


$$E_{\pi} = \pi R h$$

$$E_{\text{ολ}} = \pi R (h+R)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 u$$

6. Σφαίρα



$$E = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Διανύσματα

ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΗΠΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}, \lambda \in \mathbb{R}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \text{ όπου } \vec{a} = (x_1, \psi_1), \vec{b} = (x_2, \psi_2) \text{ και}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \text{ όπου } M \text{ το μέσο του } AB$$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

$$\text{Αν } A(x_1, \psi_1), B(x_2, \psi_2) \text{ τότε: } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, \psi_2 - \psi_1)$$

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

$|\vec{a}| = \sqrt{\chi^2 + \psi^2}$, όπου $\vec{a} = (\chi, \psi)$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Αν $\vec{a} = (\chi, \psi)$ με $\chi \neq 0$ τότε $\lambda = \frac{\psi}{\chi} = \varepsilon\varphi\varphi$, όπου φημίνεται η γωνία που σχηματίζεται από τον χ' χ και τον \vec{a} .

- Αν $\vec{a} \parallel \psi'\psi$, ο λ δεν ορίζεται
- Αν $\vec{a} \parallel \chi'\chi$, τότε $\lambda = 0$
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{b}}$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

- Αν $\vec{a} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{b} = (\chi_2, \psi_2)$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = \chi_1 \chi_2 + \psi_1 \psi_2$

$$\text{και } \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\chi_1 \chi_2 + \psi_1 \psi_2}{\sqrt{\chi_1^2 + \psi_1^2} \cdot \sqrt{\chi_2^2 + \psi_2^2}}$$

- Ισχύουν $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \text{προβ}\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{b}} = -1$$

$$\vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|, \quad \vec{a} \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$



Ευθεία

✓ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

- $\lambda = \varepsilon\varphi\varphi$, όπου φημίνεται η γωνία που σχηματίζεται από τον χ' χ και την ευθεία
- $\lambda = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\chi_2 - \chi_1}$, όπου $A(\chi_1, \psi_1), B(\chi_2, \psi_2)$ δύο σημεία της ευθείας ($\chi_1 \neq \chi_2$)
- Αν $\varepsilon \parallel \chi'\chi$, τότε $\lambda = 0$
- Αν $\varepsilon \parallel \psi'\psi$, τότε ο λ δεν ορίζεται
- $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

✓ ΤΥΠΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. $\psi - \psi_0 = \lambda(\chi - \chi_0)$: όπου $A(\chi_0, \psi_0)$ σημείο της ευθείας
2. $\psi - \psi_1 = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\chi_2 - \chi_1} (\chi - \chi_1)$: όπου $A(\chi_1, \psi_1), B(\chi_2, \psi_2)$ δύο σημεία της ευθείας
3. $\psi = \lambda\chi + \beta$: ευθεία που τέμνει τον ψ' ψ στο $(0, \beta)$
4. $\psi = \lambda\chi$: ευθεία που διέρχεται από το $O(0, 0)$
5. $\chi = \chi_0$: ευθεία παράλληλη στον ψ' ψ και διέρχεται από το $A(\chi_0, 0)$
6. $\psi = \psi_0$: ευθεία παράλληλη στον χ' χ και διέρχεται από το $B(0, \psi_0)$
7. $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $|A| + |B| \neq 0$
Γενική μορφή εξισώσης ευθείας

✓ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_1 + B\psi_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

όπου $M(x_1, \psi_1)$ και $\varepsilon: Ax + B\psi + \Gamma = 0$

✓ ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

$$E_{ABG} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AG}) \right|$$

Κύκλος

► ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

1. $(x-x_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2 = \rho^2$: κύκλος με κέντρο $K(x_0, \psi_0)$ και ακτίνα ρ

2. $x^2 + \psi^2 = \rho^2$: κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ

3. $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$: εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

► ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ $x^2 + \psi^2 = \rho^2$:

$xx_1 + \psi\psi_1 = \rho^2$, όπου $A(x_1, \psi_1)$ το σημείο επαφής

Παραβολή

► ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

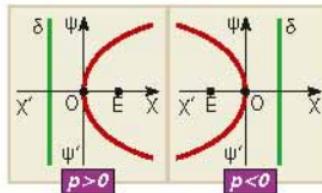
1. $\psi^2 = 2px$

Εστία: $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Διευθετούσα: $\delta: \chi = -\frac{p}{2}$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$\psi\psi_1 = p(x+x_1)$$



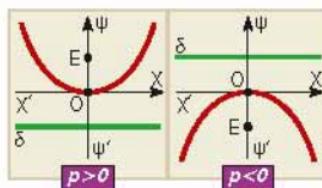
2. $x^2 = 2py$

Εστία: $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$

Διευθετούσα: $\delta: \psi = -\frac{p}{2}$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$xx_1 = p(\psi + \psi_1)$$



Έλλειψη

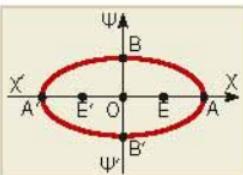
► ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, με $\beta^2 = a^2 - \gamma^2$

Εσπίες: $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$

Κορυφές: $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$,
 $B'(0, -\beta)$, $B(0, \beta)$

Εξίσωση εφαπτομένης: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{\psi\psi_1}{\beta^2} = 1$



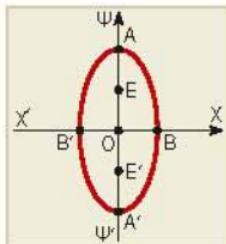
2. $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{\psi^2}{a^2} = 1$, με $\beta^2 = a^2 - \gamma^2$

Εσπίες: $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$

Κορυφές: $A'(0, -a)$, $A(0, a)$,
 $B'(-\beta, 0)$, $B(\beta, 0)$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$\frac{\psi\psi_1}{a^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$



Υπερβολή

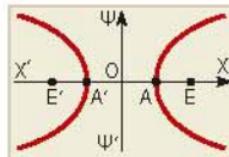
► ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, με $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$

Εσπίες: $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$

Κορυφές: $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$

Εξίσωση εφαπτομένης: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{\psi\psi_1}{\beta^2} = 1$



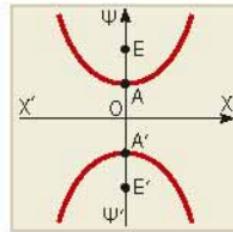
2. $\frac{\psi^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, με $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$

Εσπίες: $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$

Κορυφές: $A'(0, -a)$, $A(0, a)$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$\frac{\psi\psi_1}{a^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$



Παράγωγοι βασικών - σύνθετων συναρτήσεων

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων	Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων
$(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$	
$(x)' = 1$	
$(e^x)' = e^x$	$(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$	$((g(x))^p)' = p \cdot (g(x))^{p-1} \cdot g'(x)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln(g(x)))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{g(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$
$(\eta mx)' = \text{συν}x$	$(\eta m(g(x)))' = \text{συν}(g(x)) \cdot g'(x)$
$(\text{συν}x)' = -\eta mx$	$(\text{συν}(g(x)))' = -\eta m(g(x)) \cdot g'(x)$
$(\varepsilon \varphi x)' = \frac{1}{\sigma \nu v^2 x}$	$(\varepsilon \varphi(g(x)))' = \frac{1}{\sigma \nu v^2(g(x))} \cdot g'(x)$
$(\sigma \varphi x)' = \frac{-1}{\eta \mu^2 x}$	$(\sigma \varphi(g(x)))' = -\frac{1}{\eta \mu^2(g(x))} \cdot g'(x)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a(g(x)))' = \frac{1}{g(x) \cdot \ln a} \cdot g'(x)$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^{g(x)})' = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x)$

Κανόνες παραγώγισης

$(f \pm g)' = f' \pm g'$ $(c \cdot f)' = c \cdot f' \quad (c \in \mathbb{R})$ $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$
 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$ $((f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Εξίσωση εφαπτομένης

Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση c_f συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda = f'(x_0)$ και εξίσωση:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ y &= \lambda x + \beta \end{aligned}$$

Αόριστα ολοκληρώματα βασικών - σύνθετων συναρτήσεων

Βασικών συναρτήσεων ($c, c_1 \in \mathbb{R}, (v \neq -1)$)

$$\int c \cdot dx = cx + c_1 \quad \int e^x \cdot dx = e^x + c \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c \quad \int x^v dx = \frac{x^{v+1}}{v+1} + c \quad \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \eta mx \cdot dx = -\sigma \nu v x + c \quad \int \sigma \nu v x \cdot dx = \eta mx + c$$

$$\int \frac{1}{\sigma \nu v^2 x} \cdot dx = \varepsilon \varphi x + c \quad \int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \cdot dx = -\sigma \varphi x + c$$

Σύνθετων συναρτήσεων ($c, c_1 \in \mathbb{R}, (v \neq -1)$)

$$\int g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + c \quad \int g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c$$

$$\int g'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{g(x)}} dx = 2\sqrt{g(x)} + c \quad \int g'(x) \cdot [g(x)]^v dx = \frac{[g(x)]^{v+1}}{v+1} + c$$

$$\int g'(x) \cdot \frac{dg(x)}{\ln a} dx = \frac{ag(x)}{\ln a} + c \quad \int g'(x) \cdot \eta\mu[g(x)] dx = -\sigma\eta\mu[g(x)] + c$$

$$\int g'(x) \cdot \sigma\eta\mu[g(x)] dx = \eta\mu[g(x)] + c$$

$$\int g'(x) \cdot \frac{1}{\sigma\eta\mu^2[g(x)]} dx = \varepsilon\varphi[g(x)] + c$$

$$\int g'(x) \cdot \frac{1}{\eta\mu^2[g(x)]} dx = -\sigma\varphi[g(x)] + c$$

Ιδιότητες αόριστων ολοκληρωμάτων

- $\int f'(x) dx = f(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
- $\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int f(x) dx \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης αόριστων ολοκληρωμάτων

- $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx \quad (\text{κατά παράγοντες})$
- $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du \quad (\text{με αντικατάσταση}) \quad \text{όπου } u = g(x) \text{ και } du = g'(x) dx$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

- a) Αν f συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα $[a, b]$ και F μια παράγουσα (αρχική) της f , τότε:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

• Av $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

b) Av f συνεχής σε διάστημα Δ και

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$$

$$\int_a^\infty f(x) dx = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης ορισμένων ολοκληρωμάτων

- $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx \quad (\text{κατά παράγοντες}) \quad \text{όπου } f', g' \text{ συναρτήσεις συνεχείς στο } [a, b].$
- $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du \quad (\text{με αντικατάσταση}) \quad \text{όπου } f, g' \text{ συναρτήσεις συνεχείς στο } [a, b], u = g(x), du = g'(x) dx \text{ και } u_1 = g(a), u_2 = g(b).$

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

- To εμβαδόντου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ είναι

$$E = \int_a^{\beta} f(x) dx, \text{ av } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]$$

$$E = - \int_a^{\beta} f(x) dx, \text{ av } f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]$$

Το εμβαδόντου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ είναι

$$E = \int_a^{\beta} |f(x) - g(x)| dx, \text{ av } f(x) \geq g(x) \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]$$

$$E = \int_a^{\beta} |g(x) - f(x)| dx, \text{ av } f(x) \leq g(x) \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]$$

Στατιστική

a. Σχετική συχνότητα

b. Μέση τιμή

$$f_i = \frac{v_i}{v}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v v_i x_i = \sum_{i=1}^v f_i x_i$$

c. Σταθμικός μέσος

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}$$

d. Διάμεσος

$$\left\{ \begin{array}{ll} v & \text{περιπτώς} \quad \delta = \frac{tv+1}{2} \\ & \\ v & \text{άρπιος} \quad \delta = \frac{\frac{tv}{2} + \frac{tv}{2} + 1}{2} \end{array} \right.$$

e. Εύρος R = μεγαλύτερη παραπήρηση – μικρότερη παραπήρηση.

στ. Διακύμανση

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v v_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

$$\zeta. \text{ Τυπική απόκλιση } s = \sqrt{s^2}$$

$$\eta. \text{ Av } y = x + c \text{ (c} \in \mathbb{R}), \text{ τότε } \bar{y} = \bar{x} + c, s_y^2 = s_x^2, s_y = s_x$$

$$\text{Av } y = c \cdot x \text{ (c} \in \mathbb{R}), \text{ τότε } \bar{y} = c \bar{x}, s_y^2 = c^2 \cdot s_x^2, s_y = |c| \cdot s_x$$

Πιθανότητες

$$\text{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \text{ P}(\emptyset) = 0, \text{ P}(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\text{P}(A') = 1 - P(A) \quad \text{Av } A \subseteq B \text{ τότε } P(A) \leq P(B)$$

$$\text{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{A, B αντίθετα} \Leftrightarrow A' = B \text{ ή } B' = A$$

$$\text{P}(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ av } A, B \text{ ασυμβίβαστα } (A \cap B = \emptyset)$$

$$\text{P}(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\text{P}(B - A) = P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B)$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

KINHTIKH

$$\bar{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

Ορισμός σπιγμαίας ταχύτητας ενός κινητού.
Μπορούμε να πούμε απλούστερα ότι η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος.

$$v_{\mu} = \frac{s_{\alpha\lambda}}{t_{\alpha\lambda}}$$

Η μέση ταχύτητα ενός κινητού είναι το πρόσημο του ολικού διαστήματος που διανύει το κινητό προς τον ολικό χρόνο που χρειάστηκε για να το διανύσει. Για μια κίνηση η μέση ταχύτητα έχει σταθερή τιμή.

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

Ορισμός σπιγμαίας επιτάχυνσης κινητού.
Μπορούμε να πούμε απλούστερα ότι η επιτάχυνση είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας.

$$a_K = \frac{v^2}{R}$$

Κεντρομόλος επιτάχυνση κινητού. Για να έχουμε κεντρομόλο επιτάχυνση πρέπει η κίνηση να είναι καμπυλόγραμμη. Όπου R είναι ακτίνα καμπυλότητας της καμπυλόγραμμης τροχιάς.

$$S = v \cdot t$$

$$\text{ή } x = v \cdot t$$

Σχέση που συνδέει διάστημα και ταχύτητα στην ομαλή κίνηση.

$$v = v_0 \pm at$$

$$x = v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2$$

Σχέσεις που δίνουν την ταχύτητα και το διάστημα στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. **Το (+) ισχύει στην επιταχυνόμενη κίνηση και το (-) στην επιβραδυνόμενη.** (v_0 είναι η αρχική ταχύτητα του σώματος).

ΦΥΣΙΚΗ



$$u = at$$

$$x = \frac{1}{2} at^2$$

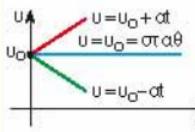
Όταν το κινητό δεν έχει αρχική ταχύτητα η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, η ταχύτητα και το διάστημα δίνονται από τους διπλανούς τύπους.

$$t_{\text{ok}} = \frac{u_0}{a}$$

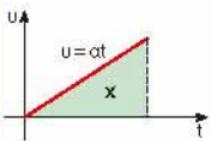
$$S_{\text{ok}} = \frac{u_0^2}{2a}$$

Οι δύο αυτές σχέσεις μας δίνουν τον **ολικό χρόνο** και το **ολικό διάστημα** κίνησης ενός σώματος που εκτελεί κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη μέχρι να σταματήσει ($u=0$).

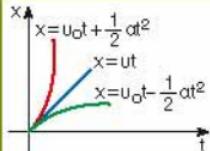
Προσοχή: Οι σχέσεις αυτές δεν ισχύουν για τυχαία σημεία της κίνησης όπου $u \neq 0$.



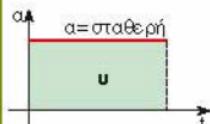
Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($u-t$) για όλα τα είδη κινήσεων.



Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα ($u_0=0$). Σε οποιοδήποτε διάγραμμα $u-t$ το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ γραφικής παράστασης και άξονα των χρόνων παριστάνει τη μετατοπιση.



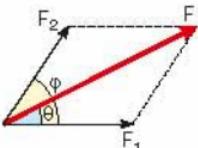
Διαγράμματα διαστήματος - χρόνου ($x-t$) για όλα τα είδη κινήσεων.



Διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου ($a-t$) στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Σε οποιοδήποτε διάγραμμα $a-t$ το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ γραφικής παράστασης και άξονα των χρόνων παριστάνει ταχύτητα.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ



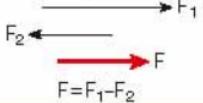
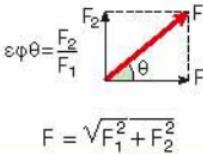
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \phi}$$

$$\cos \phi = \frac{F_2 \cos \theta}{F_1 + F_2 \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow F_1 \\ &\rightarrow F_2 \\ &\rightarrow F = F_1 + F_2 \end{aligned}$$

Συνισταμένη δύο δυνάμεων οι οποίες σχηματίζουν γωνία ϕ . Οι παρακάτω σχέσεις δίνουν το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης των δύο δυνάμεων.

Συνισταμένη δύο δυνάμεων οι οποίες έχουν ίδια διεύθυνση και φορά.

	Συνισταμένη δύο δυνάμεων οι οποίες έχουν (δια) διεύθυνση και αντίθετη φορά.
	Συνισταμένη δύο δυνάμεων οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$
$\Sigma F = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$	Συνθήκες ισορροπίας ενός σώματος. Όταν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν το σώμα δεν κινείται μεταφορικά (εκτός αν έχουμε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση).
$\vec{F} = m\vec{a}$	Θεμελιώδης εξίσωση της μηχανικής η οποία προκύπτει από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.
$\vec{B} = m\vec{g}$	Βάρος ενός σώματος.
$v = gt$ $h = \frac{1}{2}gt^2$	Σχέσεις που δίνουν την ταχύπτητα και το διάστημα κίνησης στην ελεύθερη πτώση (νόμοι της ελεύθερης πτώσης). Όπου g είναι η ένταση της βαρύτητας ($g=10 \text{ m/s}^2$).
$T = \mu N$	Νόμος της τριβής

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	
$F_K = ma_K = \frac{mv^2}{R}$	Κεντρομόλος δύναμη.
$\vec{\omega} = \frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta t}$	Ορισμός γωνιακής ταχύπτητας στην κυκλική κίνηση. Μπορούμε να πούμε απλούστερα ότι η γωνιακή ταχύτητα του κινητού στην κυκλική κίνηση είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που διαγράφει μια επιβατική ακτίνα καθώς κινείται το σώμα.
$\omega = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f = \omega R$ $f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow T \cdot f = 1$ $a_K = \frac{v^2}{R} = 4 \frac{\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2 f^2 R = \omega^2 R$	Σχέσεις που ισχύουν στην ομαλή κυκλική κίνηση. Όπου T είναι η περίοδος και f η συχνότητα της κίνησης.
ΟΡΜΗ - ΚΡΟΥΣΗ	
$\vec{p} = m\vec{v}$	Ορμή σώματος μάζας (m) το οποίο κινείται με ταχύπτητα (v).
$E_K = \frac{p^2}{2m}$	Σχέση που συνδέει το μέτρο της κινητικής ενέργειας ενός σώματος με το μέτρο της ορμής του.

$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$	Γενικότερη διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα
$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}}$	Αρχή διαπήρησης της οριμής:
ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ - ΙΣΧΥΣ	
<p>Σχέση που μας δίνει το έργο σταθερής δύναμης η οποία σχηματίζει γωνία φ με τη διεύθυνση της κίνησης. Όπου x είναι η μεταπόσιη του σώματος.</p>	



<p>Όταν η δύναμη (F) μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μεταπόσιη (x), τότε το έργο της δύναμης υπολογίζεται από το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ γραφικής παράστασης και άξονα των μεταποπίσεων.</p>	
$K = \frac{1}{2} m v^2$	Κινητική ενέργεια ενός σώματος που έχει ταχύτητα v.
$U = mgh$	Δυναμική ενέργεια ενός σώματος που βρέθηκε σε ύψος h από ένα επίπεδο αναφοράς.
$E = K + U$	Μηχανική ενέργεια σώματος
$U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k x^2$	Δυναμική ενέργεια ενός ελατηρίου που έχει επιμήκυνση ή συσπείρωση x (από το φυσικό του μήκος).
$\Sigma W = \Delta K$	Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.
$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$	Ισχύς ονομάζεται ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας.
$P = F \cdot v$	Ισχύς ενός σώματος (οχήματος) στο οποίο εφαρμόζεται μια δύναμη F και κινείται με σταθερή ταχύτητα v. Ανη ταχύτητα δεν είναι σταθερή, η σχέση αυτή μας δίνει τη στιγμιαία τιμή της ισχύος.

Ηλεκτρικό πεδίο

$$F_c = K_{\eta\lambda} \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Νόμος του Coulomb

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Ορισμός έντασης ηλεκτρικού πεδίου
($q \rightarrow$ υπόθεμα)

$$E = K \frac{Q}{r^2}$$

Ένταση σημειακού ηλεκτρικού φορτίου σε απόσταση R ($Q \rightarrow$ πηγή του πεδίου)

$$V_A = \frac{W_{A \rightarrow \infty}}{q}$$

Ορισμός δυναμικού σε ένα σημείο ηλεκτρικού πεδίου ($q \rightarrow$ υπόθεμα)

$$U = qV_A$$

Δυναμική ενέργεια ενός φορτίου q στο σημείο A

$$U = K \frac{Q \cdot q}{r}$$

$$V_A - V_B = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q}$$

Ορισμός διαφοράς δυναμικού

$$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$$

Έργο κατά τη μετακίνηση ενός φορτίου από το A στο B

$$V = K \frac{Q}{r}$$

Δυναμικό σημειακού ηλεκτρικού φορτίου σε απόσταση R

$$C = \frac{Q}{V}$$

Χωρητικότητα πυκνωτή

$$C = \epsilon \cdot \epsilon_0 \frac{s}{l}$$

Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή

$$E = \frac{V}{l}$$

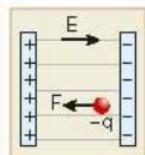
Σχέση που συνδέει ένταση με δυναμικό

$$U = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Ενέργεια πυκνωτή

$$U = K_c \frac{q_1 q_2}{r}$$

Η Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια δύο φορτίων που βρίσκονται σε απόσταση r



Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου παράλληλα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου

$$\left. \begin{array}{l} F = Eq \\ F = ma \end{array} \right\} \Rightarrow Eq = ma \Rightarrow a = \frac{Eq}{m}$$

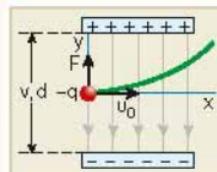
Επιπάχυνση του φορτίου

$$\left. \begin{array}{l} u = at \\ x = \frac{1}{2} at^2 \end{array} \right\}$$

⇒ εξισώσεις κίνησης χωρίς αρχική ταχύτητα

$$\left. \begin{array}{l} u = u_0 \pm at \\ x = u_0 t \pm \frac{1}{2} at^2 \end{array} \right\}$$

Εξισώσεις κίνησης με αρχική ταχύτητα παράλληλη στις δυναμικές γραμμές (+) επιπλανόμενη κίνηση (-) επιβραδυνόμενη κίνηση



Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου με αρχική ταχύτητα, κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου

$$\left. \begin{array}{l} F = Eq \\ F = ma \end{array} \right\} \Rightarrow Eq = ma \Rightarrow a = \frac{Eq}{m}$$

Επιπάχυνση του φορτίου

Άξονας x: $U_x = U_0$, $x = U_0 t$

Άξονας y: $U_y = at$, $y = \frac{1}{2} at^2$, $y = \frac{qV}{2dm\mu_0^2} x^2$ Εξίσωση τροχιάς

Συνεχές ρεύμα

$$I = \frac{Q}{t}$$

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος

$$\sum(I_{\text{εισ}}) = \sum(I_{\text{εξ}})$$

ή
Ιος κανόνας του Kirchhoff

$$\Sigma I = 0$$

Αντίσταση αγωγού

$$R = \frac{V}{I}$$

Νόμος του Ohm

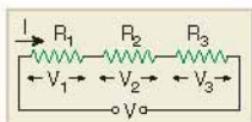
$$R = \rho \frac{l}{s}$$

Αντίσταση αγωγού σταθερής διατομής

$R = R_0 (1 + \alpha \theta)$ Εξάρτηση της αντίστασης μεταλλικού αγωγού από τη θερμοκρασία
και

$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \theta)$ Εξάρτηση της ειδικής αντίστασης από τη θερμοκρασία

Συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά:

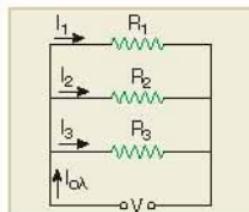


$$R_{\text{αλ}} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$I_{\text{αλ}} = I_1 = I_2 = I_3 = I$$

$$V_{\text{αλ}} = V_1 + V_2 + V_3$$

Συνδεσμολογία αντιστάσεων παράλληλα:



$$\frac{1}{R_{\text{αλ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$V_{\text{αλ}} = V_1 = V_2 = V_3 = V$$

$$I_{\text{αλ}} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$W = IVt = I^2 Rt = \frac{V^2}{R} t$$

Ενέργεια ηλεκτρικού ρεύματος

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Ισχύς ηλεκτρικού ρεύματος

$$E = \frac{P}{I} = \frac{W}{q}$$

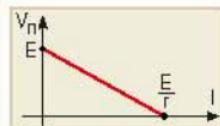
ΗΕΔ πηγής

$$V_{\pi} = E - Ir$$

Πολικήταση πηγής

$$I = \frac{E}{R_{\text{αλ}}}$$

Νόμος του Ohm σε κλειστό κύκλωμα



Χαρακτηριστική καμπύλη πηγής

$$\alpha\% = \frac{P_{\text{ωφ}}}{P_{\delta\text{απ}}} \cdot 100\%$$

Απόδοση αποδέκτη

Ηλεκτρομαγνητισμός

$$F_L = B I l \eta \mu f$$

Δύναμη Laplace σε ρευματοφόρο αγωγό

$$B = K_\mu \frac{2I}{r}$$

Ένταση μαγνητικού πεδίου ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού

$$B = K_\mu \frac{2\pi I}{r}$$

Ένταση μαγνητικού πεδίου στο κέντρο κυκλικού αγωγού.

$$B = 4\pi K_\mu \frac{N}{l}$$

Ένταση μαγνητικού πεδίου στο κέντρο σωληνοειδούς

$$B' = 2\pi K_\mu \frac{N}{l}$$

Ένταση μαγνητικού πεδίου στα άκρα σωληνοειδούς

$$B = \frac{F_L}{Il}$$

Ορισμός έντασης ομογενούς μαγνητικού πεδίου

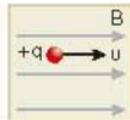
$$F = \frac{K_\mu 2I_1 I_2 l}{r}$$

Δύναμη μεταξύ παράλληλων αγωγών



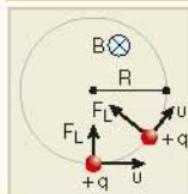
Κίνηση φορτίου σε μαγνητικό πεδίο

$F = B q u$ Δύναμη Lorentz που ασκείται με το μαγνητικό πεδίο σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο



Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου με ταχύτητα u παράλληλη στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου

$F_L = B q u \eta m^2 \Rightarrow F_L = 0$ Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή



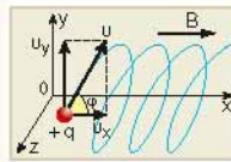
Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου με ταχύτητα u κάθετη στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Η κίνηση είναι ομαλή κυκλική

$$F_L = B q u \quad \text{Δύναμη Lorentz}$$

$$R = \frac{\mu u}{B q} \quad \text{Aktína κυκλικής τροχιάς}$$

$$T = \frac{2\pi m}{B q} \quad \text{Περίοδος κυκλικής κίνησης}$$



Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου με ταχύτητα u που σχηματίζει τυχαία γωνία με τις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Η κίνηση είναι ελικοειδής

$$\left. \begin{array}{l} \beta = u_x \cdot T \\ u_x = u \sin \varphi \\ T = \frac{2\pi m}{BqI} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = u \sin \varphi \frac{2\pi m}{BqI}$$

Βήμα της έλικας

Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή

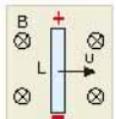
$$E_{\text{επ}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \cdot N$$

Νόμος της επαγωγής (Faraday)

$$\Delta Q = \frac{|\Delta \Phi|}{R} N$$

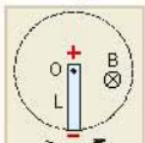
Επαγωγικό φορτίο

$$E_{\text{επ}} = BuL$$

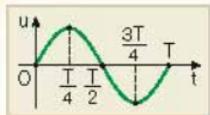


Επαγωγική τάση σε ευθύγραμμο αγωγό μήκους L που κινείται με ταχύτητα v κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου

$$E_{\text{επ}} = \frac{Bvw^2}{2}$$



Επαγωγική τάση σε ευθύγραμμο αγωγό μήκους L που περιστρέφεται από το ένα άκρο του με γωνιακή ταχύτητα ω κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου

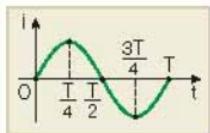


Εναλλασσόμενη τάση

$u = V_0 \sin \omega t$

$u \rightarrow$ σπιγμαία τάση

$V \rightarrow$ μέγιστη τάση (πλάτος)



Εναλλασσόμενο ρεύμα

$i = I_0 \sin \omega t$

$i \rightarrow$ σπιγμαία ένταση

$I \rightarrow$ μέγιστη ένταση

$$I = \frac{V}{R}$$

Νόμος του Ohm για τις μέγιστες τιμές

$$I_{\text{εν}} = \frac{V}{\sqrt{2}}, \quad V_{\text{εν}} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

Ενεργός ένταση και ενεργός τάση

$$I_{\text{εν}} = \frac{V_{\text{εν}}}{R}$$

Νόμος του Ohm με ενεργές τιμές

$$Q = I_{\text{εν}}^2 R t$$

Νόμος του Joule

$$P = \frac{W}{T} = V_{\text{εν}} I_{\text{εν}} = I_{\text{εν}}^2 R$$

Μέση ισχύς

$$P = ui = IV_0 \sin \omega t$$

Σπιγμαία ισχύς

$$E_{\text{επ}} = -M \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Τάση από αμοιβαία επαγωγή

$$E_{\text{αυτ}} = -L \frac{di}{dt}$$

Τάση από αυτεπαγωγή

$$M = N_2 \mu m_0 \cdot A$$

$$n_1 = \frac{N_1}{l}$$

$$L = \mu \mu_0 \frac{N^2}{l} A$$

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής

Συντελεστής αυτεπαγωγής

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

Ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου

Κινητική Θεωρία των Αερίων

$$P \cdot V = \text{σταθ. όταν } T = \text{σταθ. } \quad \text{Νόμος του Boyle}$$

$$P = \text{σταθ. } \cdot T \quad \text{όταν } V = \text{σταθ. } \quad \text{Νόμος του Charles}$$

$$V = \text{σταθ. } \cdot T \quad \text{όταν } P = \text{σταθ. } \quad \text{Νόμος του Gay-Lussac}$$

$$PV = nRT \quad \text{Νόμος των ιδανικών αερίων (καταστατική εξίσωση)}$$

$$\bar{K} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \quad \text{Κινητική ενέργεια ενός μορίου}$$

$$P = \frac{Nm\bar{v}^2}{3V} \quad \text{Πίεση του αερίου}$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{Τετραγωγική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων του αερίου.}$$

Θερμοδυναμική

$$Q = \Delta U + W \quad \text{Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος}$$

$$U = \frac{3}{2} NKT = \frac{3}{2} nRT$$

Εσωτερική ενέργεια μίας ποσότητας ιδανικού μονοατομικού αερίου.

A. ΙΣΟΘΕΡΜΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

$$\text{Μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας} \quad \Delta U = 0$$

Μηχανικό έργο

$$W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

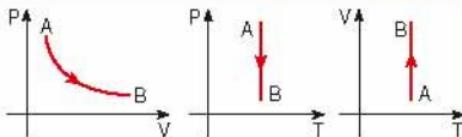
Θερμότητα

$$Q = W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\begin{aligned} \text{Πρώτος θερμοδυναμικός} \\ \text{νόμος} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} Q &= W + \Delta U \\ \Delta U &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q = W$$

Διαγράμματα
ισόθερμης
εκτόνωσης



B. ΙΣΟΧΩΡΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

$$\text{Καπαστατική εξίσωση στη διάρκεια της μεταβολής} \quad V \Delta P = nR \Delta T$$

$$\text{Μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας} \quad \Delta U = nC_v \Delta T$$

Μηχανικό έργο

$$W = 0$$

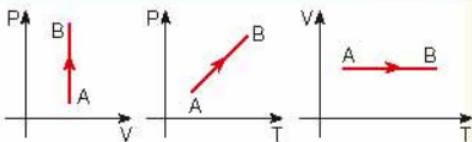
Θερμότητα

$$Q = \Delta U = nC_v\Delta T$$

Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

$$\left. \begin{array}{l} Q = W + \Delta U \\ W = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Q = \Delta U$$

Διαγράμματα
ισόχωρης
θέρμανσης



Γ. ΙΣΟΒΑΡΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Καταστατική εξίσωση στη διάρκεια της μεταβολής

$$P\Delta V = nR\cdot\Delta T$$

Μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας

$$\Delta U = nC_v\Delta T$$

Μηχανικό έργο

$$W = P\Delta V = nR\Delta T$$

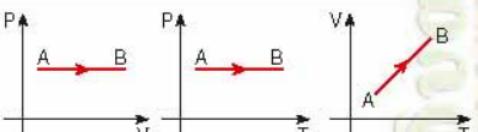
Θερμότητα

$$Q = nC_p\Delta T$$

Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

$$Q = W + \Delta U$$

Διαγράμματα
ισοβαρούς
εκτόνωσης



Δ. ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

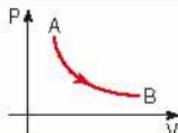
Νόμος της αδιαβατικής

$$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma \text{ όπου } \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

$$\left. \begin{array}{l} Q = W + \Delta U \\ Q = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow W = -\Delta U$$

Διάγραμμα
αδιαβατικής
εκτόνωσης



$$Q = W$$

Κυκλική μεταβολή

$$C_p = C_v + R$$

Σχέση που συνδέει C_p και C_v

$$e = \frac{W}{Q_h}$$

Απόδοση θερμικής μηχανής

$$e = \frac{Q}{Q_h} = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h}$$

$Q_h \rightarrow$ δαπανώμενη θερμότητα (θερμάνσεις - εκτονώσεις)

$$e_{Carnot} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

Απόδοση κύκλου Carnot

$T_c \rightarrow$ θερμοκρασία ψυχρής δεξιαμενής

$T_h \rightarrow$ θερμοκρασία θερμής δεξιαμενής

$$C_v = \frac{3}{2}R$$

Γραμμομοριακές ειδικές θερμότητες με σταθερό όγκο και σταθερή πίεση, ενός μονοατομικού αερίου

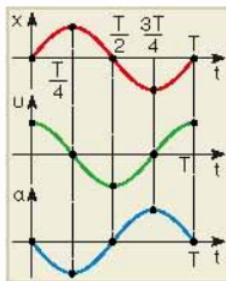
$$C_p = \frac{5}{2}R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Λόγος των γραμμομοριακών ειδικών θερμοπήτων

Ταλαντώσεις

Εξισώσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης



$x = A \sin \omega t$

Εξίσωση απομάκρυνσης

$u = A \omega \cos \omega t$

Εξίσωση ταχύτητας

$a = -A \omega^2 \sin \omega t$

Εξίσωση επιπάχυνσης

$$F = -Dx$$

Απαραίτητη συνθήκη για να εκτελεί
ένα σώμα απλή αρμονική ταλάντωση

$$D = m\omega^2$$

Σταθερά επαναφοράς της
ταλάντωσης

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Περίοδος της ταλάντωσης

$$E = \frac{1}{2}mu_{\max}^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

Ολική ενέργεια ενός ταλαντωτή

$$E_{\text{ολ}} = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mu_{\max}^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

Ολική ενέργεια
του ταλαντωτή

$$U = \frac{1}{2}Dx^2$$

Δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή

$$K = \frac{1}{2}mu^2$$

Κινητική ενέργεια του ταλαντωτή

$$U = E_0 \omega t$$

Δυναμική και κινητική ενέργεια του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

Περίοδος ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Ιδιοσυχνότητα συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

$$x = 2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \eta \mu$$

$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$ Εξίσωση διακροτήματος

$$f_d = |f_1 - f_2|$$

Συχνότητα διακροτήματος

Κύματα

$$u = \lambda f$$

Θεμελιώδης εξίσωση των κυμάτων

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Εξίσωση αρμονικού κύματος

$$d = k\lambda$$

Απόσταση μεταξύ δυο σημείων ενός κύματος που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης

$$d = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

Απόσταση μεταξύ δυο σημείων ενός κύματος που βρίσκονται σε αντίθεση φάσης

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \quad \text{ημ} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right)$$

Εξίσωση απομάκρυνσης ενός σημείου στο οποίο φθάνουν δυο σύγχρονα αρμονικά κύματα διαφορετικής διεύθυνσης

$$A' = 2A \sin 2\pi \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \quad \begin{aligned} &\text{Πλάτος του συνιστάμενου κύματος που} \\ &\text{προκύπτει από τη συμβολή δυο σύγ-} \\ &\text{χρονών κυμάτων διαφορετικής διεύ-} \\ &\text{θυνσης σ' ένα σημείο} \end{aligned}$$

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad \text{ημ} 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{Εξίσωση του στάσιμου κύματος}$$

$$A' = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad \text{Πλάτος του στάσιμου κύματος}$$

$$\hat{\theta}_a = \hat{\theta}_b \quad \text{Νόμος ανάκλασης}$$

$$n = \frac{c}{u} \quad \text{Δείκτης διάθλασης}$$

$$\frac{\eta m \theta_a}{\eta m \theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{Νόμος του Snell}$$

$$\eta m \theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{Κρίσιμη γωνία}$$

Μηχανική στερεού σώματος

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{Γωνιακή ταχύτητα}$$

$$a_{gyro} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{Γωνιακή επιπάχυνση}$$

$$a_{cm} = \omega \cdot R \quad \text{Σχέση που συνδέει γραμμική με γωνιακή ταχύτητα}$$

$$a_{cm} = a \cdot R \quad \text{Σχέση που συνδέει γραμμική με γωνιακή επιπάχυνση}$$

$$\tau = F \cdot \ell \quad \text{Ροπή δύναμης}$$

$$\tau = F \cdot d \quad \text{Ροπή ζεύγους (d η απόσταση των δυνάμεων)}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος} \\ &\Sigma \tau = 0 \end{aligned}$$

$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \dots \quad \text{Ροπή αδράνειας}$$

$$I_p = I_{cm} + m \cdot d^2 \quad \text{Θεώρημα παράλληλων αξόνων}$$

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{gyro} \quad \text{Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης}$$

$$L = m \cdot u \cdot r \quad \text{Στροφορμή υλικού σημείου}$$

$$L = I \cdot \omega \quad \text{Στροφορμή στερεού σώματος}$$

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \quad \text{Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης}$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_{apx} &= \dot{L}_{tel} \\ \Rightarrow I_1 \omega_1 &= I_2 \omega_2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Διατήρηση της στροφορμής} \\ &\text{⇒ Διατήρηση της στροφορμής} \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{Κινητική ενέργεια ενός στερεού λόγω περιστροφής}$$

$$K = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{Κινητική ενέργεια ενός στερεού λόγω μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης}$$

$$W = \tau \cdot \theta$$

Έργο κατά τη στροφική κίνηση

$$P = \tau \cdot \omega$$

Ισχύς ροπής

$$\Sigma W = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

Θεώρημα έργου ενέργειας

Κρούσεις και σχετικές κινήσεις

$$\tilde{\rho}_{\text{αρχ}} = \tilde{\rho}_{\text{τελ}}$$

Αρχή διαπόρησης της ορμής

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

Ταχύπτες μετά την κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών που κινούνται με ομόροπες ταχύτητες u_1 και u_2

$$u'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

Αν $m_1 = m_2$ τότε

$$u'_1 = u_2 \text{ και } u'_2 = u_1$$

Αν $u_2 = 0$ τότε

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1$$

$$u'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

Αν $m_1 << m_2$ και $u_2 = 0$ τότε $u'_1 = -u_1$ και $u'_2 = 0$

Αν οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες ανταλλάσσουν ταχύπτες

Ταχύπτες μετά την κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών όταν το δεύτερο σώμα είναι ακίνητο πριν την κρούση

Αν η δεύτερη σφαίρα έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από την πρώτη, η δεύτερη παραμένει ακίνητη και η πρώτη ανακλάται με την ίδια ταχύπτητα

$$f_A = \frac{U \pm U_A}{U} f_s$$

Συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παραπορτής όταν κινείται σε σχέση με την πηγή

$$f_A = \frac{U}{U \mp U_s} f_s$$

Συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παραπορτής όταν η πηγή κινείται σε σχέση με αυτόν

$$f_A = \frac{U \pm U_A}{U \mp U_s} f_s$$

Συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παραπορτής όταν η πηγή και ο ίδιος κινούνται

Το φως

$$c = \lambda \cdot f$$

Θεμελιώδης εξίσωση των κυμάτων

$$E = h \cdot f$$

Ενέργεια φωτονίου

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

Δείκτης διάθλασης

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Λόγος δ.δ.

$$\hat{\theta}_\pi = \hat{\theta}_a$$

Νόμος ανάκλασης

Ατομικά φαινόμενα

$$L = mur = n \frac{h}{2\pi}$$

Στροφορμή ηλεκτρονίου

$$E_i - E_j = h \cdot f$$

Ενέργεια εκπεμπόμενου φωτονίου κατά την αποδιέγερση

$$E = -\kappa \frac{e^2}{2r}$$

Ολική ενέργεια ηλεκτρονίου

$$r_n = n^2 r_1 \quad \text{Επιτρεπόμενες τροχιές}$$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad \text{Επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{ev} \quad \text{Ελάχιστο μήκος κύματος ακτίνων X}$$

Πυρηνικά φαινόμενα

$$E = mc^2 \quad \text{Ισοδυναμία μάζας ενέργειας}$$

$$\Delta M = ZM_p + NM_\nu - M_\pi \quad \text{'Έλλειμμα μάζας}$$

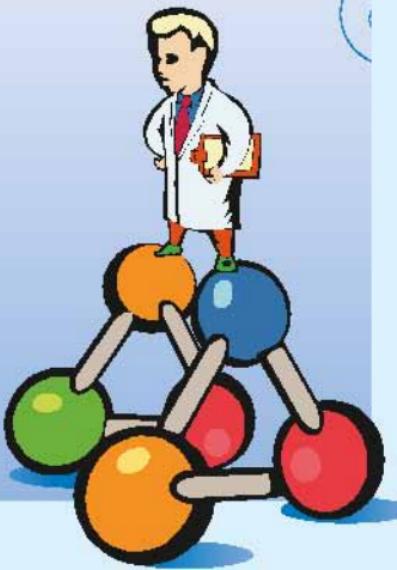
$$E_B = (\Delta M) \cdot c^2 \quad \text{Ενέργεια σύνδεσης}$$



$$Q = (M_A + M_B - M_\Gamma - M_\Delta) \cdot c^2 \quad \text{Θερμότητα αντίδρασης}$$



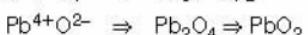
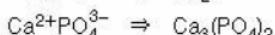
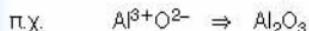
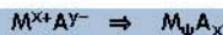
ΧΗΜΕΙΑ



Κυριότερα πολιματομικά ιόντα	
-ικό	-ώδες
ClO_3^- , BrO_3^- , IO_3^-	χλωρικό ...
NO_3^-	νιτρικό
CO_3^{2-}	ανθρακικό
SO_4^{2-}	θειικό
PO_4^{3-}	φωσφορικό
υπερ-...-ικό	υπο- ... -ώδες
ClO_4^- , BrO_4^- , IO_4^-	υπερχλωρικό ...
δέξιο-...-ικό	δέξιο- ... -ώδες
HCO_3^-	δέξιο ανθρακικό
HSO_4^-	δέξιο θειικό
HPO_4^{2-}	δέξιο φωσφορικό
Άλλα πολιματομικά ιόντα	
NH_4^+	αμμώνιο
OH^-	υδροξείδιο
CN^-	κυάνιο
HS^-	δέξιο θειούχο
MnO_4^-	υπερμαγγανικό
CrO_4^{2-}	χρωμικό
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$	διχρωμικό

Αριθμοί Οξείδωσης των σποιχείων			
Μέταλλα		Αμέταλλα	
Li, Na, K, Ag	+1	F	-1
Mg, Ca, Ba, Zn	+2	H	+1 (-1 στα υδροξείδια)
Al	+3	O	-2 (+2 στο OF_2 -1 στα υπεροξείδια)
Cu, Hg	+1, +2		
Fe	+2, +3	Cl, Br, I	-1 (+1, +3, +5, +7 στις οξειδώνισμχες ενώσεις)
Sn, Pb, Pt	+2, +4		
Cr	+3, +6	S	-2, +4, +6
Mn	+2, +4, +7	C, Si	-4, +4
Au	+1, +3	N, P	-3, +3, +5

Γραφή μοριακού τύπου ανόργανης ένωσης



Οξέα - Βάσεις - Οξείδια - Άλατα

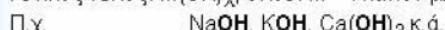
ΟΞΕΑ

Γενικός τύπος: H_xA , όπου A^{x-} , F^- , Cl^- , Br^- , I^- , S^{2-} ή πολυατομικό ανιόν.



ΒΑΣΕΙΣ

Γενικός τύπος: $M(OH)_x$, όπου: M^{x+} : κατιόν μετάλλου.



Επίσης βάση είναι η αμμώνια NH_3

ΟΞΕΙΔΙΑ

Γενικός τύπος: Σ_2O_X , όπου Σ^{x+} : στοιχείο (μέταλλο ή αμέταλλο)



ΆΛΑΤΑ

Γενικός τύπος: M_yA_x , όπου M^{x+} : κατιόν μετάλλου ή αμμώνιο και A^{y-} : ανιόν αμετάλλου εκτός από O^{2-} ή πολυατομικό ανιόν εκτός από OH^- . Π.χ.



Χρήσιμοι τύποι για μετατροπές

$$n(mol) = \frac{m(g)}{MB(g/mol)} = \frac{V(L)}{V_m(L/mol)} = \frac{N(\text{μόρια})}{N_A(\text{μόρια/mol})}$$

Σε πρότυπες συνθήκες (STP: 1 atm, 0°C):

$$V_m = 22,4 \text{ L/mol} = 22400 \text{ mL/mol}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ μόρια/mol (αριθμός Avogadro)}$$

- Καταστατική εξίσωση αερίων $PV = nRT$

$$R = 0,082 \text{ atm} \cdot \text{L/mol} \cdot \text{K} \quad T = \theta + 273$$

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg (Torr)}$$

- Πυκνότητα: $d = \frac{m}{V}$

Εκφράσεις συγκέντρωσης διαλυμάτων

1. ΣΤΑ ΕΚΑΤΟ ΚΑΤΑ ΒΑΡΟΣ (% w/w)

Π.χ. 10% w/w: σε 100 g διαλύματος περιέχονται 10 g διαλυμένης ουσίας

2. ΣΤΑ ΕΚΑΤΟ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ (% v/v)

Π.χ. 10% v/v: σε 100 mL διαλύματος περιέχονται 10 mL διαλυμένης ουσίας

3. ΣΤΑ ΕΚΑΤΟ ΚΑΤΑ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΟΓΚΟ (% w/v)

Π.χ. 10% w/v: σε 100 mL διαλύματος περιέχονται 10 g διαλυμένης ουσίας

4. ΜΟΡΙΑΚΟΤΗΤΑ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ (C)

Π.χ. 2 M (mol/L): σε 1 L διαλύματος περιέχονται 2 mol διαλυμένης ουσίας

$$C = \frac{n}{V} \text{ mol/L (ή M)} \Rightarrow n = C \cdot V \text{ mol}$$

Αραιώση

$n_{\text{αρχ}} = n_{\text{τελ}} \text{ ή } C_{\text{αρχ}} \cdot V_{\text{αρχ}} = C_{\text{τελ}} \cdot V_{\text{τελ}}$ και
 $V_{\text{τελ}} = V_{\text{αρχ}} + V_{\text{H}_2\text{O}}$ ($C_{\text{τελ}} < C_{\text{αρχ}}$).

Συμπύκνωση

- Με εξάπμιση διαλύμπτη

$$n_{\text{αρχ}} = n_{\text{τελ}} \text{ ή } C_{\text{αρχ}} \cdot V_{\text{αρχ}} = C_{\text{τελ}} \cdot V_{\text{τελ}} \text{ και } V_{\text{τελ}} = V_{\text{αρχ}} - V_{\text{H}_2\text{O}}$$

- Με προσθήκη διαλυμένης ουσίας

$$n_{\text{αρχ}} + n_{\text{προσθ}} = n_{\text{τελ}} \text{ ή } C_{\text{αρχ}} \cdot V_{\text{αρχ}} + n_{\text{προσθ}} = C_{\text{τελ}} \cdot V_{\text{τελ}}$$

$$(C_{\text{τελ}} > C_{\text{αρχ}})$$

- Ανάμειξη διαλυμάτων της ίδιας διαλυμένης ουσίας

$$n_1 + n_2 = n_{\text{τελ}} \text{ ή } C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 = C_{\text{τελ}} \cdot V_{\text{τελ}} \text{ και}$$

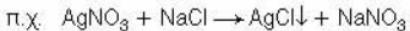
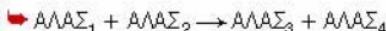
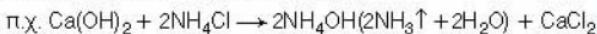
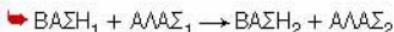
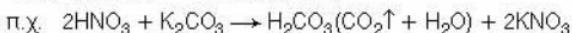
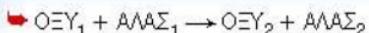
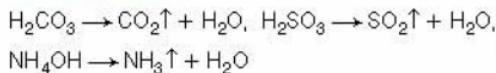
$$V_{\text{τελ}} = V_1 + V_2$$

Αντιδράσεις διπλής αντικατάστασης

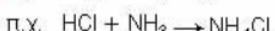
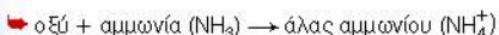
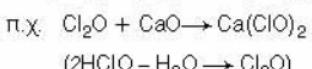
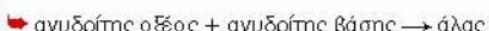
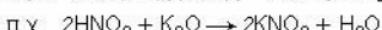
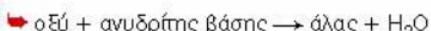
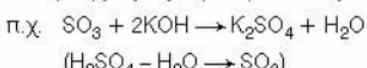
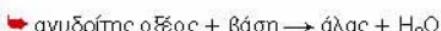
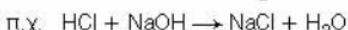
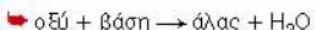


ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΙΣ: σχηματισμός ιζήματος (\downarrow) ή αερίου (\uparrow)

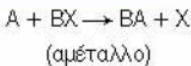
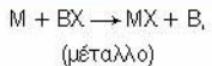
Άσταθη Προιοντα:



Αντιδράσεις εξουδετέρωσης



Αντιδράσεις απλής αντικατάστασης



Μίγμα αερίων

Νόμος του Dalton

$$P_{\text{ολ}} = P_1 + P_2 + \dots + P_v$$

Μερική πίεση

$$P_i V = n_i RT$$

Ολική πίεση μίγματος

$$P_{\text{ολ}} V = n_{\text{ολ}} RT$$

$$\text{Σχέση μερικής και ολικής πίεσης} \quad \frac{P_i}{P_{\text{ολ}}} = \frac{n_i}{n_{\text{ολ}}}$$

Θερμοχημεία

Μεταβολή ενθαλπίας $\Delta H = H_{\text{προϊόν}} - H_{\text{αντδρ}}$

Εξώθερμες αντιδράσεις $\Delta H < 0$. Εκλύεται ενέργεια στο περιβάλλον.
Ενδόθερμες αντιδράσεις $\Delta H > 0$. Απορροφάται ενέργεια από το περιβάλλον.

Παράγοντες που επηρεάζουν τη ΔH σε μια αντίδραση.

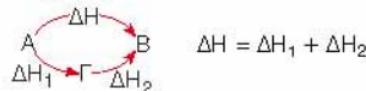
1. Φύση των αντιδρώντων
2. Φυσική κατάσταση αντιδρώντων και προϊόντων
3. Ποσότητες των αντιδρώντων
4. Συνθήκες (πίεση, θερμοκρασία)

Εξίσωση της θερμιδομετρίας $Q = mc\Delta\theta$

Αν το θερμιδόμετρο έχει θερμοχωρητικότητα C τότε

$$Q = (C + mc)\Delta\theta$$

Νόμος Hess - Θερμοχημικοί κύκλοι



Χημική κινητική

Ταχύπτητα της αντίδρασης $aA + \beta B \rightarrow \gamma \Gamma + \delta \Delta$

$$u = -\frac{\Delta[A]}{a \cdot \Delta t} = -\frac{\Delta[B]}{\beta \cdot \Delta t} = \frac{\Delta[\Gamma]}{\gamma \cdot \Delta t} = \frac{\Delta[\Delta]}{\delta \cdot \Delta t}$$

Μονάδα: mol/L·s

Νόμος ταχύπτητας

Για την αντίδραση $aA + \beta B \rightarrow \gamma \Gamma + \delta \Delta$

$$u = k[A]^x[B]^y$$

Τάξη αντίδρασης: το άθροισμα των εκθετών $x + y$

$$\text{Μονάδα σταθεράς } k: \left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right)^{1-(x+y)} \cdot \text{s}^{-1}$$

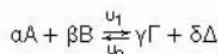
Οι τιμές των x, y , k προσδιορίζονται ΜΟΝΟ πειραματικά.

Παράγοντες που επηρεάζουν την ταχύπτητα μιας αντίδρασης:

1. Θερμοκρασία, 2. Συγκέντρωση, 3. Πίεση για αέρια, 4. Επιφάνεια επαφής, 5. Καταλύτες, 6. Φύση των αντιδρώντων

Χημική ισορροπία

Σε κατάσταση χημικής ισορροπίας θα βρίσκεται μια αμφίδρομη αντίδραση



όταν i) $\chi_1 = \chi_2$, ii) Συγκεντρώσεις αντιδρώντων και προϊόντων αμετάβλητες με την πάροδο του χρόνου.

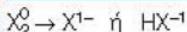
$$\text{Σταθερά χημικής ισορροπίας } K_c = \frac{[\Gamma]^{\gamma} [\Delta]^{\delta}}{[A]^{\alpha} [B]^{\beta}} \text{ σε ορισμένη θερμοκρασία.}$$

Επίσης $K_p = \frac{P_{\Gamma}^{\gamma} P_{\Delta}^{\delta}}{P_A^{\alpha} P_B^{\beta}}$. Περιλαμβάνει τις μερικές πιέσεις των συστατικών και εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία.

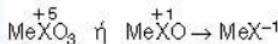
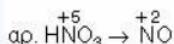
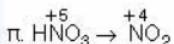
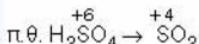
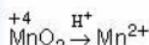
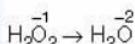
Σχέση της K_p με τη K_c :

$$K_p = K_c (RT)^{(\gamma+\delta)-(α+β)}, \quad K_p = K_c \text{ όταν } \gamma + \delta = \alpha + \beta.$$

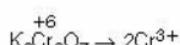
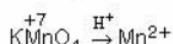
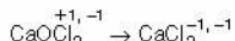
ΟΞΕΙΔΩΤΙΚΑ



(X: F, Cl, Br, I)



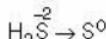
(Me: K, Na)



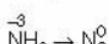
ΑΝΑΓΩΓΙΚΑ



(x: ο μεγαλύτερος Α.Ο.)



-ώδη → -ικά



Τροχιακά

Αριθμός τροχιακών ανά στιβάδα: n^2

Αριθμός τροχιακών ανά υποστιβάδα: $2l + 1$

Αριθμός ηλεκτρονίων ανά τροχιακό: 2

Περιοδικός πίνακας

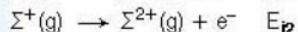
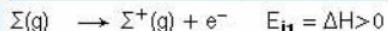
TOMEAΣ s: $ns^x \quad x = 1, 2$

TOMEAΣ p: $ns^2 np^x \quad x = 1, \dots, 6$

TOMEAΣ d: $(n-1)d^x ns^2 \quad x = 1, \dots, 10 \text{ εκτός } 4, 9$

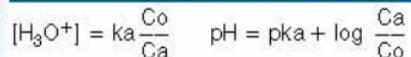
$(n-1)d^{x+1} ns^1 \quad x = 4, 9$

Ενέργεια ιοντισμού



Ισχύει $E_{1I} < E_{2I} < E_{3I} \dots$

Ρυθμιστικά διαλύματα



ΣΧΕΣΗ ka, kb ΕΝΟΣ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΖΕΥΓΟΥΣ

$$ka(HA) \cdot kb(A^-) = kw$$

ΟΡΓΑΝΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ

Ομόλογες σειρές

1. ΑΛΚΑΝΙΑ C_vH_{2v+2} , $v \geq 1$ Κορεσμένοι υδρ/κες

2. ΑΛΚΕΝΙΑ C_vH_{2v} , $v \geq 2$ Ακόρεστοι υδρ/κες με 1 διπλό δεσμό

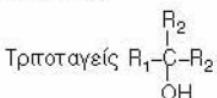
3. ΑΛΚΙΝΙΑ C_vH_{2v-2} , $v \geq 2$ Ακόρεστοι υδρ/κες με 1 τριπλό δεσμό

4. ΑΛΚΟΟΛΕΣ (ΚΟΡΕΣΜΕΝΕΣ ΜΟΝΟΣΘΕΝΕΙΣ) $C_vH_{2v+2}O$, $v \geq 1$.

Χαρακτηριστική ομάδα $-OH$ (υδροξείδιο)

Πρωτοταγείς $R-CH_2OH$,

Δευτεροταγείς $R_1-CH(R_2)OH$



5. ΑΙΘΕΡΕΣ $C_vH_{2v+2}O$, $v \geq 2$. Χαρακτηριστική ομάδα $-O-$

6. ΑΛΔΕΪΔΕΣ $C_vH_{2v}O$, $v \geq 1$. Χαρακτηριστική ομάδα $-CH=O$

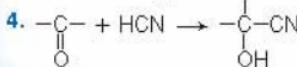
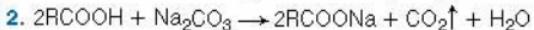
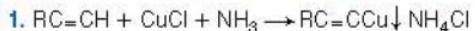
7. ΚΕΤΟΝΕΣ $C_vH_{2v}O$, $v \geq 3$. Χαρακτηριστική ομάδα $-C(=O)-$

8. ΟΞΕΑ (ΚΟΡΕΣΜΕΝΑ ΜΟΝΟΚΑΡΒΟΞΥΛΙΚΑ) $C_vH_{2v}O_2$, $v \geq 1$.

Χαρακτηριστική ομάδα $-C(=O)OH$



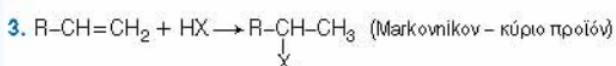
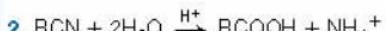
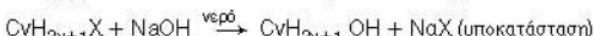
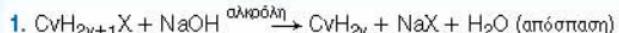
Αποκλειστικές αντιδράσεις



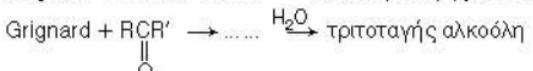
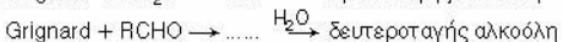
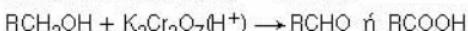
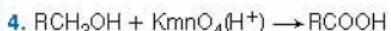
5. Αφυδάτωση παθαίνουν οι ROH στους $170^\circ C$ παρουσία π. H_2SO_4

6. Οι αλδεύδες ανάγουν τα αντιδραστήρια Fehling και Tollen's.

Χαρακτηριστικές αντιδράσεις



Κύριο προϊόν έχουμε στην απόσπαση όταν ισχύει ο κανόνας του Zaitsev



6. Αλογονοφορμική

