

2^Η ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ
(4^η ομάδα επαναληπτικών ασκήσεων)
(ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.8)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ 2-x^2, & x \in [0, 1] \\ \ln x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

- i) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$.

2) Έστω συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(2x) = f(x) + x - 1$$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

3) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$(f(x))^2 + xf(x) \geq 2^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} .
- ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$f(1) > -1,$$

να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

4) Έστω συνάρτηση $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) < f(x) \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$.
- ii) Η συνάρτηση f δεν έχει ολικό ελάχιστο.
- iii) Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

Για τις απαντήσεις σας:

- **Παίρνετε φωτογραφία** τις λύσεις ή σκανάρετε τις λύσεις.
- Είτε μου τις στέλνετε με μήνυμα από την η-τάξη του μαθήματος (eclass.sch.gr/courses/EL530118/), είτε τις στέλνετε στο e-mail: zohios@math.uoc.gr
- **Παράδοση, μέχρι την Κυριακή 5/4/2020 και ώρα 23:59:59.**

Πολλές ευχές για υγεία, καλή δύναμη και καλή υπομονή!

Ζωχιός Χρίστος