

3^Η ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ
(6^η ομάδα επαναληπτικών ασκήσεων)
(ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 2.6-2.7)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε

$$x \cdot f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3 - 3x + \alpha = 0$$

έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$.

3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες, ώστε

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 17 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και
$$g(x) = x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα μονοτονίας της.
- iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς τρεις εφαπτόμενες της C_g οι οποίες διέρχονται από το σημείο $P(3, 17)$.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 3x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τρία τοπικά ακρότατα, να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοιοι, ώστε

$$f''(\xi_1) = 0 \quad \text{και} \quad f''(\xi_2) = 0.$$

ii) $\alpha^2 > 8\beta$.

Για τις απαντήσεις σας:

- Παίρνετε φωτογραφία τις λύσεις ή σκανάρετε τις λύσεις.
- Είτε μου τις στέλνετε με μήνυμα από την η-τάξη του μαθήματος (eclass.sch.gr/courses/EL530118/), είτε τις στέλνετε στο e-mail: zohios@math.uoc.gr
- Παράδοση, μέχρι την Τετάρτη 22/4/2020 και ώρα 23:59:59.

Καλό Πάσχα και καλή Ανάσταση να έχουμε όλοι μας!

Με υπομονή, ελπίδα και πίστη πως σύντομα όλα θα είναι όπως πριν!

Ζωχιός Χρίστος