

## ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί η ανίσωση  $(x+1)^2 - 9|x+1| - 10 \leq 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή

γ) Να την εξετάσετε ως προς τη μονοτονία στο (2,3)

δ) Να λυθεί στο πεδίο ορισμού της η εξίσωση  $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$

3. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή το  $K(1,0)$  και η απόσταση του σημείου τομής της με τον άξονα  $y/y$  από το  $K$  είναι  $\sqrt{2}$

4. Αν  $a \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  να κατασκευαστεί εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)x - (\alpha-\beta)y = 4\alpha\beta \\ (\alpha-\beta)x + (\alpha+\beta)y = 2(\alpha^2 - \beta^2) \end{cases}$$

5. Να λυθεί η ανίσωση  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{6}$

6. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωση  $x^2 + 5(\mu-1)x - (\mu^2+1) = 0$ , να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του  $\mu$

ώστε να ισχύει:  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} > 1$

7. Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{x^2(x-3)(x^2+3x+2)(x^2-3)}{x^2-1} \leq 0$

8. Να λυθεί η εξίσωση  $\left( \frac{x^2-6}{x} \right)^2 - 6 \left( \frac{x^2-6}{x} \right) + 5 = 0$

9. Αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\alpha\beta \left( \frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma \right) + \beta\gamma \left( \frac{\beta+\gamma}{2} - \alpha \right) + \gamma\alpha \left( \frac{\gamma+\alpha}{2} - \beta \right) \leq 0 \text{ να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους}$$

10. α) Πότε ισχύει  $|\alpha+\beta| < |\alpha| + |\beta|$  και ποτε  $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$

β) Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $|x^2 + 3x - 4| = |x^2 + x + 1| + |2x - 5|$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} |7x - 1| = 2 \quad \text{ii)} |2x + 1| = |x + 1| \quad \text{iii)} |2x - 1| = (2x - 1)^2$$

$$\text{iv)} |x - 5| + |x^2 - 5x| = 0 \quad \text{vi)} |3|x - 1| - 1| = 3 \quad \text{vi)} \frac{|x - 2|}{2} + |x - 2| = \frac{|x - 2| + 5}{4}$$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$\text{i)} \frac{|2x + 1|}{3} - \frac{5|2x + 1|}{6} < \frac{4|2x + 1| + 1}{12} + \frac{|2x + 1|}{4} \quad \text{ii)} 2 \leq |x - 1| < 4$$

$$\text{iii)} |x - 4| < x - 1 \quad \text{iv)} |2x - 5| \geq -x^2 + 2x - 1$$

13. Αν  $\alpha\beta \neq 0$  και  $\alpha|\beta| = \beta|\alpha|$  να αποδείξετε ότι οι  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι

14. Αν  $\|x| - |y|| = |x + y|$  να αποδείξετε ότι  $x|y| + y|x| = 0$

15. Αν  $x$  και  $y$  λύσεις του συστήματος  $\begin{cases} x + 2y = \mu \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$  να βρεθούν οι τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  οι οποίες

επαληθεύουν την ανίσωση  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 8$

16. Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{x - 1}{x - 2} + 3 > \frac{3x - 1}{2x + 1}$

17. Αν προσθέσουμε σε ένα διψήφιο αριθμό το διπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του, βρίσκουμε 72. Αν διαιρέσουμε τον αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του βρίσκουμε 4. Να βρεθεί ο αριθμός

18. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i)} (x + 1)^2 - \lambda(5 - 2\lambda - x) = (x - 2\lambda)^2 + 5$$

$$\text{ii)} \lambda(3 - x) - x = \lambda^2 x - 2$$

19. Να λυθεί η εξίσωση  $|4 - x| - 4|x - 2| = 3x - 5$

20. Αν  $x, y \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι  $\|x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Πότε ισχύουν οι ισότητες ;

21. Να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τα σημεία  $A(1,1)$

$B(4,2)$ ,  $\Gamma(5,5)$  και  $\Delta(2,4)$  ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων  $Oxy$

22. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(1,1)$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $3y + x - 6 = 0$ .

23. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x \leq 2 \\ |x - 3|, & x > 2 \end{cases}$$

24. Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x - 2(\lambda - 1)y = 3 \\ x + 3\lambda y = 4\lambda + 5 \end{cases}$$

25. Βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η κάθε μία από τις παρακάτω ανισώσεις να αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

i)  $(\lambda-2)x^2 + 2(2\lambda-3)x + 5\lambda-6 > 0$

ii)  $(\lambda-2)x^2 + (\lambda-2)x + 12 - \lambda \leq 0$

26. στον άξονα των πραγματικών αριθμών μία μεταβλητή  $x$  κινείται έτσι ώστε κάθε φορά η απόσταση της από τον αριθμό 4 να είναι μικρότερη από το 5

α) Βρείτε σε ποιο διάστημα  $\Delta$  κινείται η μεταβλητή  $x$

β) Για κάθε  $x \in \Delta$ , αποδείξτε ότι για τη παράσταση

$$A(x) = |x+2| - 2|2x-19| \text{ ισχύει } -41 < A(x) < 9$$

27. Για ποιες τιμές του  $\mu$  η ανισότητα  $\frac{4x^2 - 6x + 12}{x^2 - 2x + 4} > \mu$  αληθεύει για κάθε τιμή του  $x \in \mathbb{R}$ ;

28. Εστω η εξίσωση  $-3x^2 + 2x = 4\lambda$ . Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda$  ώστε να έχει δύο ρίζες  $x_1, x_2$  άνισες και να ισχύει  $4x_1 - 3x_2 = 5$ . Να βρεθούν και οι ρίζες.

29. Δίνεται το σύστημα  $\lambda x + y = 2$

$$4x + \lambda y = 4$$

Για ποιες τιμές του  $\lambda$  έχει μοναδική λύση την  $(x_0, y_0)$ . Για ποιες τιμές του  $\lambda$  συναληθεύουν οι ανισώσεις  $x_0 > 2$  και  $y_0 > 0$

30. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: y = (\lambda - \frac{7}{4})x + \frac{5}{4}$  και  $\varepsilon_2: y = (\lambda + \frac{1}{3})x + \frac{10}{3}$  με  $\lambda \in \mathbb{Z}$

α) Να βρεθεί ο  $\lambda$  έτσι ώστε  $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

β) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε στο α να βρεθούν οι συντετεγμένες του σημείου τομής  $A$  των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

γ) Αν  $B(\lambda, \frac{1}{2})$  είναι σημείο της  $\varepsilon_1$  και  $\Gamma(2, \kappa)$  σημείο της  $\varepsilon_2$  να βρεθεί το μήκος του  $B\Gamma$

31. α) Εστω  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - \lambda x + \kappa = 0$ . Να σχηματιστεί η εξίσωση δευτέρου βαθμού που οι ρίζες της είναι οι  $x_1+1, x_2+1$

β) Βρείτε τα  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η εξίσωση που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα να είναι η  $x^2 - \lambda^2 x + \lambda \kappa = 0$

32. Εστω  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + \beta x + \beta + 1 = 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$

α) Να δειχτεί ότι  $(1-x_1^2)(1-x_2^2) = 4(\beta+1)$

β) Να σχηματιστεί η εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις  $\rho_1 = 1-x_1^2$  και

$$\rho_2 = 1-x_2^2$$

33. Να προσδιοριστεί ο  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να έχει δύο ρίζες η εξίσωση:

$$(2x-3)\lambda^2 + (5x-11)\lambda - 3(x+2) = 0$$

34. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-2)x - 7\lambda - 1 = 0$ ,  $\lambda \neq 1$

Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση αυτή έχει:

- α) δύο πραγματικές ρίζες και άνισες
- β) δύο ρίζες ετερόσημες
- γ) δύο ρίζες αντίθετες
- δ) δύο ρίζες αντίστροφες
- ε) δύο ρίζες θετικές

35. Να λυθούν οι ανισώσεις i)  $\frac{1}{x+1} < \frac{-1}{1-x}$  ii)  $\frac{x}{x-3} < \frac{x+1}{x-2}$

36. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η ανίσωση :

$$(\lambda-1)x^2 + (\lambda+1)x + \lambda+1 > 0 \quad \text{να είναι αδύνατη για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

37. Να λυθεί η εξίσωση  $(x^2-x)^2 + 3|x^2-x| - 28 = 0$

38. Να αποδείξετε ότι αν  $x < 0$  τότε  $x + \frac{1}{x} \leq 2$ . Πότε ισχύει το ίσον;

39. Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{2x+1}{2x^2+3x-2} \leq 2$

40. ι) Να αποδείξετε ότι :  $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$

υ) Για ποια τιμή του  $\lambda$  η εξίσωση  $\chi^2 - 3\chi + \lambda = 0$  έχει δύο ρίζες  $\chi_1$  και  $\chi_2$  για τις οποίες ισχύει  $\chi_1^5 + \chi_2^5 = 33$

41. Οι ρίζες της εξίσωσης  $\chi^2 + 2\chi - 7 = 0$  είναι  $\chi_1$  και  $\chi_2$ . Να βρεθεί η εξίσωση που έχει ρίζες το ζεύγος

$$\left\{ \frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1 + \chi_2}, \frac{\chi_2}{\chi_1} + \frac{\chi_1}{\chi_1 + \chi_2} \right\}$$

42. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda-1)\chi^2 - 2\lambda\chi + \lambda + 1 = 0$ ,  $\lambda \neq -1$

Για ποια τιμή του  $\lambda$  η εξίσωση :

ι) Έχει ρίζες αντίστροφες

υ) Η μία ρίζα είναι διπλάσια της άλλης ;

43. Εστω η εξίσωση  $\chi^2 - 3\chi + \lambda = 0$ . Για ποια τιμή του  $\lambda$  η εξίσωση έχει ρίζες  $\chi_1, \chi_2$  που ικανοποιούν τη σχέση

ι)  $5\chi_1 + \chi_2 = -1$     υ)  $2\chi_1^2 + 2\chi_2^2 + 5\chi_1\chi_2 = 15$

44. Αν η εξίσωση  $\chi^2 + \lambda\chi + \kappa = 0$  έχει δυο ρίζες διαδοχικούς ακεραίους τότε να δειχθεί ότι :  $\lambda^2 - 4\kappa = 1$

45. Εστω η εξίσωση  $\lambda\chi^2 - (\lambda^2 - 1)\chi + 2(\lambda + 1) = 0$  με  $\lambda \neq 0$ . Βρείτε το  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες

$$\chi_1, \chi_2 : \frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{\chi_2} = 2$$

46. Να σχηματιστεί εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες  $\chi_1, \chi_2$  ώστε :

$$\lambda\chi_1\chi_2 + (\lambda+1)(\chi_1 + \chi_2) = 2$$

$$(\lambda-1)\chi_1\chi_2 + \lambda(\chi_1 + \chi_2) = 3$$

47. ι) Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $2x^2 - 7x + 2 = 0$  έχει δύο θετικές ρίζες  $x_1, x_2$

ιι) Υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων

$$A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad B = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$$

48. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 4(3\lambda + 1)x + \frac{81\lambda^4}{4} = 0$  με  $\lambda \in \mathfrak{R}$

ι) Βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες  $x_1, x_2$  που να είναι μη αρνητικοί αριθμοί .

ιι) Για τις τιμές του  $\lambda$  που βρήκατε να δείξετε ότι η παράσταση  $\Pi = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$  είναι ακέραιος αριθμός .

49. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \square$  το τριώνυμο  $f(x) = \lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 3) = 0$ ,  $\lambda \neq 0$

ι) Αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων

ιι) Δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων

50. Αν  $(x_0, \psi_0)$  η μοναδική λύση του συστήματος  $x - \psi = 1 - 2\lambda$ ,  $2x - 3\psi = 1 - 5\lambda$

για ποια τιμή του  $\lambda$  η παράσταση  $A = x_0^2 - 2\psi_0^2$  γίνεται μέγιστη ; Ποια είναι τότε η μέγιστη τιμή του  $A$  καθώς και η λύση  $(x_0, \psi_0)$  του συστήματος ;

51. Αν  $2x - 3\psi = 12$  να βρεθεί το μέγιστο της παράστασης  $B = x^2 - 20\psi^2 + 2$  καθώς και τις τιμές των  $x, \psi$  για τις οποίες το  $B$  γίνεται μέγιστο.

52. Να λυθούν οι εξισώσεις :

ι)  $2(x-1)^2 - |x-1| - 6 = 0$  ιι)  $x^2 = |2x+3|$

ιιι)  $x^2 - 2|x^2 - 9| - 4 = 14 - x^2$

53. Να βρεθούν αν υπάρχουν οι τιμές του  $\lambda \in \mathfrak{R}$  για τις οποίες η ανίσωση

$$(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0 \quad \text{να αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του } x;$$

54. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda - 1)x^2 - \lambda x + 2\lambda = 0$   $\lambda \neq 1$

ι) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση έχει ρίζες στο  $\mathfrak{R}$

ιι) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης για ποιες τιμές του  $\lambda$  είναι

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < \frac{\lambda}{x_1} + \frac{\lambda}{x_2}$$

55. Δίνεται η εξίσωση  $2x^2 + 2\lambda x + \lambda(\lambda + 4) = 0$   $\lambda \in \mathfrak{R}$

ι) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση έχει ρίζες  $x_1, x_2$  άνισες στο  $\mathfrak{R}$

ιι) Να δείξετε ότι  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = \text{σταθερά}$

ιιι) Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \square$  είναι  $x_1 \cdot x_2 < \frac{-3}{2}$

56. Για ποια τιμή του  $\lambda \in \square$  η εξίσωση  $\lambda x^2 - 18x + 9 = 0$  έχει ρίζα το 3;

57. Να λυθεί η εξίσωση  $|x^2 - 5x + 6| + x + 3 = 0$

58. Αν η εξίσωση  $\chi^2 + \mu\chi + \kappa = 0$  έχει διπλή ρίζα τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για την

$$(1 - \kappa + \frac{\mu^2}{2})\chi^2 + \mu(1 + \kappa)\chi + \kappa(\kappa - 1) + \frac{\mu^2}{2} = 0$$

59. Αν  $\rho_1, \rho_2$  οι ρίζες της  $\chi^2 - 2\chi - 1 = 0$  και  $\chi_1, \chi_2$  οι ρίζες της  $\chi^2 - 3\chi - 5 = 0$  να κατασκευαστεί εξίσωση με

$$\text{ρίζες } \frac{\rho_1 + \rho_2}{\chi_1 + \chi_2}, \frac{\rho_1 - \rho_2}{\chi_2 - \chi_1}$$

60. Να βρεθούν οι  $\chi, \psi$  πραγματικοί που επαληθεύουν την εξίσωση

$$(\chi - 3)^2 (2\psi^2 - \psi + 1) + (\psi - 5)^4 (4\chi^2 + 10\chi + 21) = 0$$

61. Να επιλύσετε τα παρακάτω συστήματα ανισώσεων

$$\text{i) } 5 < \chi^2 - 8\chi + 25 < 18 \quad \text{ii) } \chi^2 - 3\chi - 18 < 0, \quad |\chi - 2| > 3, \quad |\chi^2 - 3\chi| - 4 > 0$$

$$\text{iii) } -1 < \frac{\chi - 5}{2\chi + 3} < 2$$

62. i) Αν  $2 < x < 3$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{9 - 6x + x^2}$$

ii) Αφού βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση

$$B = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{x + 3}} \text{ να την απλοποιήσετε.}$$

63. Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $B = 3x^2 + 5x\psi + 3\psi^2$  όταν

$$x = \frac{3}{6 - \sqrt{3}}, \quad \psi = \frac{3}{6 + \sqrt{3}}$$

64. Να μετατραπεί η παράσταση  $x = \frac{x + \psi}{x + \psi - 2\sqrt{x\psi}}$ ,  $x > 0, \psi > 0$  σε ισοδύναμη με ρητό παρανομαστή.

65. Να κάνετε πιο απλή την παράσταση  $B = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{1 - \sqrt{2}}}$

66. Δίνεται η παράσταση  $\Gamma = \frac{3}{\sqrt[3]{x - 2} - 1}$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται και να μετατραπεί ο

τύπος της σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή.

67. Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις της πρώτης στήλης με τα αποτελέσματα της της δεύτερης στήλης.

$\sqrt[4]{3^2}$		$\sqrt[12]{12}$
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}}$		3
$\sqrt{(-3)^2}$		$\sqrt{3}$
$\sqrt[4]{(-3)^4 5^8}$		75
$\frac{10}{\sqrt{5}}$	6	-3
$\sqrt[3]{5^2}$		$\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$
4		$2\sqrt{5}$
		$\sqrt{5}$

68. Σε ποιο διάστημα παίρνει τιμές το  $x$  όταν ορίζεται η παράσταση

$$\sqrt[7]{(1-x)^7}$$

$$A:(0,1) \quad B:[7,+\infty) \quad \Gamma:[1,+\infty) \quad \Delta:(-\infty,1] \quad E:(-\infty,1)$$

69. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος

$$A:\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x} \quad B:\text{Αν } \alpha > 0, \sqrt[5]{\alpha^5} = \alpha \quad \Gamma:\sqrt[8]{\psi^8} = |\psi| \quad \Delta:\text{Αν } \psi > 0, \sqrt[4]{x^2\psi} = x\sqrt[4]{\psi}$$

$$E:\sqrt[5]{x^8} = (\sqrt[5]{x})^8$$

70. Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5|x| + 6}$

ι) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η  $A$

υ) Να την απλοποιήσετε

ιι) Να γράψετε την  $A$  χωρίς απόλυτα

71. Έστω ένα σύστημα  $2 \times 2$  με αγνώστους  $x$  και  $\psi$  για το οποίο ισχύει :

$$D_x^2 + D_\psi^2 + 5 \leq 2D_x + 4D_\psi, \quad D = 2D_x + D_\psi$$

Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να την βρείτε

72. Έστω ένα σύστημα  $2 \times 2$  με αγνώστους  $x$  και  $\psi$  για το οποίο ισχύει :

$$D = D_x + 3D_\psi$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, \psi_0)$  να αποδείξετε ότι :

$$ι) x_0 + 3\psi_0 = 1$$

$$ιι) x_0^2 - 9\psi_0^2 = \frac{D_x - 3D_\psi}{D}$$

73. Έστω ένα σύστημα  $2 \times 2$  με αγνώστους  $x$  και  $\psi$  για το οποίο ισχύει :

$$D_x^2 + D_\psi^2 + D^2 + 5 \leq 2(D_x + 2D)$$

ι) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση

ιι) Να βρείτε την μοναδική λύση

74. Να λυθεί η εξίσωση  $x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$

75. ι) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ισχύει :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = \frac{1}{2} [(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2]$$

ιι) Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x, \psi$  έχει μοναδική λύση . Αν ισχύει :

$$D^2 + D_x^2 + D_\psi^2 = DD_x + DD_\psi + D_x D_\psi \text{ να λυθεί το σύστημα}$$

76. Αν  $-x^2 + 5x - 6 > 0$  τότε να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{|x-2| + |x-3|}{|x-1| + |x-5|}$$

77. Έστω το  $2 \times 2$  σύστημα  $\begin{cases} \alpha x + \psi = 1 \\ x + (1-\alpha)\psi = 0 \end{cases}$  με  $\alpha$  πραγματικό

Να βρεθεί ο  $\alpha$  ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση  $(x_0, \psi_0)$  για την οποία ισχύει :  $x_0 < \psi_0 + 1$

78. ι) Η εξίσωση  $x^2 - kx + \lambda = 0$  έχει ρίζες  $x_1, x_2$  . Να βρείτε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει για ρίζες τις  $2x_1 + 3x_2$  και  $3x_1 + 2x_2$

ιι) Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$

ιιι) Με την βοήθεια των προηγούμενων ερωτημάτων και χωρίς να χρησιμοποιηθεί ο τύπος της διακρίνουσας να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 - 5(\sqrt{2} + 1)x + 6(\sqrt{2} + 1)^2 + \sqrt{2} = 0$$

79. ι) Να λύσετε την εξίσωση  $2x^2 + x - 3 = 0$

ιι) Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta$  αν  $2(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta) - 3 = 0$  και  $\alpha - \beta = 1$

80. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής  $x$  μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι  $K(x) = x^2 - x$  ενώ η είσπραξη από την πώληση  $x$  μονάδων είναι

$E(x) = -x^2 + 99x + 1000$  σε χιλιάδες δραχμές .Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή  $x$  μονάδων του εργοστασίου για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο .

81. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λάθος .

ι) Για  $x, \psi \neq 0$  το σύστημα  $\begin{cases} \alpha x - \beta \psi = 10 \\ 2\alpha x + \beta \psi = 21 \end{cases}$  με αγνώστους  $\alpha, \beta$  έχει μοναδική λύση

ιι) Σε ένα γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  έχουμε :

$D_\psi^2 + D_x^2 + 2D_x + 1 \leq 0$  και  $D < 0$  τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, \psi) = (0, 0)$$



υι) Αν το  $\begin{cases} x + \lambda\psi = 3 \\ x + 2\lambda\psi = 1 \end{cases}$  είναι αδύνατο τότε το  $\begin{cases} \lambda x + \psi = 1 \\ 2\lambda x + \psi = 2 \end{cases}$  είναι αόριστο .

**82.** Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις

$$\varepsilon_1 : \psi = \lambda x + 1 - \lambda \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \psi = \frac{\lambda^2}{2}x - \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda$  ώστε :

i)  $\varepsilon_1 // x/x$  ii)  $\varepsilon_1 \perp x/x$  iii) οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  να τέμνονται iv)  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

**83.** Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  με εξισώσεις

$$\psi = -\frac{2x}{3} + \frac{5\lambda + 4}{3} \quad \text{και} \quad \psi = -\frac{1}{2}x + \frac{3\lambda + 2}{2} \quad \text{αντίστοιχα .}$$

Δείξτε ότι :

i) Οι ευθείες τέμνονται σε σημείο  $M(x_0, \psi_0)$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Το σημείο  $M(x_0, \psi_0)$  ανήκει σε σταθερή ευθεία .

**84.** Δίνεται η ευθεία με εξίσωση  $\psi = (\lambda^2 - 3\lambda)x + 1$   $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Αν η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο  $(1, -1)$  να υπολογίσετε τις τιμές του  $\lambda$

ii) Για τις τιμές του  $\lambda$  που βρήκατε στο i

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon$  είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση  $\psi = \frac{1}{2}x + 5$

β) Να βρείτε την τιμή του  $\mu$  ώστε η ευθεία  $(\eta)$  με εξίσωση  $\psi = -|\mu - 3|x + 2$  να είναι παράλληλη στην  $\varepsilon$

**85.** Έστω συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{(\lambda - 1)x^2} + 1$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$

i) Είναι δυνατόν να ισχύει  $\lambda < 1$  ;

ii) Αν το σημείο  $(1, 2)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$  να υπολογίσετε το  $\lambda$

iii) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρέθηκε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$

Είναι η  $f$  άρτια ;

**86.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$  ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

i) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν η  $f$  να είναι περιττή

ii) Αν η  $f$  είναι άρτια , να υπολογίσετε το  $\alpha$  . Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$

**87.** α) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα τότε η γραφική της παράσταση της συνάρτησης θα τέμνει τον άξονα  $x/x$  σε ένα το πολύ σημείο .

β) Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2002x^{2001} + 2x - 2004$

i) Σε πόσα σημεία η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x/x$  ;

ii) Να δειχτεί ότι  $f(4^6) > f(4^5)$

iii) Να λυθεί η ανίσωση  $f(x^2) < f(2)$

**88.** Έστω  $\beta, \gamma \neq 0$  με  $|\beta| > |\gamma| + 1$  και η εξίσωση  $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ . Δείξτε ότι

i) η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

ii) Οι ρίζες  $x_1, x_2$  αποκλείεται να είναι ταυτόχρονα ακέραιες .

**89.** Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda^3 - \lambda)x^2 + \lambda x + \lambda(1 + \lambda)(1 - \lambda) = 0$

i) Βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες

ii) Υπάρχει τιμή του  $\lambda$  ώστε να έχει η εξίσωση άπειρες ρίζες .;

**90.** Δίνεται το τριώνυμο  $P(x) = \alpha x^2 + \beta x - 2001$  ,  $\alpha \neq 0$

i) Αν είναι  $P(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να δείξετε ότι  $P(2004) < 0$

ii) Αν είναι  $\alpha + \beta > 2001$  τότε η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x - 2001 = 0$  έχει ρίζες πραγματικές .

**91.** i) Να αποδείξετε ότι  $3x^2 - x + 4 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ii) Να εξετάσετε πόσες λύσεις έχει το σύστημα

$$\begin{cases} (3\alpha^2 + 3\beta - 1)x - 2\psi = \alpha^4 + \beta \\ 2x + (\alpha^2 + \beta)\psi = \alpha^5 + 3 \end{cases}$$

**92.** Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  , να λύσετε την εξίσωση

$$x(3 - 5\lambda) + 3(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 2\lambda x$$

**93.** Αν το σύστημα  $\left. \begin{array}{l} \lambda x + 3(\lambda - 1)\psi = 0 \\ 2\lambda x + 3\psi = 3 - 2\lambda \end{array} \right\} \lambda \in \mathbb{R}$

έχει μοναδική λύση  $(x, \psi)$  να προσδιοριστεί ο  $\lambda$  , έτσι ώστε να ισχύει

$$2x - 5\psi = -1$$

**94.** Ένας έμπορος ρολογιών πουλάει 3 ρολόγια του χεριού και 4 ρολόγια τοίχου προς 3.600 ευρώ. Αν αυξήσει κατά 20% την τιμή του ρολογιού του χεριού και μειώσει κατά 10% την τιμή του ρολογιού τοίχου , θα εισπράξει το ίδιο ποσό με το αρχικό. Πόσο πουλάει το κάθε ρολόι ;

**95.** α) Να λυθεί η εξίσωση  $\frac{x}{|x+1|} = 4$

β) Να λυθεί η ανίσωση  $2 \leq |5x - 1| \leq 7$

**96.** Αν  $|x| < 2$  και  $|\psi| < 3$  τότε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις ισχύουν ;

i)  $x < 1$  ii)  $x > 0$  iii)  $|x| + |\psi| < 5$  iv)  $|x + \psi| < 5$  v)  $x + \psi < 6$  vi)  $x\psi < 6$  vii)  $\frac{|x|}{|\psi|} < \frac{2}{3}$  97. Να

προσδιοριστούν οι  $\lambda, \mu$  ώστε η εξίσωση  $(\lambda + 3)x^2 - \lambda x + \mu + 1 = 0$  να έχει μοναδική ρίζα το μηδέν .

98. Να προσδιοριστεί ο  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  ώστε η εξίσωση :  $x^2 - (\lambda - 3)x + 2\lambda - 4 = 0$  να έχει δύο ρίζες  $x_1, x_2$  για

τις οποίες να ισχύει :  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\lambda}$

99. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός  $\lambda$  ώστε η εξίσωση :

$3x^2 + (x + 1)\lambda - x\lambda^2 = 2(1 - 10x)$  να έχει δύο ρίζες αντίθετες .

100. Αν το 11 είναι μία από τις ρίζες της εξίσωσης

$x^2 - 2(\lambda + 2)x + 2\lambda^2 - 17 = 0$  να προσδιοριστεί η άλλη

65 ΓΕΛ ΑΘΗΝΑΣ