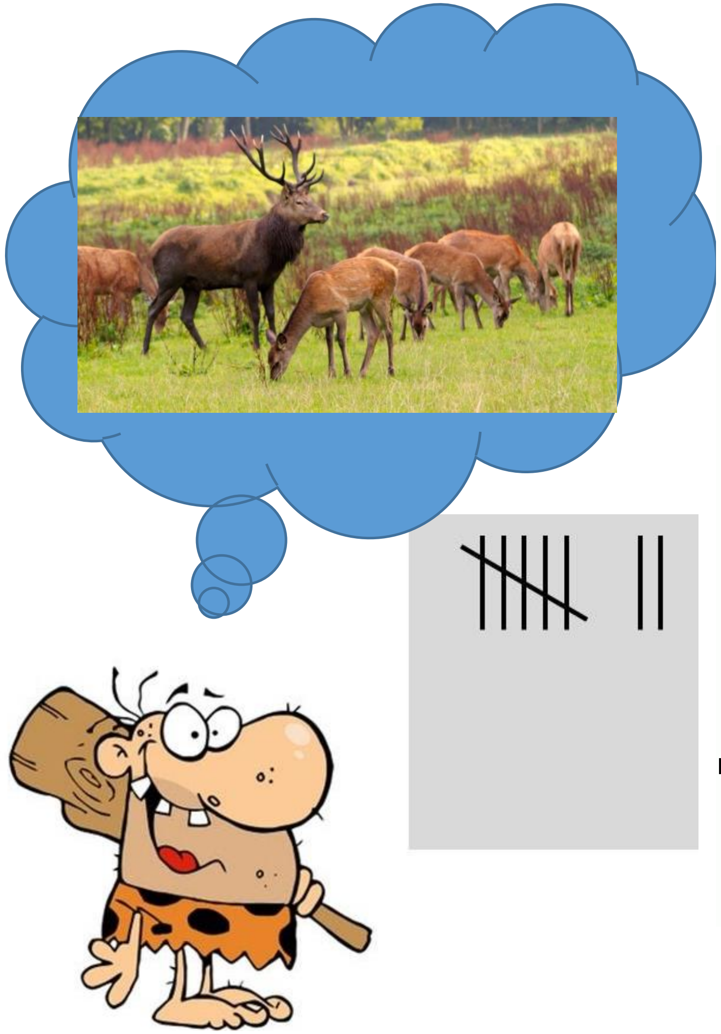
Η δημιουργία του μυστηριώδους απέραντου κόσμου των αριθμών και η διαμόρφωση της ταυτότητας τους και των νόμων τους…



π=3,14….

0,2334…

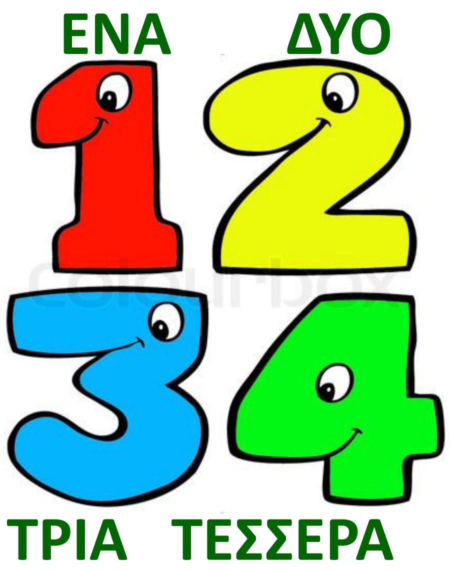
2/3

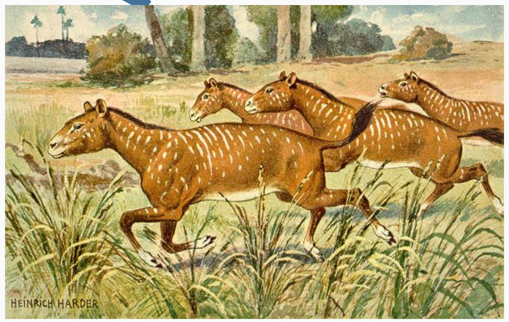
Επιμέλεια: Βανταράκης Νίκος - Μαθηματικός

Πως όμως προέκυψε η ανάγκη αρίθμησης και πως επινοήθηκαν οι αριθμοί ;

- Η αρίθμηση και η χρήση συμβόλων αριθμών και η λεκτική περιγραφή τους όπως την ξέρουμε σήμερα δεν ήταν μια εύκολη και αυτονόητη διαδικασία.

- Χρειάστηκαν χιλιετίες για να φτάσει στη σημερινή μορφή και αποτελεί μια μεγάλη κατάκτηση της ανθρωπότητας.
- Η σημερινή **αριθμητική** (δηλ. η επιστήμη των αριθμών) είναι το αποτέλεσμα μιας μακροχρόνιας εξέλιξης στην οποία σημαντικό ρόλο έπαιξαν και οι αρχαίοι Έλληνες.





Σύμβολο

IIII

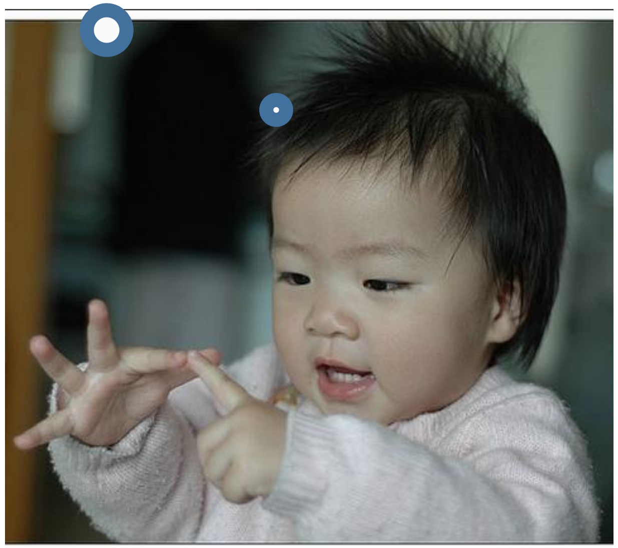
Σημερινό Σύμβολο

4

Σημερινή Λεκτική περιγραφή

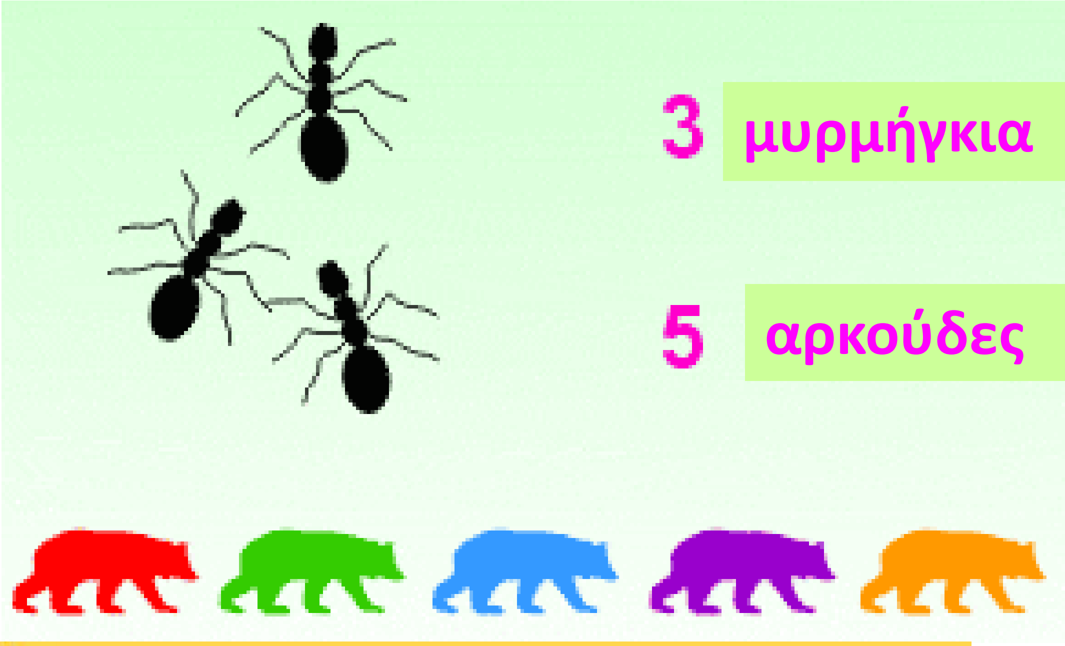
«τέσσερα»

Μια οπτική απεικόνιση για το πώς πιθανώς σε **διάρκεια χιλιετιών** προέκυψε και εξελίχθηκε σταδιακά η χρήση συμβόλων και λέξεων στη μέτρηση ενός πλήθους φυσικών αντικειμένων.

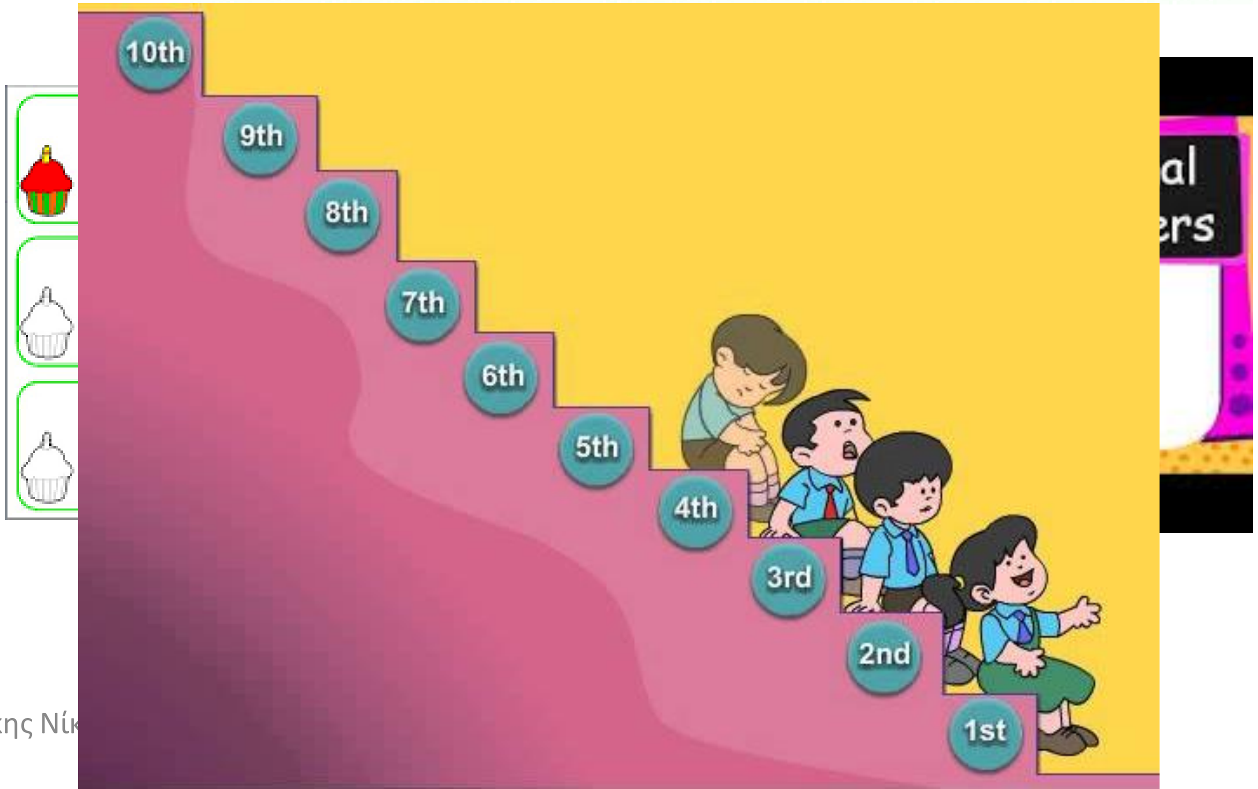


Οι αριθμοί αρχικά χρησιμοποιήθηκαν
1) Για να μετρήσουν (<u>πλήθος</u>) δηλ. πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε μία ομάδα.

Π.χ 5 αρκούδες ή 3 μυρμήγκια. (Οι αριθμοί αυτοί σήμερα καλούνται <u>**πληθικοί αριθμοί**</u> .)

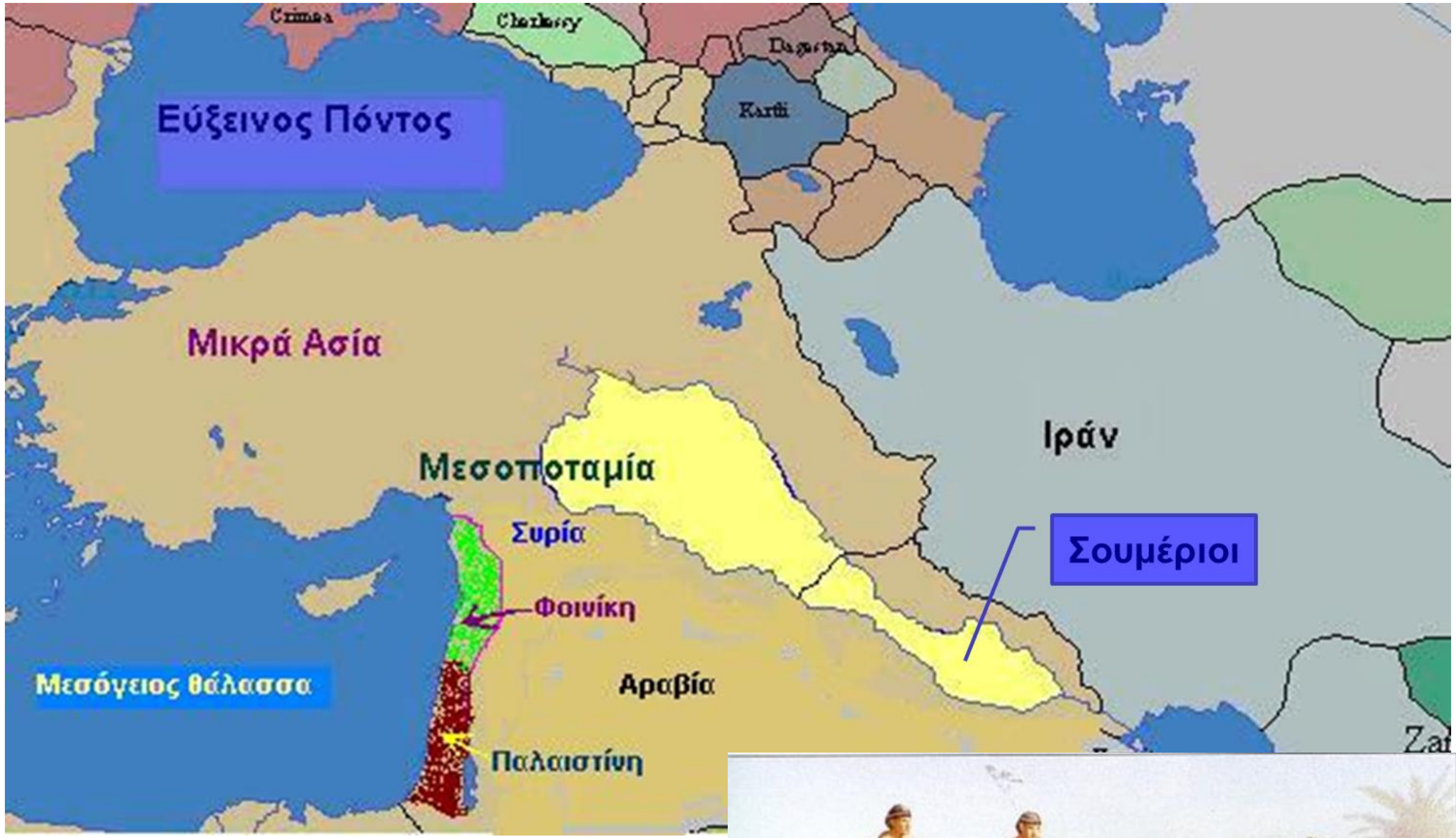


2) Για να δείξουν θέση ενός στοιχείου σε σχέση με ένα πλήθος στοιχείων ενός συνόλου- ομάδας που έχει τοποθετηθεί σε μία συγκεκριμένη σειρά (διάταξη) . (Οι αριθμοί αυτοί καλούνται σήμερα <u>**διατακτικοί αριθμοί**</u> ή αριθμοί διάταξης)
Π.χ το δεύτερο ή στη σειρά αντικείμενο (από ένα πλήθος)

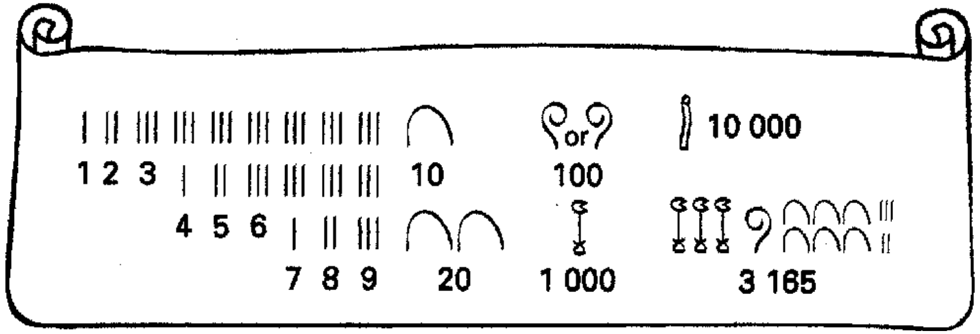


Οι πρώτες ενδείξεις αριθμών και μέτρησης. εμφανίζονται το 35000 π.Χ σαν χαράξεις γραμμών σε οστά και διάφορα αντικείμενα .

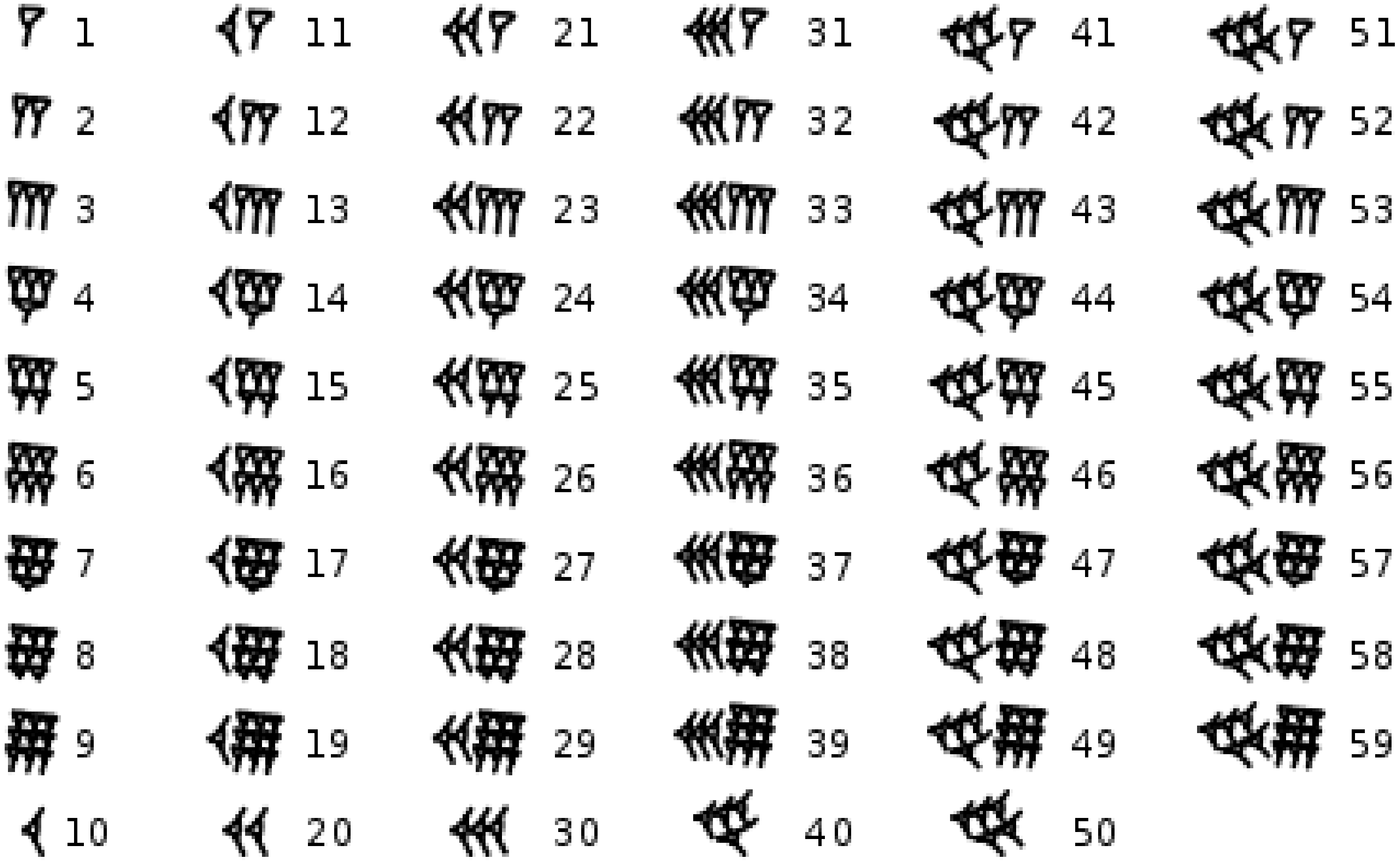
Οι πρώτες όμως ενδείξεις <u>συστηματικής</u> χρήσης αριθμών εμφανίζονται σε περιοχές μόνιμης συγκέντρωσης πληθυσμών (10000 π.Χ)-(ανάπτυξη γεωργίας)



Παραδείγματα γραπτών συμβόλων για αριθμούς



Αιγυπτιακά ιερογλυφικά



ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

	Α΄	1	ΕΙΣ	,Α	1000
	Β΄	2	ΔΙΣ	,Β	2000
	Γ΄	3	ΤΡΕΙΣ	,Γ	3000
	Δ΄	4	ΤΕΤΡΑΚΙΣ	,Δ	4000
	Ε΄	5	ΠΕΝΤΑΚΙΣ	,Ε	5000
(F)	ϛ΄	6	ΕΞΑΚΙΣ	,ϛ	6000
	Ζ΄	7	ΕΠΤΑΚΙΣ	,Ζ	7000
	Η΄	8	ΟΚΤΑΚΙΣ	,Η	8000
	Θ΄	9	ΕΝΝΕΑΚΙΣ	,Θ	9000
	Ι΄	10	ΔΕΚΑΚΙΣ	,Ι	10000
	Κ΄	20	ΕΙΚΟΣΑΚΙΣ		
	Λ΄	30	ΤΡΙΑΚΟΝΤΑΚΙΣ		
	Μ΄	40	ΤΕΤΡΑΚΟΝΤΑΚΙΣ		
	Ν΄	50	ΠΕΝΤΑΚΟΝΤΑΚΙΣ		
	Ξ΄	60	ΕΞΑΚΟΝΤΑΚΙΣ		
	Ο΄	70	ΕΒΔΟΜΗΚΟΝΤΑΚΙΣ		
	Π΄	80	ΟΓΔΟΗΚΟΝΤΑΚΙΣ		
	ϟ΄	90	ΕΝΝΕΑΚΟΝΤΑΚΙΣ		
	Ρ΄	100	ΕΚΑΤΟΝΤΑΚΙΣ		
	Σ΄	200	ΔΙΑΚΟΣΙΟΣΤΑΚΙΣ		
	Τ΄	300	ΤΡΙΑΚΟΣΙΟΣΤΑΚΙΣ		
	Υ΄	400	ΤΕΣΣΑΡΑΚΟΣΙΟΣΤΑΚΙΣ		
	Φ΄	500	ΠΕΝΤΑΚΟΣΙΟΣΤΑΚΙΣ		
	Χ΄	600	ΕΞΑΚΟΣΙΟΣΤΑΚΙΣ		
	Ψ΄	700	ΕΠΤΑΚΟΣΙΟΣΤΑΚΙΣ		
	Ω΄	800	ΟΓΔΟΗΚΟΣΙΟΣΤΑΚΙΣ		
	ϡ	900	ΕΝΝΕΑΚΟΣΙΟΣΤΑΚΙΣ		

Π.Χ.

11 = Ι΄Α΄
12 - Ι΄Β΄
21 = Κ΄Α΄
101 = Ρ΄Α΄
201 = Σ΄Α΄
1001 = ,ΑΑ΄
2001 = ,ΒΑ΄
3001 = ,ΓΑ΄

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Για αριθμοί εχρησιμοποιούντο τα γράμματα με τρεις πρόσθετους χαρακτήρες, , ή F , (δίγαμμα αντί σίγμα ς), ϟ , (κόππα), και ϡ ,(σαμπί). Ως εκ τούτου π.χ : $\sigma\pi\zeta = 287$

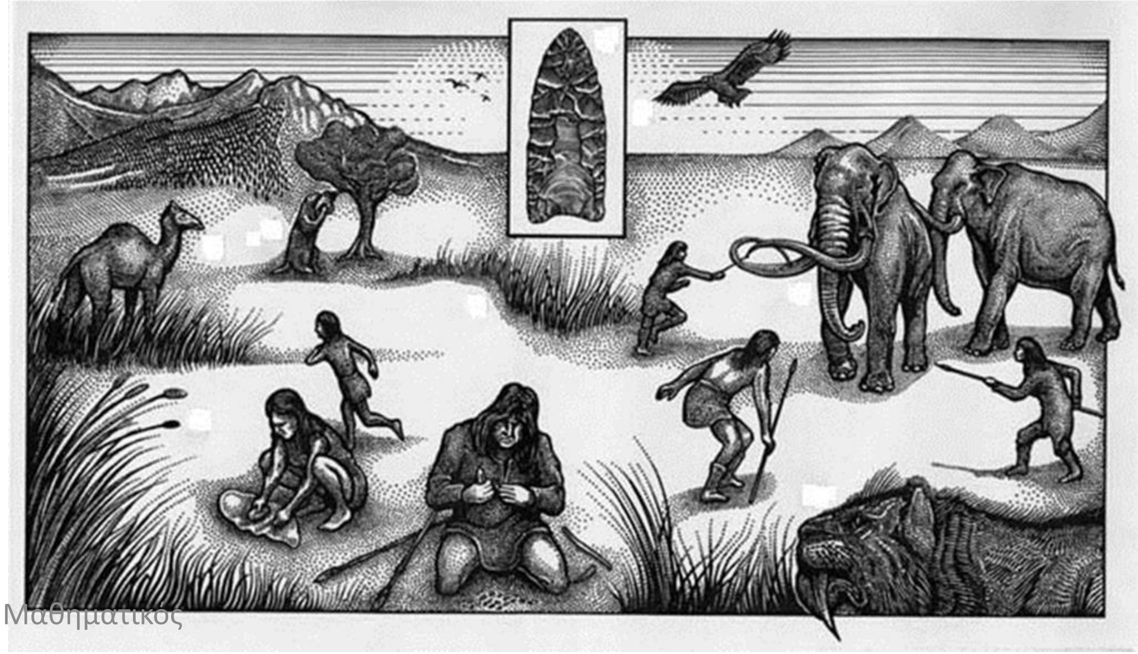
Είναι εμφανής με τους συμβολισμούς αυτούς η δυσκολία να παριστάνουμε μεγάλους αριθμούς αλλά και να κάνουμε περίπλοκες πράξεις.

Ποιοι παράγοντες οδήγησαν στην ανάγκη καταμέτρησης;

1. Ο δίκαιος τρόπος μοιράσματος του θηράματος που βοηθούσε στη συνοχή και την αποτελεσματικότητα μιας ομάδας.

2 . Το κυνήγι ήταν πιο αποδοτικό αν υπήρχε μία συγκεκριμένη αρίθμηση στη σειρά και στον τρόπο ενεργειών των κυνηγών.

3. Όταν ταξίδευαν σε μεγάλες αποστάσεις για κυνήγι έπρεπε να χωρίσουν τον απαιτούμενο χρόνο σε συγκεκριμένο αριθμό ημερών και να υπολογίσουν τις προμήθειες.

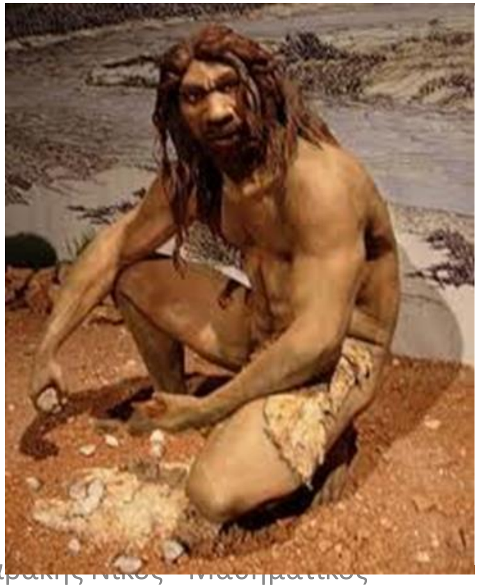


4. Ο σωστός χωρισμός σε ομάδες με αριθμό ατόμων κατάλληλο να αντιμετωπίσει κάθε φορά συγκεκριμένα είδη θηραμάτων .

5. Στους τόπους κατοικίας έπρεπε να δοθούν λύσεις και απαντήσεις στα ερωτήματα :

Πόσες μέρες διατηρείται ένα είδος τροφής ;

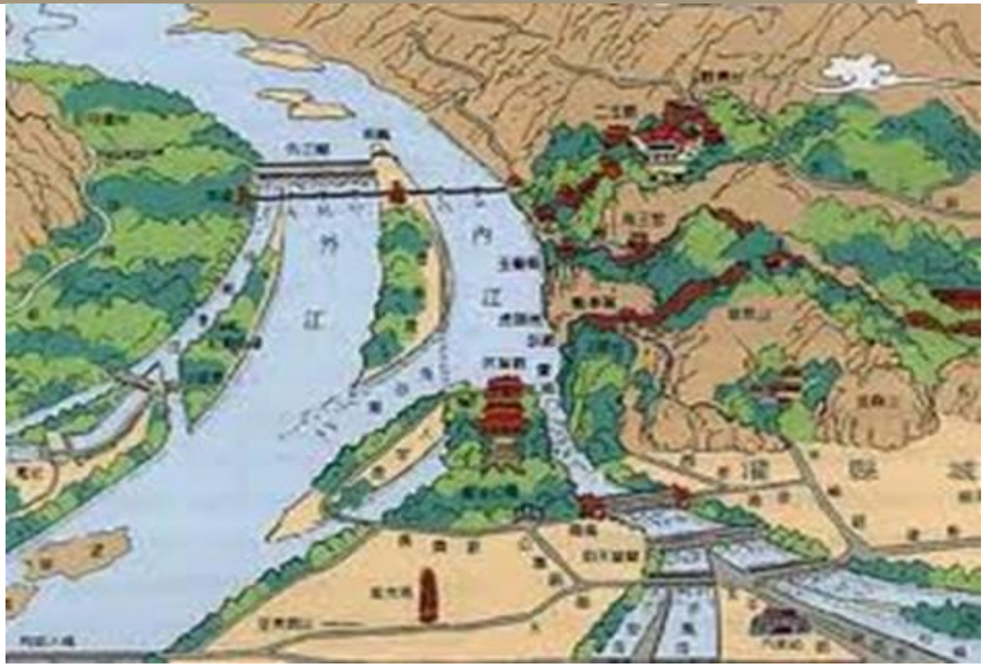
Ποια η αναλογία υλικών στη παρασκευή φαγητού;



ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΓΕΩΡΓΙΑΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ.

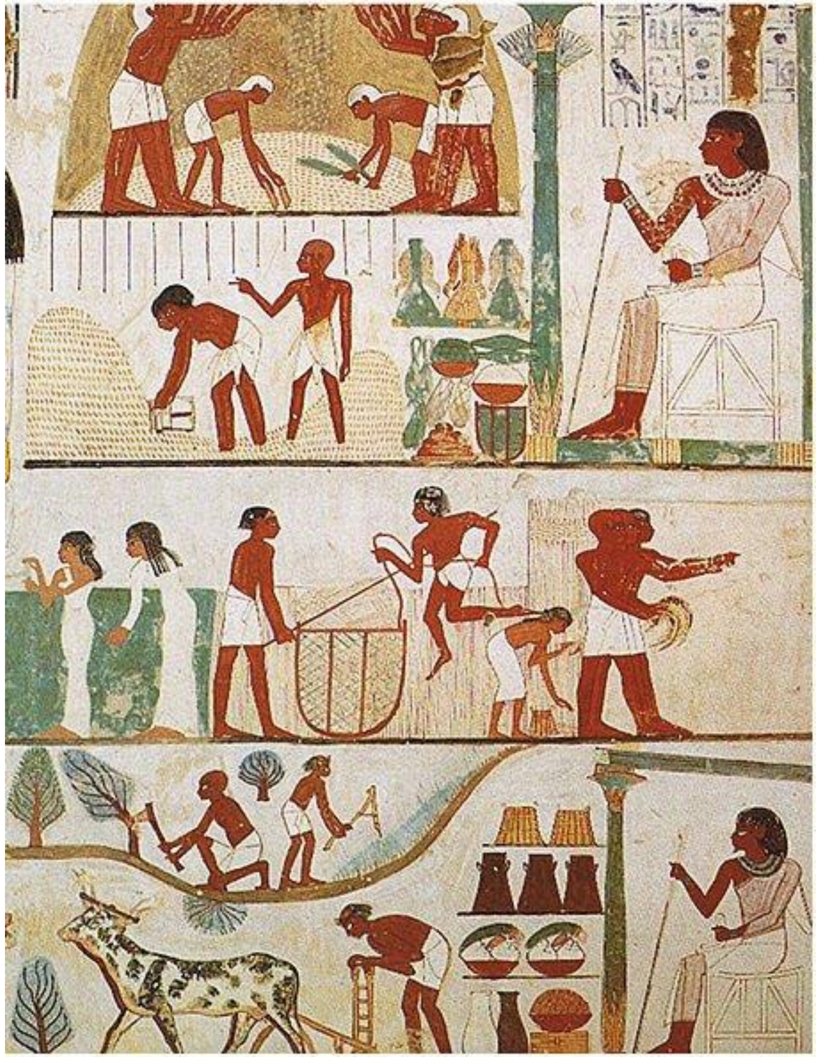
Η γεωργία και η συσσώρευση αγαθών επέτρεψε τη μόνιμη συγκέντρωση πληθυσμών σε περιοχές όπως η Μεσοποταμία και η περιοχή του Νείλου.

Έχουμε δημιουργία χωριών και πόλεων και επομένως ανάγκη καταμέτρησης τμημάτων γης που καλλιεργούνται και δημιουργία αποθηκών για φύλαξη τροφίμων.



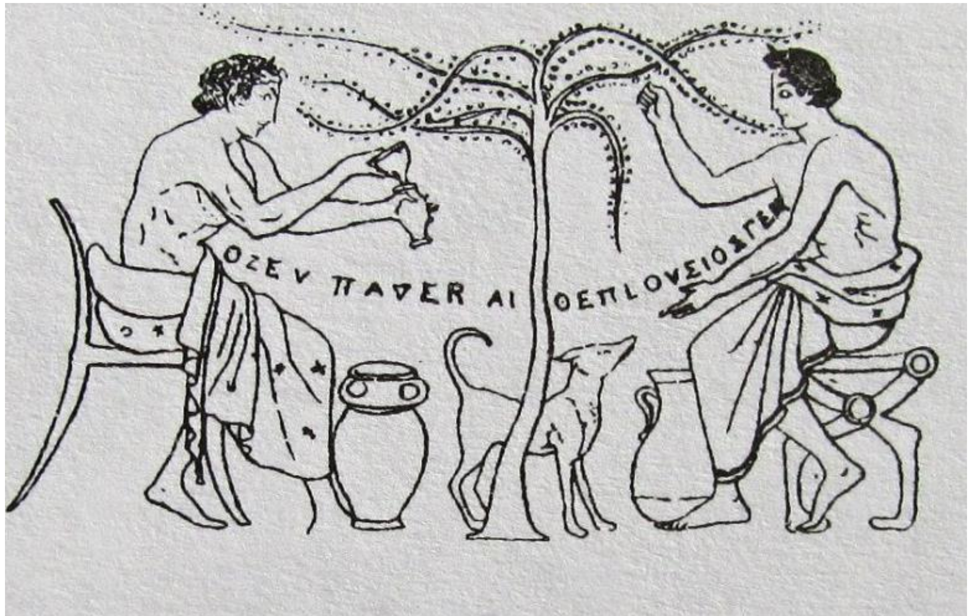
Οι εργάτες έπρεπε να κατανεμηθούν σε ομάδες εργασίας και να πληρωθούν σε είδος .

Οι σπόροι και οι καρποί-τρόφιμα έπρεπε να μετρηθούν να αποθηκευτούν και να μοιραστούν για να χρησιμοποιηθούν με κατάλληλο τρόπο στη σπορά. ή για να δοθεί σε κάθε ένα η κατάλληλη ποσότητα τροφίμων.



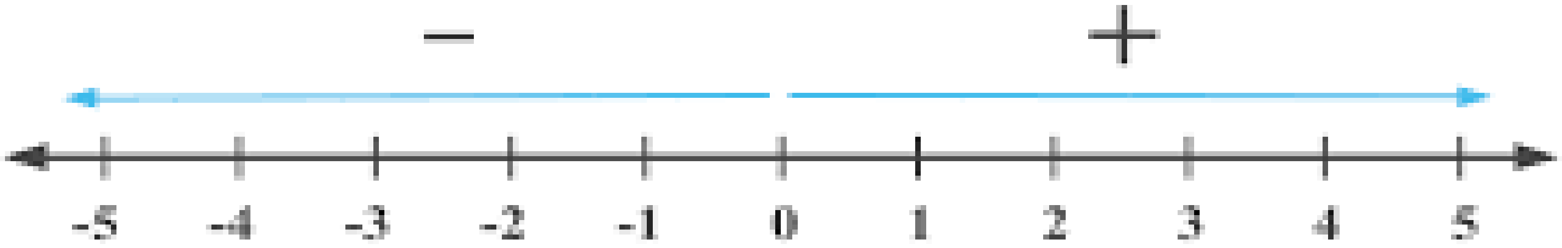
ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ (ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ)

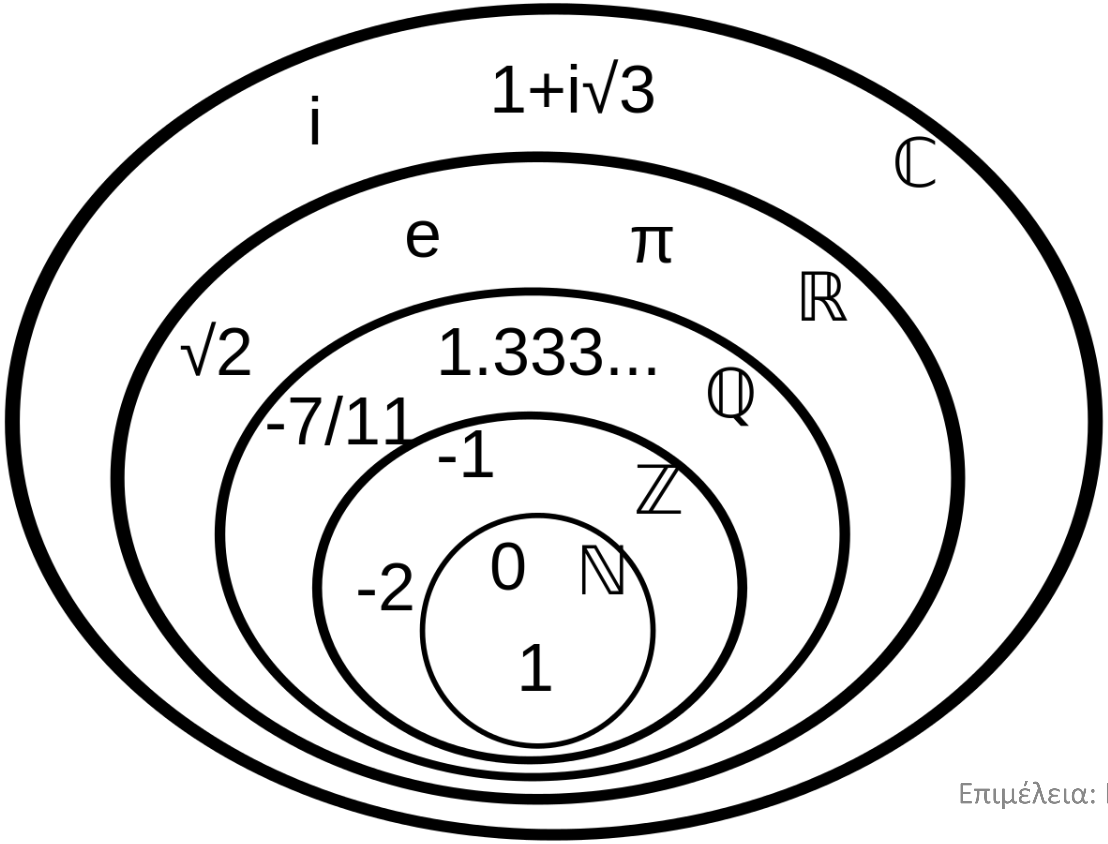
- Η απλή καταμέτρηση δεν επαρκούσε πλέον για την καταμέτρηση του συσσωρευμένου πλούτου αλλά και για την εξυπηρέτηση του εμπορίου που είχε αρχίσει να αναπτύσσεται.
- Έτσι υπάρχει έντονη πλέον η ανάγκη ανάπτυξης μιας επιστήμης με κανόνες αριθμητικών υπολογισμών.



Πωλητές ἐλαίου

ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΝΟΜΟΙ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

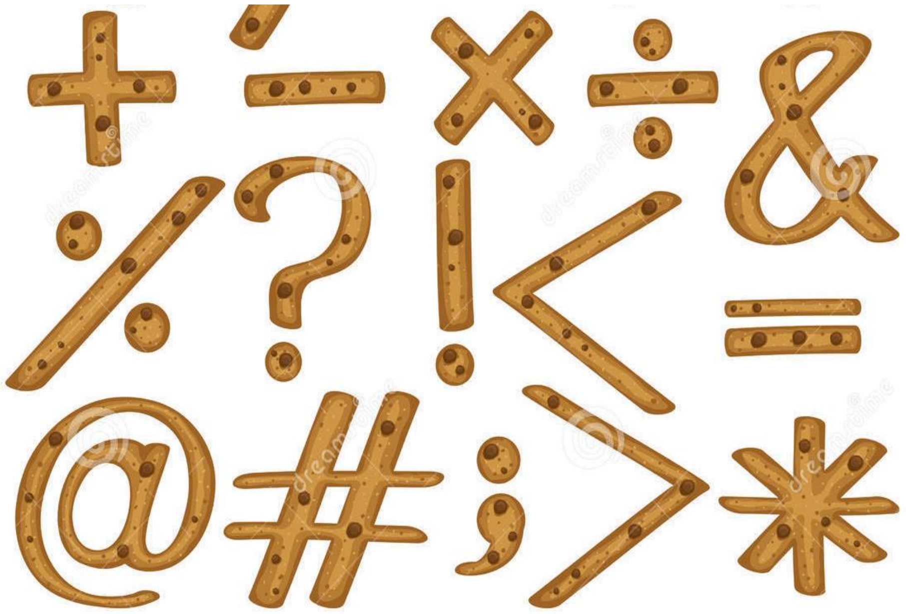




Οι αριθμοί και η χρήση τους προέκυψαν σαν ανάγκη περιγραφής της φυσικής πραγματικότητας αλλά και για να εξυπηρετήσουν τις διαρκώς αυξανόμενες ανάγκες των ανθρώπων.

Έτσι αναπτύχθηκε σταδιακά και η επιστήμη τους (αριθμητική) και οι κανόνες-νόμοι της.

Η σημερινή τους μορφή είναι αποτέλεσμα μιας εξέλιξης χιλιετιών και σαν μία μορφή επικοινωνίας αποτελούν βασικό στοιχείο της γλώσσας και του πολιτισμού μας στην ανάπτυξη του οποίου έπαιξαν έναν πολύ σημαντικό ρόλο.

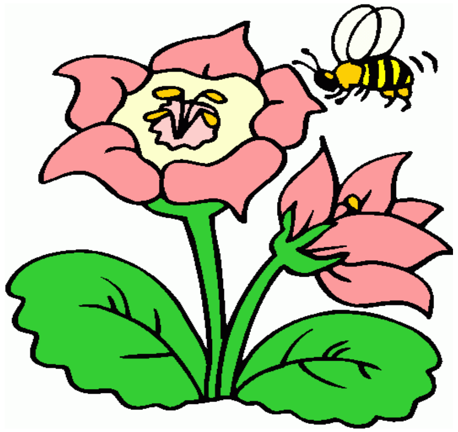


Επιμέλεια: Βανταράκης Νίκος - Μαθηματικός

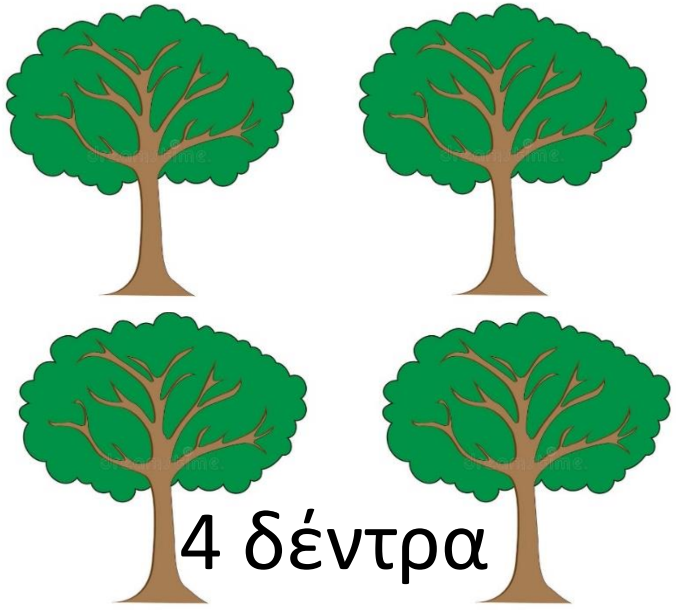
ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

(αυτοί που μετρούν φυσικά αντικείμενα)

- Οι ανάγκες των «πρώτων» ανθρώπων τους οδήγησαν αρχικά να μετρούν τα φυσικά διακριτά αντικείμενα και γι αυτό οι πρώτοι αριθμοί που επινοήθηκαν ήταν οι 1, 2, 3, 4, 5, 6, κ.τ.λ που σήμερα αποκαλούμε Φυσικούς αριθμούς.
- Πράγματι, στην απαρίθμηση φυσικών αντικειμένων είναι αυτοί που χρειάζονται. Π.χ :



1 λουλούδι

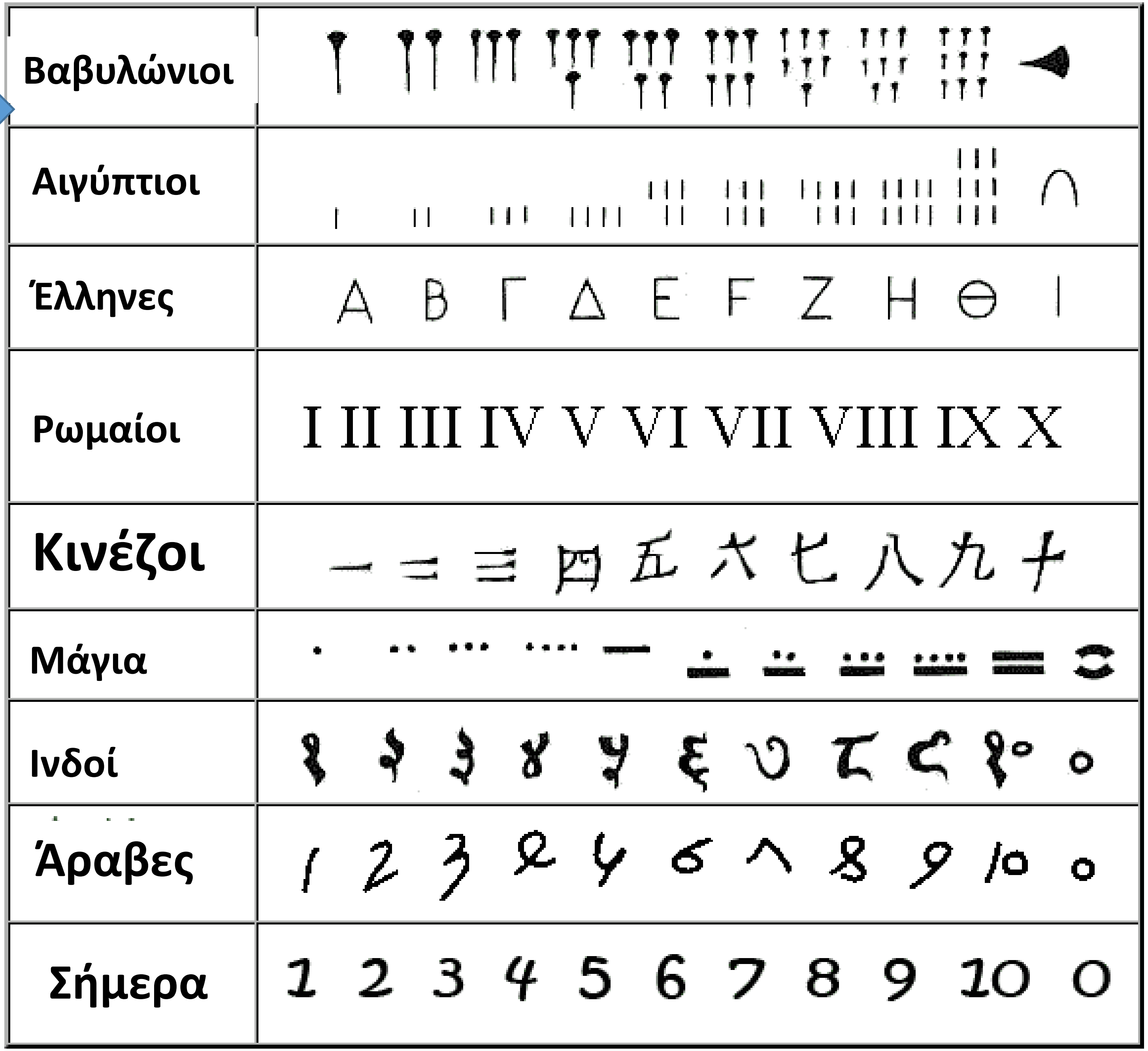


4 δέντρα

5 ελάφια

• Φυσικοί αριθμοί - Ν

Πως όμως προέκυψαν και οι υπόλοιποι αριθμοί (αρνητικοί , κλάσματα , ρητοί , άρρητοι κ.τ.λ) που χρησιμοποιούμε σήμερα στην πορεία του χρόνου ;



Ο αριθμός 0 και η έννοια του τίποτα

- Η έννοια του μηδενός χρησιμοποιήθηκε πολύ αργότερα σε υπολογισμούς από τους Ινδούς που το συμβόλιζαν με μια τέλεια.
- Οι αρχαίοι Έλληνες ταύτιζαν το 0 με την έννοια του «τίποτα» αλλά θεωρώντας το ασαφές ποτέ δεν το δέχθηκαν σαν αριθμό . Η αξία του αναγνωρίστηκε αργότερα στην ανάπτυξη της άλγεβρας από τους Άραβες .
- Κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι την έννοια του μηδενός την πήραν οι Ινδοί από τους αρχαίους Έλληνες. Είναι γεγονός πως το μηδέν εμφανίζεται το 2^{o} μ.Χ αιώνα σε ένα έργο του μαθηματικού Πτολεμαίου με το γράμμα «**ο**» (το πρώτο γράμμα της ελληνικής λέξης «ουδέν») .

Μαζί λοιπόν με το 0 έχουμε το σύνολο των Φυσικών αριθμών που σήμερα συμβολίζεται με το γράμμα Ν (Nature)

Ν={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …}

Σύντομα η ιστορία των αρνητικών αριθμών

- Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, επηρεασμένοι από την Πλατωνική αντίληψη της σύνδεσης των αριθμών με γεωμετρικά μεγέθη θεωρούσαν αδύνατους τους υπολογισμούς με αρνητικούς αριθμούς.
- Ο Διόφαντος (250 μ.Χ) πρακτικά αναφέρεται στους αρνητικούς ορίζοντας το « αρνητικό» σαν «αυτό που υπολείπεται». Θεώρησε μάλιστα ότι εξισώσεις όπως η $4χ+20=0$ έχουν λύση, που όμως είναι μη αποδεκτή ($χ=-5$)
- Οι Κινέζοι πρωτοπορώντας είχαν επινοήσει μια υπολογιστική μηχανή για αντιμετώπιση καθημερινών προβλημάτων στην οποία χρησιμοποιούσαν κόκκινες και μαύρες ράβδους για να ξεχωρίζουν τους θετικούς από τους αρνητικούς αριθμούς.
- Οι Ινδοί από τον 7ο αιώνα, φαίνεται να χρησιμοποιούν τους αρνητικούς, σε εμπορικά προβλήματα με έλλειμμα (χρέος). Δεν χρησιμοποιούσαν το – στους αρνητικούς, αλλά τον αριθμό μέσα σε κύκλο π.χ. ©= -C

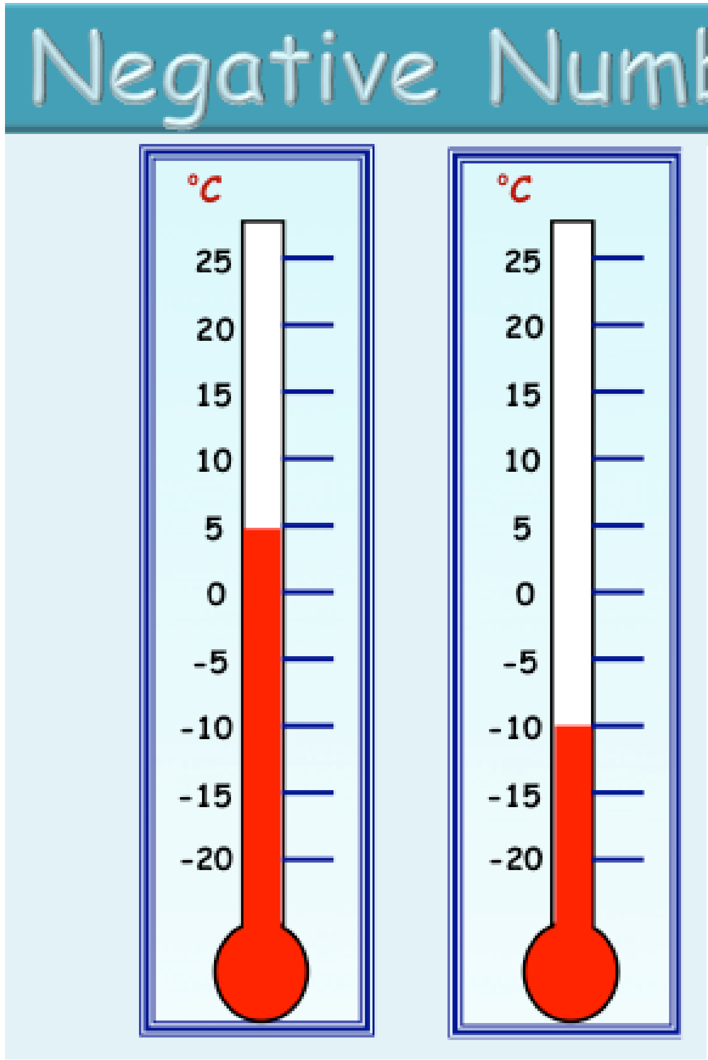
Τον $9^{ο}$ αιώνα οι Άραβες τοποθετούσαν τον κύκλο πάνω από τον αριθμό.

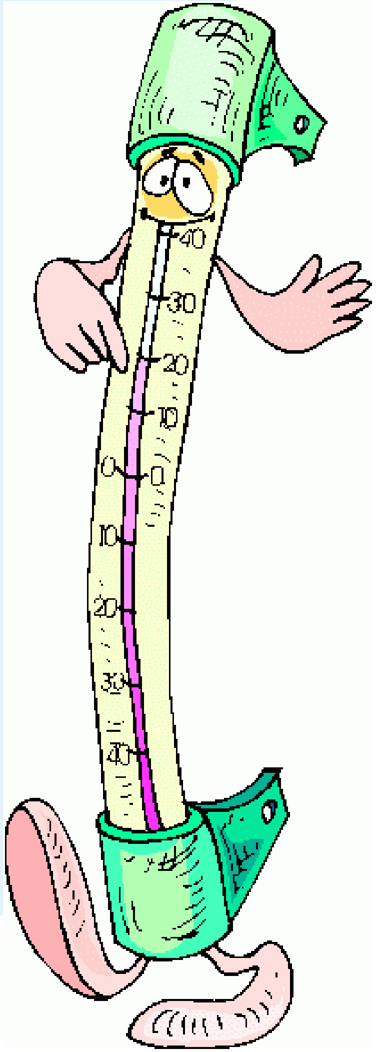
- Ο πιο γνωστός αστρονόμος και μαθηματικός της αρχαίας Ινδίας είναι ο Βραχμαγκούπτα) που γεννήθηκε στο 592 π.Χ
- Έγραψε κανόνες για υπολογισμούς με αρνητικούς αριθμούς και με το μηδέν ενώ οι Ευρωπαίοι χρειάστηκαν πολλούς αιώνες για να αποδεχθούν και τους αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν.
- Έγραφε ο Βραχμαγκούπτα:

«Το χρέος μείον το μηδέν είναι ένα χρέος.
Η ιδιότητα μείον μηδέν είναι ιδιοκτησία.
Το μηδέν μείον το μηδέν είναι μηδέν.
Το χρέος που αφαιρείται από την αρχή είναι ιδιοκτησία.
Το ακίνητο που αφαιρείται από το μηδέν είναι χρέος.»
Και ούτω καθεξής.

Ο συμβολισμός των πρόσημων πλην (-) και συν (+) ξεκίνησε από εμπόρους του $15^{ου}$ αιώνα στην Γερμανία σε αποθήκες με εμπορεύματα , όταν τα κοντέινερ της εποχής είχαν περισσότερο ή λιγότερο φορτίο από το προβλεπόμενο.

Οι αρνητικοί αρχίζουν να κερδίζουν έδαφος από το $16^{ο}$ αιώνα και μετά , με πρώτο τον Καρτέσιο να τους αναγνωρίζει σαν μη απορριπτόμενες λύσεις εξισώσεων. Τον 19ο αιώνα έχουμε τελικά την πλήρη αποδοχή και μελέτη των ιδιοτήτων των αρνητικών.



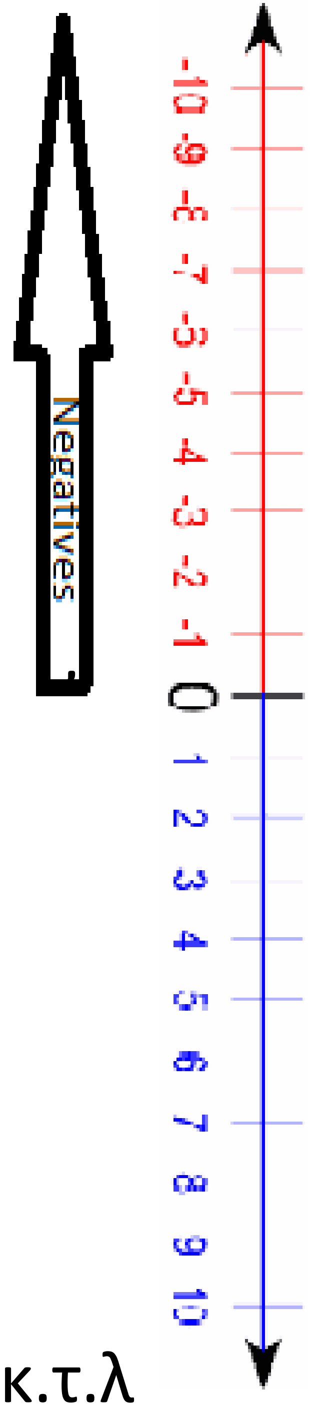


Ο συμβολισμός του συνόλου των ακεραίων με το γράμμα **Z** οφείλεται στο αρχικό της λέξης **Zahl** που στα γερμανικά σημαίνει *αριθμός*.

ΑΚΕΡΑΙΟΙ

- Όλοι οι φυσικοί μαζί με τους αντίθετους τους αρνητικούς αποτελούν μαζί μια νέα μεγαλύτερη ομάδα αριθμών.
- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών.
- Z= {…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …}

Πρακτικά θα λέγαμε σχετικά με τους αρνητικούς ότι π.χ ο -2 αποτελεί την «άρνηση- του 2 λειτουργώντας με ίδιο ποσοτικά τρόπο προς «αντίθετες κατευθύνσεις» (μία θετική(+) και η αντίθετη αρνητική (-) σε σχέση με ένα αρχικό σημείο ή ποσό αναφοράς.
Π.χ 2 βαθμοί θερμοκρασίας πάνω(+) ή κάτω(-) από το 0, ή 100 m πάνω(+) ή κάτω (-)από την επιφάνεια της θάλασσας , περίσσευμα –έλλειμα κ.τ.λ



Υπάρχουν και άλλοι αριθμοί ανάμεσα σε δύο ακεραίους;

- **Η εμφάνιση των Ρητών Αριθμών**
- Ήδη και πριν από την διαμάχη για την ύπαρξη των αρνητικών αριθμών, είχαν δημιουργηθεί και αρκετά ακόμα ερωτήματα από μαθηματικούς από τα αρχαία χρόνια.
- Οι Φυσικοί Αριθμοί αρκούσαν για τον υπολογισμό των φυσικών αντικειμένων, όμως δεν ήταν ικανοί να καλύψουν τις μαθηματικές ανάγκες των διαρκώς αυξανόμενων υπολογιστικών διαδικασιών.
- Υπήρχαν ερωτήματα όπως   π.χ: υπάρχουν και αν ναι πόσοι και ποιοι ακριβώς αριθμοί ανάμεσα π.χ στο «0» και στο «1» και πως θα τους περιγράψουμε;
- Η πρώτη επαφή με τους Ρητούς Αριθμούς δεν άργησε να έρθει, με τους Αιγυπτίους και Βαβυλωνίους να «πρωτοστατούν» με αναφορές στα έργα τους από το 2000 π.Χ. αλλά και με σημαντική συνεισφορά των αρχαίων Ελλήνων.
- Όμως η αναγνώριση τους και ο τρόπος ορισμού τους άργησε να έρθει από την μαθηματική κοινότητα στη σημερινή τους μορφή.

Οι Ρητοί αριθμοί σήμερα:

- Σήμερα ονομάζουμε Ρητούς αριθμούς όσους γράφονται σαν κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους.
- Με μορφή δεκαδικού είναι οι αριθμοί που έχουν είτε πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων , ή άπειρα δεκαδικά ψηφία που όμως επαναλαμβάνονται από ένα σημείο και πέρα με κάποια περίοδο..
- Π.χ:
- $2 = {}^{2}/_{1}$
- $3\,¼ = {}^{13}/_{4}$
- $-0{,}25 = -{}^{25}/_{100}$
- 1/3 = 0,3333333333333333333333333...........
- 21324/9990 = 2,1 345 345 345 345.............

$$\text{Περιγραφή Σύνολου ρητών}$$

$$Q = \left\{ \frac{a}{\beta} \,\middle|\, \mu\varepsilon \ a\,,\,\beta \ \ \alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\upsilon\varsigma \ \kappa\alpha\iota \ \beta \neq 0 \right\}$$

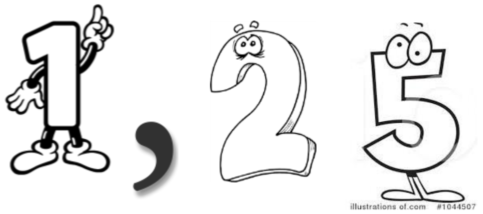
- Οι ρητοί δημιουργήθηκαν κυρίως από την ανάγκη να εκφραστεί αριθμητικά η σχέση ενός τμήματος (μέρους) μιας ποσότητας με ολόκληρη την ποσοτητα αυτή (όλον), ή γενικότερα της σχέσης μεταξύ δύο μεγεθών.
- Σήμερα ο συμβολισμός του κλάσματος εκπληρώνει με έναν τρόπο την έκφραση αυτής της σχέσης. Τί είναι όμως το κλάσμα;

<u>Η έννοια του κλάσματος ή λόγου αριθμών.</u>

Με τον συμβολισμό **α/β** του κλάσματος (**α προς β** ή λόγος των αριθμών α προς β) εννοούμε τον <u>αριθμό</u> που προκύπτει από την διαίρεση **α : β**

Έτσι π.χ αφού 5:4=1,25

ο $\frac{5}{4} = 1,25$

Αυτό σημαίνει ότι  =  × 

ο 5 είναι 1, 2 5 φορές ο 4

Γιατί όμως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\frac{\alpha}{\beta}$

Το κλάσμα π.χ $\frac{5}{4} = 1,25$

με τον τρόπο που συμβολίζεται μας δείχνει εκτός από τον αριθμό με τον οποίο είναι ίσο (εδώ τον 1,25) ταυτόχρονα και την **σχέση που συνδέει δύο αριθμούς ή δύο ποσότητες** (εδώ το **5** και το **4**) .

Δηλαδή ότι ο **4** «χωράει» **1,25** φορές στον **5** ή ισοδύναμα ότι

ο **5** είναι **1,25** φορές ο **4**.

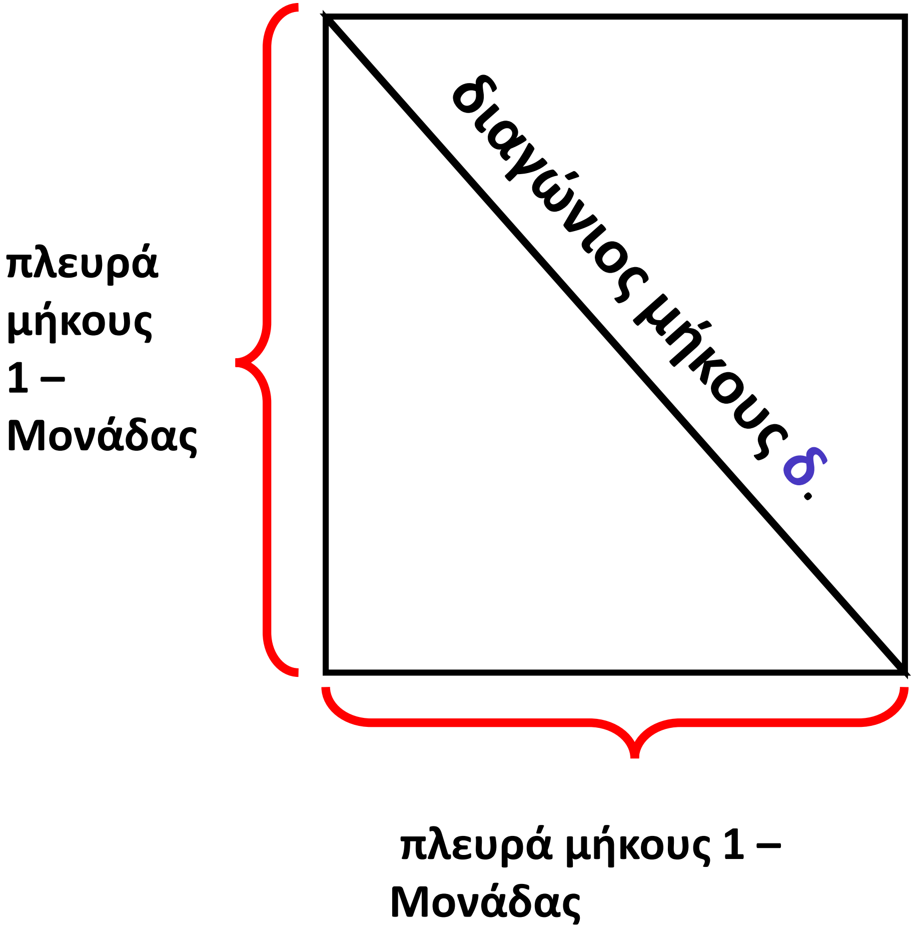
Παρατήρηση: Ουσιαστικά και ο κάθε φυσικός και δεκαδικός αριθμός π.χ ο **5** δείχνει την σχέση του με την μονάδα δηλαδή το 1 (δηλ. πόσες μονάδες περιέχει ή από πόσες μονάδες ή μέρη της αποτελείται).

Έτσι π.χ ο **5** = 5/1 (5 μονάδες) ή το **1,25** περιέχει 1 μονάδα και 25/100 της.

<u>Υπάρχουν</u> όμως και κάποιοι μυστηριώδεις αριθμοί που δεν μπορούμε να «πούμε» ποιοι ακριβώς είναι.

- Οι Φυσικοί και οι Ακέραιοι μαζί με τους Ρητούς αριθμούς που σαν ένα ευρύτερο σύνολο τους περιέχουν μπορούσαν ανταποκρίνονται αρκετά καλά στις υπολογιστικές ανάγκες.
- Υπήρχαν όμως άλυτα ερωτήματα που δεν μπορούσαν να αντιμετωπιστούν ούτε από αυτά τα σύνολα αριθμών που αρχικά φαινόταν να περιλαμβάνουν όλους τους υπάρχοντες αριθμούς .
- Π.χ μπορούσαν άραγε σε κάθε περίπτωση όλες οι ποσότητες να μετρηθούν ταυτόχρονα με κάποια κοινή μονάδα μέτρησης ώστε από την μέτρηση αυτή να προκύπτει μία σχέση που να μπορεί να περιγραφεί από έναν ρητό αριθμό ; *(ρητός= αυτός που μπορεί να λεχθεί)*

Από την αρχαιότητα είχε αποδειχθεί από τη σχολή του Πυθαγόρα αυτό που σήμερα ονομάζουμε η αρρητότητα της τετραγωνικής ρίζας του 2.



Συγκεκριμένα σε ένα τετράγωνο με πλευρές π.χ μήκους μίας μονάδας δηλ μήκους 1 (όποιο μήκος και αν επιλεγόταν σαν μονάδα) η σχέση μήκους διαγωνίου **δ** και της πλευράς δεν ήταν δυνατό να υπολογιστεί με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα σαν σχέση δύο φυσικών. Δηλαδή $\boldsymbol{\delta^2}= 1^2+1^2$ ή $\boldsymbol{\delta^2} =2$ Άρα ο αριθμός **δ** ή όπως θα γράφαμε σήμερα **δ/1** που το τετράγωνο του ήταν ίσο με 2 (σημερινή τετραγωνική ρίζα του 2) δεν προέκυπτε σαν σχέση δύο φυσικών αριθμών δηλαδή δεν ήταν ρητός.

Επιμέλεια: Βανταράκης Νίκος - Μαθηματικός

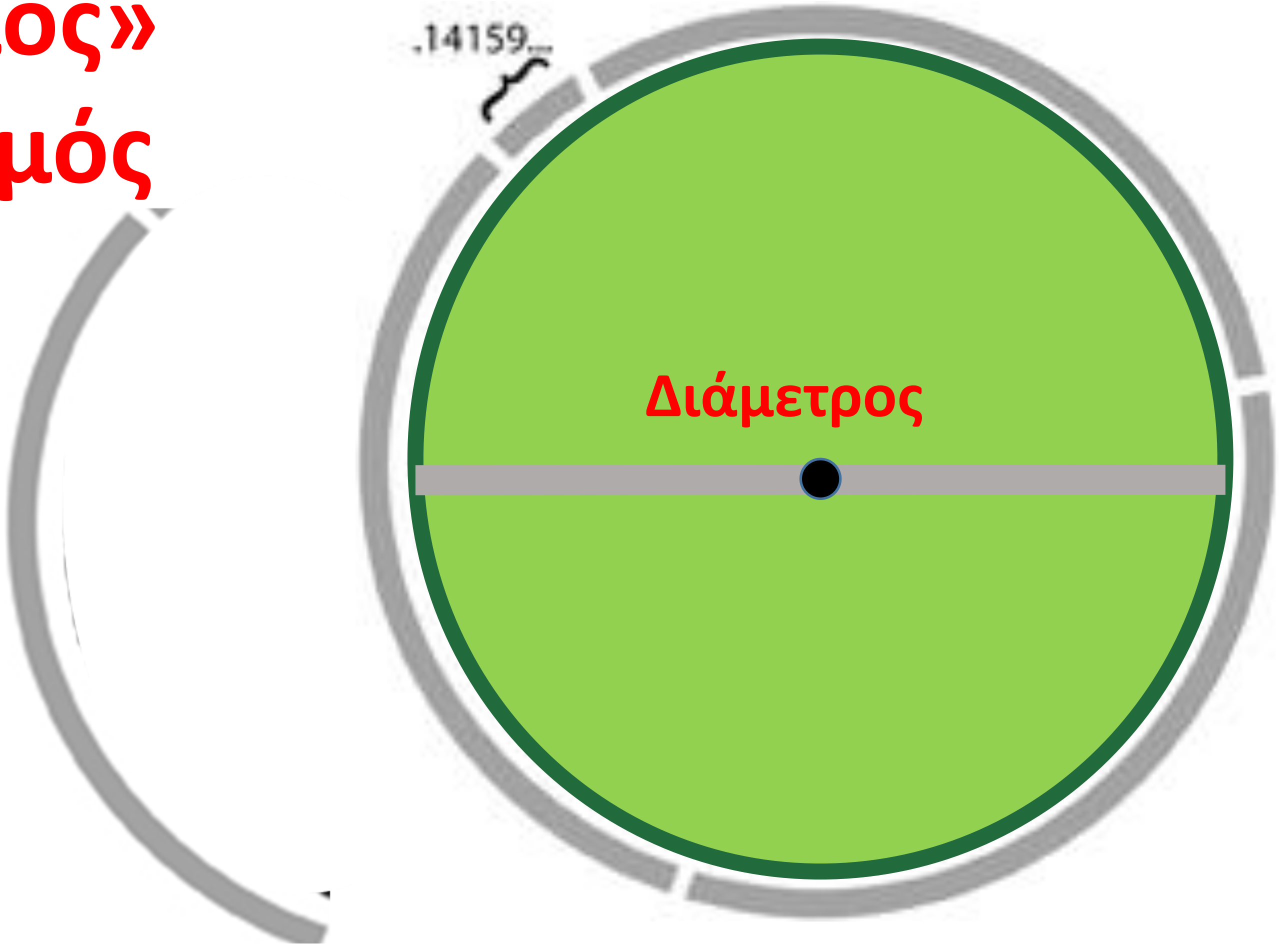
- Οι Πυθαγόρειοι παρ΄όλο που ανακάλυψαν τους άρρητους δεν μπορούσαν να δεχθούν την ύπαρξη τους γιατί αυτή ανέτρεπε την φιλοσοφία τους που είχε βάση ένα κόσμο που τα πάντα περιγράφονται από ρητές σχέσεις (με φυσικούς αριθμούς).
- Το πρόβλημα του τι είναι άρρητος αριθμός και η αποδοχή της ύπαρξης τους παρέμεινε άλυτο και έπρεπε να περάσουν πάνω από δύο χιλιετίες ώστε οι ΄Αρρητοι Αριθμοί να αναγνωρισθούν, από μια σειρά πρωτοπόρων μαθηματικών τον 19ο αιώνα και να συμπληρώσουν αυτό που σήμερα λέμε σύνολο των Πραγματικών αριθμών.

Άρρητοι αριθμοί

- Σήμερα λέμε ότι Άρρητοι είναι οι αριθμοί που **<u>δεν μπορούν</u>** να γραφούν σαν κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιο αριθμό (δηλαδή όχι ρητοί).
- Με μορφή δεκαδικού οι άρρητοι έχουν **<u>άπειρα ακανόνιστα</u>** δεκαδικά ψηφία (που δεν επαναλαμβάνονται έστω από ένα σημείο και πέρα με κάποιο επαναλαμβανόμενο (περιοδικό) τρόπο. Π.χ:
- √2 = 1.4142135623……….
- π = 3.141592653………
- -45,949256345768112902……..

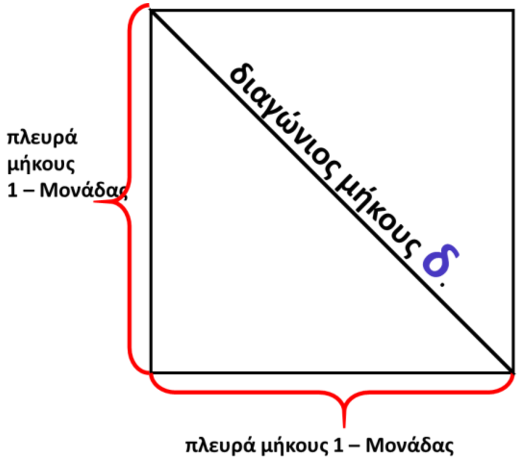
Οι άρρητοι είναι λοιπόν κάποιοι μυστηριώδεις αριθμοί που δεν μπορούμε να τους προσδιορίσουμε ακριβώς.

Ένας «διάσημος» άρρητος αριθμός

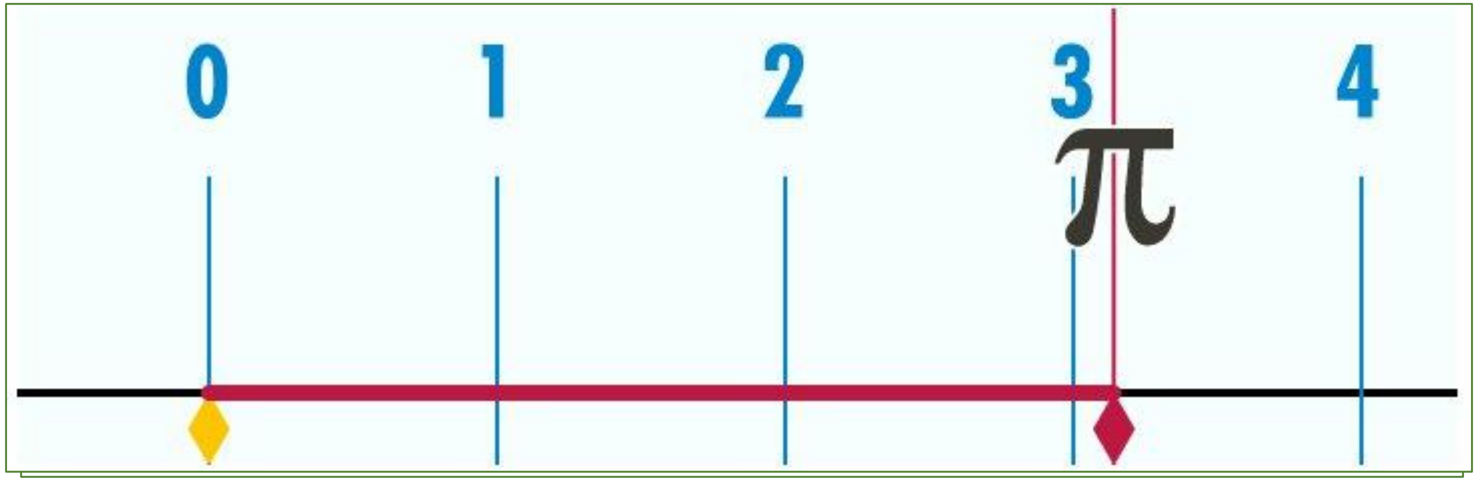


η μαθηματική σταθερά **π** είναι ο πραγματικός αριθμός, που προκύπτει από το λόγο-πηλίκο της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν λοιπόν ασχοληθεί με τη αδυναμία να μετρηθεί "ακέραια" η διαγώνιος ενός τετραγώνου από την πλευρά του.

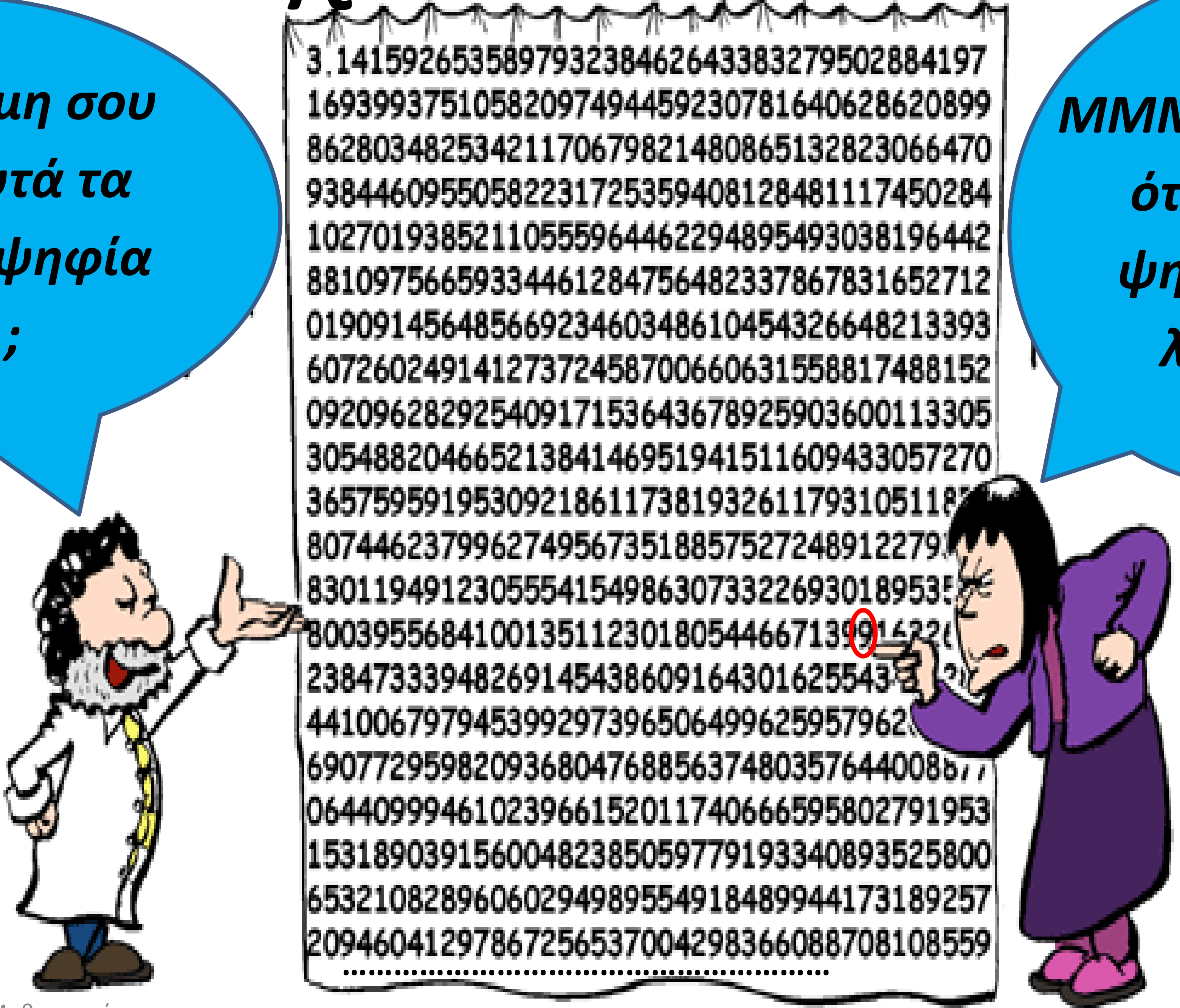


Επίσης είχαν εντοπίσει ότι η σχέση διαμέτρου ενός κύκλου και του μήκους της περιφέρειας του δεν μπορούσε να εκφραστεί σαν σχέση δύο φυσικών. Δηλαδή πρακτικά με σημερινούς όρους το πηλίκο (περιφέρεια : διάμετρος) δεν ήταν κάποιος ρητός αριθμός και άρα υπήρχαν μετρήσεις που τα αποτελέσματα τους δεν μπορούσαν να εκφραστούν-νομιμοποιηθούν σαν αριθμοί.



π=

Ποια η γνώμη σου για όλα αυτά τα ατελείωτα ψηφία του π ;

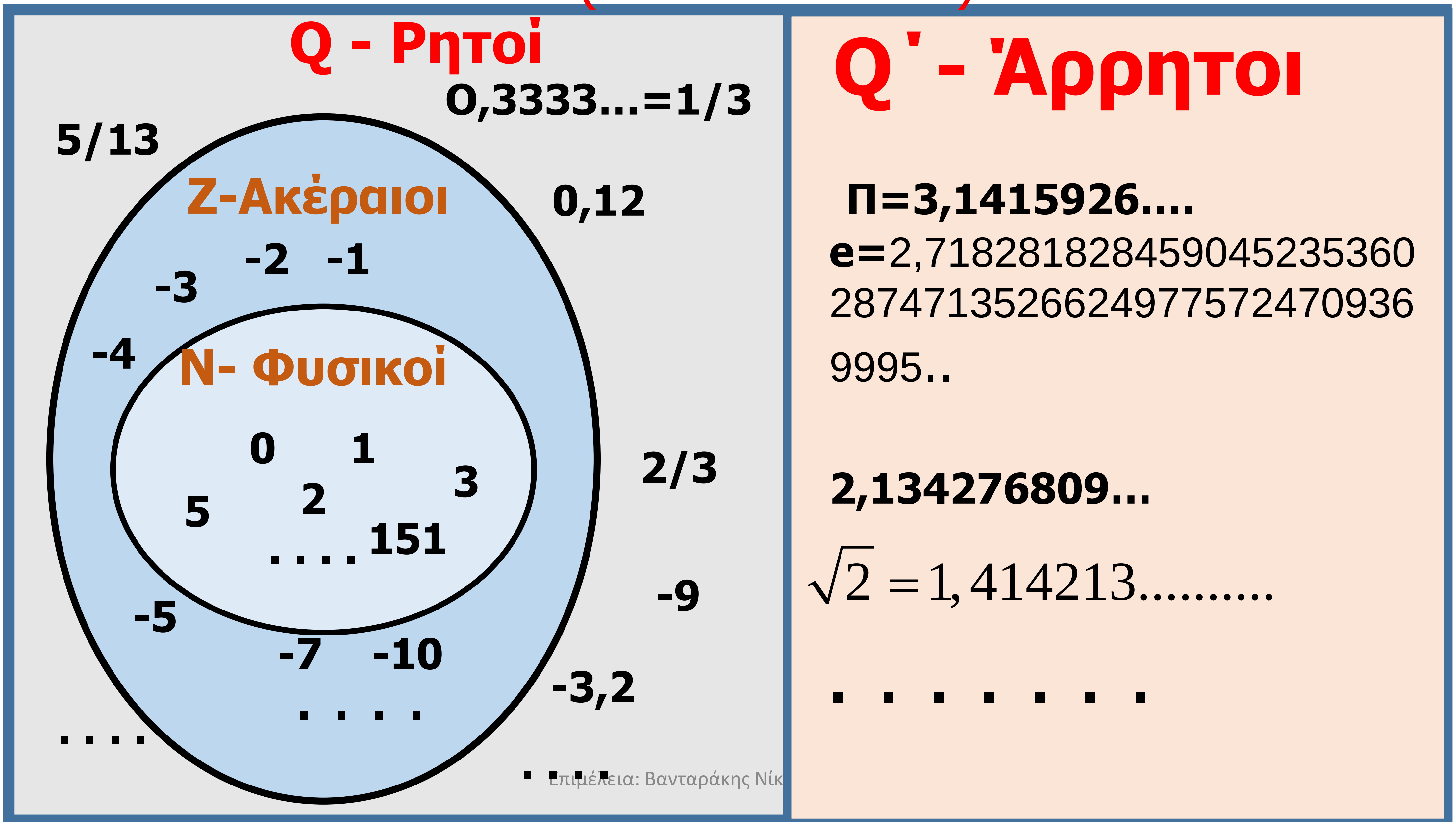


ΜΜΜ..... Νομίζω ότι αυτό το ψηφίο είναι λάθος!!!

Επιμέλεια: Βανταράκης Νίκος - Μαθηματικός

Σύνολο Πραγματικών αριθμών

R (Real numbers)



Σήμερα χρησιμοποιούμε το δεκαδικό **θεσιακό** σύστημα που διευκολύνει τον συμβολισμό και τις πράξεις μεγάλων αριθμών κάτι που δεν μπορούσαν να κάνουν τα παλαιότερα αριθμητικά συστήματα .
Έτσι χρησιμοποιούμε στην παράσταση των αριθμών και των πράξεων μόνο δέκα ψηφία (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0) που η θέση κάθε ενός από αυτά στον αριθμό δείχνει την «αξία του» σε 1άδες-10άδες – 100άδες ή δεκαδικές υποδιαιρέσεις του1 κτλ.

Π.χ ο αριθμός 2 3 0 4 , 6 περιλαμβάνει :

Χιλιάδες 2 ή 2.1000=2000 μονάδες

Εκατοντάδες 3 ή 3 . 100=300 μονάδες

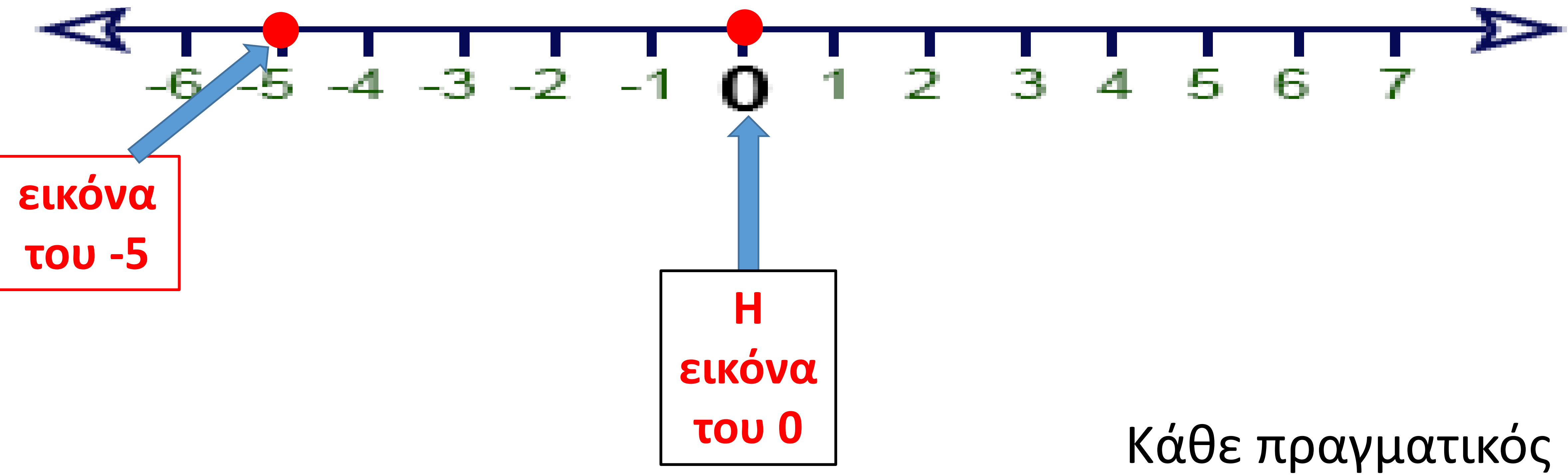
Δεκάδες 0 (καμία) ή 0 . 10= 0 μονάδες

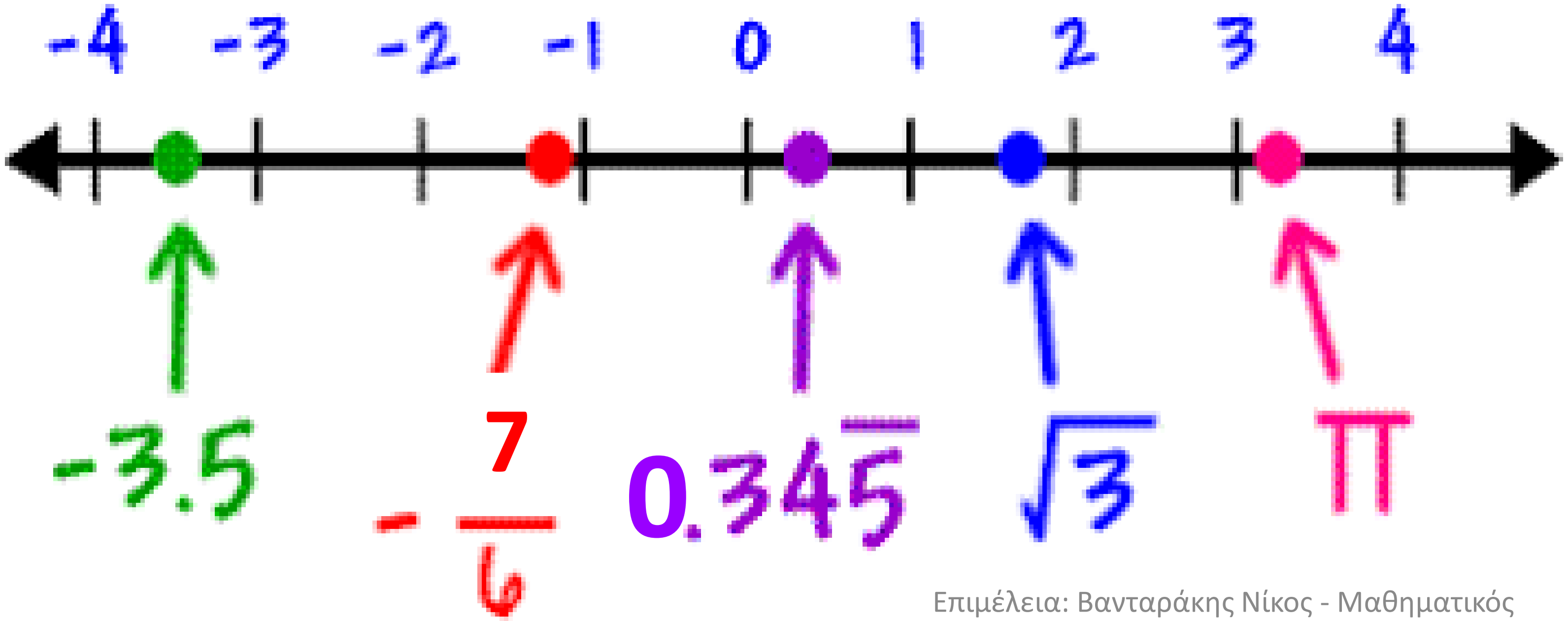
Μονάδες 4

Δέκατα μονάδας 6
6 . 1/10= 6/10 μονάδας

Κινούμενοι προς τα δε αριστερά η αξία κάθε θέσης πολ/ζεται επί 10

Ο ΄Αξονας των πραγματικών αριθμών. Μια «φωτογραφία-εικόνα» του R





Κάθε πραγματικός αριθμός εικονίζεται σαν ένα μοναδικό σημείο πάνω στον άξονα (ευθεία) των πραγματικών αριθμών αλλά και αντίστροφα.

Τι μας δείχνει αριθμητικά ο συμβολισμός του κλάσματος και οι ονομασίες που χρησιμοποιούμε-γραφική εξήγηση

κλάσμα

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

Αριθμητής: (αριθμεί – μετράει τα μέρη μιας μονάδας)

Παρονομαστής: (δίνει όνομα-ονομάζει – με βάση σε πόσα μέρη χωρίζουμε την μία μονάδα

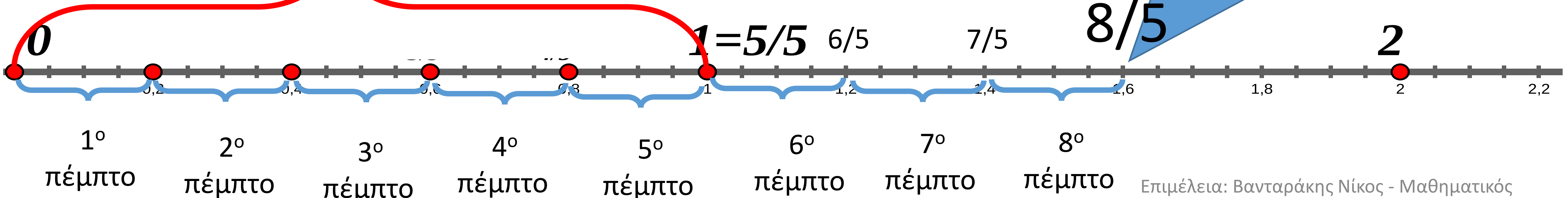
Μετράμε – αριθμούμε 2 από τα 5 αυτά ίσα μέρη (πέμπτα) της μονάδας **ξεκινώντας από το 0** προς στη θετική κατεύθυνση

Χωρίζουμε μία μονάδα σε 5 ίσα μέρη (5 - πέμπτα)

$\frac{2}{5}$ =0,4 που στο 10δικό σύστημα σημαίνει 0 μονάδες και 4 δέκατα της μονάδας

Ομοίως το 8/5 δείχνει 8 πέμπτα της μονάδας ή σε δεκαδική μορφή 1,6 δηλ. 1 μονάδα και 6 δέκατα της μονάδας

1 – Μονάδα. (στο δεκαδικό μας σύστημα η μονάδα και κάθε μικρότερη υποδιαίρεση της χωρίζεται σε 10 ίσα μέρη)



Επιμέλεια: Βανταράκης Νίκος - Μαθηματικός

Με βάση το παρακάτω σύνολο αριθμών συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε ποια γνωστά σύνολα αριθμών ανήκει κάθε στοιχείο του.

$$\left\{-100, -\frac{2}{5},\ \ 0,33333.......\ ,\ -2,3454678701.....\ ,0\ ,\pi\ ,6\ ,913\ ,\sqrt{3}\ ,\ -1,25\right\}$$

Φυσικοί αριθμοί	$6,\quad 0,\quad 913$
Ακέραιοι	$-100,\ 0,\ 6,\ 913$
Ρητοί αριθμοί	$-100,\ -\frac{2}{5},\ 0,\ 6={}^{12}\!/_{2}\ ,\ 0,333...={}^{1}\!/_{3}\ ,-1,25$
Άρρητοι	$\pi\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ -2,3454678701......,-\sqrt{15}\ ,...$
Πραγματικοί αριθμοί	Όλοι οι αριθμοί

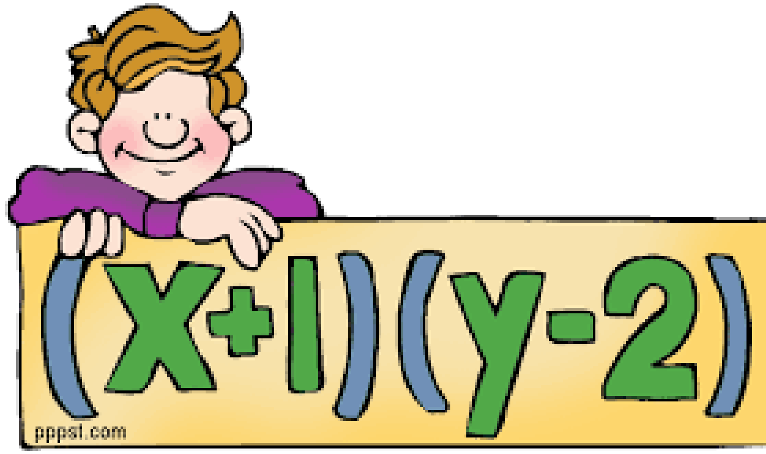
ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Η αριθμητική είναι η επιστήμη των ακεραίων αριθμών , ενώ η άλγεβρα η επιστήμη των πράξεων με άγνωστες ποσότητες και των εξισώσεων.

Ο Διόφαντος (250 μ.χ) ορίζει την άγνωστη ποσότητα ως *«περιέχουσα απροσδιόριστον ή μη ορισμένο πλήθος μονάδων»* *και χρησιμοποιεί το σύμβολο «ς» για να την αναπαραστήσει.*

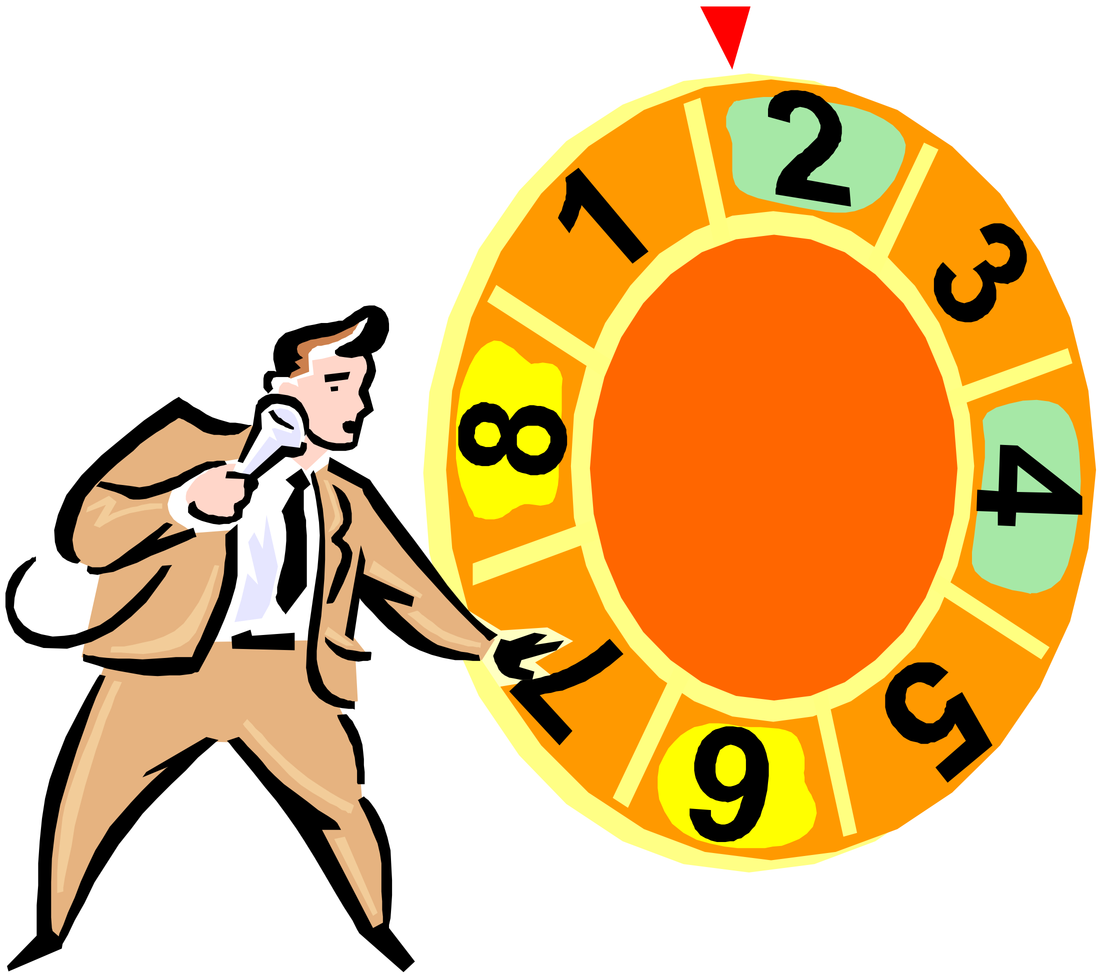
*(Λέγεται ότι το τελικό «ς» αποτελεί μια συντομογραφία της λέξης **αριθμός** χρησιμοποιώντας το τελευταίο γράμμα της.)*

Είναι ιστορικά ο πρώτος συμβολισμός του αγνώστου αριθμού στην ιστορία των μαθηματικών. Αντιστοιχεί στο χ της σύγχρονης Άλγεβρας.



Ιδιότητες πράξεων

- Οι **νόμοι** στους οποίους πρέπει να υπακούει η οποιαδήποτε απλή ή περίπλοκη διαδικασία μίας ή περισσοτέρων μαζί πράξεων αριθμών, για να δίνει πάντα το ίδιο σωστό αποτέλεσμα.



ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

(Με ποια σειρά κάνουμε πράξεις σε μία παράσταση)

Υπολογισμός παρενθέσεων – αγκυλών (από μέσα προς τα έξω).

Υπολογισμός δυνάμεων (γινόμενα του ίδιου αριθμού π.χ $α^4=α.α.α.α$).

Πολλαπλασιασμοί - Διαιρέσεις.

Προσθέσεις – αφαιρέσεις

Η πρόσθεση και η αφαίρεση γίνεται πάντα μεταξύ ομοίων όρων – ποσοτήτων.

Π.χ α+α=2α ενώ α+χ= ; ή π.χ δεν μπορώ να αφαιρέσω από 5 θρανία 2 καρέκλες

Προσεταιριστική ιδιότητα

Στην πρόσθεση: $(a+b)+c=a+(b+c)$

Στον πολλαπλασιασμό: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

Η προσεταιριστική ιδιότητα σε μία πράξη επιτρέπει, όταν συνδέονται πολλοί αριθμοί με την πράξη αυτή, να μην αλλάζει το αποτέλεσμα από τον τρόπο που τους ομαδοποιούμε (δηλ. μπορεί να προηγηθεί η πράξη μεταξύ οποιωνδήποτε γειτονικών αριθμών), αρκεί να μην αλλάξει η σειρά τοποθέτησης τους(διάταξη) .

-3.(5.6) = (-3.5).6 = **-90**
(-5 +7) + 3 = -5 + (7 + 3)= **5**
$(q+3)+17=q+(3+17)=q+20$
$4\cdot(0,25.m)=(4\cdot0,25).m=\ m$

Αντιμεταθετική ιδιότητα

Στην πρόσθεση: $a+b=b+a$

Στον πολ/σμό : $a \cdot b = b \cdot a$

Η αντιμεταθετική ιδιότητα αν ισχύει σε μία πράξη επιτρέπει, να μην μας ενδιαφέρει εκτελώντας την πράξη αυτή η σειρά μεταξύ δύο αριθμών αφού δεν αλλάζει το αποτέλεσμα: Π.χ 3. (-5) =(-5) .3 = -15

΄Αρα μπορούμε να αλλάζουμε την σειρά δύο γειτονικών αριθμών που συνδέονται με την πράξη αυτή χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμα (τηρώντας πάντα την προτεραιότητα των πράξεων)

$5+y= y+5$
$8 \cdot z = z \cdot 8$
$t+12= 12+t$
$m \cdot r = r \cdot m$

Η αντιμεταθετική **δεν ισχύει** :

στην **Αφαίρεση** αφού 3-5= -2 ενώ 5-3 =2

στην **Διαίρεση** αφού 4 : 2= 2 ενώ 2:4=0,5

Επιμεριστική ιδιότητα

- Ο Πολ/σμός λειτουργεί **επιμεριστικά** πάνω στην πρόσθεση - αφαίρεση

$$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$$

$$\alpha.(\beta-\gamma)=\alpha.\beta-\alpha.\gamma$$

$5\cdot(x+y)=5x+5y$
$-3(2+7x)= \; -6-21x$
$4(x+6y-2z)=4x+24y-8z$
$-(4-k).7= \; (-4+k).7=-28+7k$

$$\pi.\chi \; -3(2+7)=-3.9=-27$$

$$-3(2+7)=-3.2+(-3).7=-6-21=-27$$

Η επιμεριστική ιδιότητα συνδέει δύο πράξεις (Πολλ/σμό με πρόσθεση ή αφαίρεση) επιτρέποντας να «ανοίξουμε» μία παρένθεση

Γενικότερα στην επιμεριστική ιδιότητα ισχύουν:

$\alpha.(\beta \pm \gamma) = \alpha.\beta \pm \alpha.\gamma$ ή $(\beta \pm \gamma).\alpha = \beta.\alpha. \pm \gamma.\alpha =$

$= \alpha.\beta \pm \alpha.\gamma$

$$\boxed{\text{Άρα} \quad \alpha.(\beta \pm \gamma) = (\beta \pm \gamma).\alpha = \alpha.\beta \pm \alpha.\gamma}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: Π.χ $6(10 - 8) - 12 = 6.2 - 12 = 12 - 12 = 0$

(Η επιμεριστική δεν είναι απαραίτητη αφού μπορούμε να κάνουμε τις πράξεις στην παρένθεση)

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση: $6(\chi - 2) - 12 =$

(εδώ η επιμεριστική είναι απαραίτητη και μας βοηθά να «ανοίξουμε» την παρένθεση και να κάνουμε στη συνέχεια πράξεις)

Έτσι : $6.(\chi - 2) - 12 = \quad 6\chi - \cancel{12} + \cancel{12} = 6\chi$

Αντίθετοι αριθμοί

<u>Αντίθετοι αριθμοί</u>: Για κάθε αριθμό **α** υπάρχει ένας άλλος μοναδικός αριθμός που ονομάζεται <u>αντίθετος</u> του **α** ώστε να έχουν άθροισμα 0. *Ο αντίθετος του α* συμβολίζεται ως ***–α***

$$a+\left(-a\right)=-\alpha+\alpha=0$$

Προσοχή: Ὅταν μπαίνει το πρόσημο (–) μπροστά από έναν αριθμό α δηλ. γράφοντας **-α** σημαίνει ότι έχουμε **τον αντίθετο του α** και όχι ότι ο **- α** είναι κατ΄ανάγκην αρνητικός αριθμός.

Έτσι αν χ αρνητικός ο –χ είναι θετικός π.χ αν χ=-3 τοτε –χ=–(-3)=3

Προφανώς ο αντίθετος του –α είναι ο α **-(-α)=α**

Η ουδετερότητα του 0 στην πρόσθεση

$$a+0=a \quad και \quad 0+a=a$$

το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο στην πρόσθεση

Η παντοδυναμία του 0 στον πολ/σμό

$$a.0=0 \quad και \quad 0.a=0$$

το 0 απορροφά κάθε στοιχείο στον πολ/σμό

Η διαίρεση με το 0 είναι αδύνατη

$$\alpha : 0 = \text{αδύνατο} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{0} \text{ δεν έχει νόημα.}$$

- *Το μηδέν είναι:*
  - *αδύναμο στην πρόσθεση*
  - *παντοδύναμο στον πολλαπλασιασμό*
  - *απαγορευμένο στη διαίρεση*
  - *εκκεντρικό στις δυνάμεις.*

Βασικός περιορισμός : Ποτέ δεν πρέπει ο παρονομαστής ενός κλάσματος να είναι ίσος με 0. Αρα όταν δίνεται ένα κλάσμα **α/β** υποχρεωτικά πρέπει να θεωρούμε ότι $\boldsymbol{\beta \neq 0}$

Η ουδετερότητα του 1 στον πολ/σμό

Πολλαπλασιασμός: $a \cdot 1 = a \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 1 \cdot a = a$

το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο στον πολ/σμό (δεν αλλάζει την αξία ενός αριθμού με τον οποίο πολ/ζεται)

Αντίστροφοι αριθμοί λέγονται δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1.

Ο αντίστροφος ενός αριθμού χ **συμβολίζεται** με $\dfrac{1}{\chi} \left(\mu\varepsilon \ \ \chi \neq 0 \right)$

$$\chi \cdot \frac{1}{\chi} = \frac{1}{\chi} . \chi = 1 \quad \mu\varepsilon \quad \chi \neq 0$$

Π.χ αντίστροφος του 2 είναι το ½ ,του -2/3 το -3/2, του -1 το -1 κ.τ.λ

Ο μόνος αριθμός που δεν έχει έχει αντίστροφο είναι το 0 (γιατί;)

Εφαρμογές ιδιότητων πράξεων πραγματικών αριθμών

$7(a+b)=7a+7b$	Επιμεριστική
$12+y=y+12$	Αντιμεταθετική στην πρόσθεση
$-4\cdot(\chi\cdot 6)=-4(6.\chi)=(-4.6).x=-24\chi$	Αντιμεταθετική-Προσεταιριστική στον πολ/σμό
$6+(z+2)=6+(2+z)=(6+2)+z=8+z$	Αντιμεταθετική- προσεταιριστική στην πρόσθεση
$3\left(\frac{1}{3}\right)=1$	Γινόμενο αντίστροφων
$(7\cdot y)\cdot 10=10\cdot(7\cdot y)=(10.7)y=70.y$	Αντιμεταθετική και προσεταιριστική στον πολ.σμό

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ

Επιμέλεια: Βανταράκης Νίκος - Μαθηματικός

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Μια σημαντική παρατήρηση

Αν σε κάποια πράξη μεταξύ ενός πλήθους αριθμών ισχύει <u>και η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα</u> μπορούμε να κάνουμε την πράξη αυτή μεταξύ <u>οποιονδήποτε</u> δύο από αυτούς τους αριθμούς και με <u>όποια σειρά θέλουμε</u>.

Αυτό ισχύει π.χ στην πρόσθεση και τον πολ/σμό.

Π.χ $(2+3)+(5+(-7)) = 2+3+5+(-7) = 3+(-7)+5+2 = ...$

Στην περίπτωση αυτή οι παρενθέσεις που δηλώνουν προτεραιότητα δεν είναι απαραίτητες.

Εννοείται ότι αν έχουμε περισσότερες από δύο πράξεις πρέπει να τηρείται η προτεραιότητα πράξεων και να παίρνουμε υπ΄όψιν τις παρενθέσεις .

Έτσι π.χ : $3+(\alpha+\beta)+2+2.\alpha = 3+\alpha+\beta+2+2.\alpha = 3+2+\beta+\alpha+2.\alpha = 5+\beta+3\alpha$

ή : $-2.(3.\alpha).(-3).\alpha.\beta = -2.3.\alpha.(-3).\alpha.\beta = -2.3.(-3).\alpha.\alpha.\beta = 18.\alpha^2.\beta$

<u>Η έννοια του γενικού αριθμού - χρήση γραμμάτων και παρενθέσεων σε αλγεβρικές παραστάσεις</u>

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

Α) Με γράμματα συμβολίζουμε συνήθως με γενικό τρόπο κάποιους αριθμούς.

Β) Αλγεβρικές παραστάσεις είναι παραστάσεις που περιέχουν πράξεις και μαθηματικούς υπολογισμούς με γενικούς αριθμούς (μεταβλητές)

Γ) Οι γενικοί αριθμοί σε αλγεβρικές παραστάσεις μπορεί να παίρνουν διάφορες τιμές (μεταβλητές) . Οι τιμές αυτές μπορεί να είναι οποιεσδήποτε ή να υπόκεινται σε κάποιους περιορισμούς (π.χ αν είναι στη θέση παρονομαστή δεν μπορεί να είναι ίσοι με 0). Π.χ $2χ+ψ$ ή $\frac{α.β}{α-3}$

Δ) Σε μία μαθηματική σχέση (π.χ μια ισότητα – εξίσωση) μπορεί να ζητείται να βρούμε ποια τιμή πρέπει να πάρουν κάποιοι γενικοί αριθμοί (άγνωστοι) ώστε αυτή να ισχύει(π.χ $2χ+1=3$) , είτε να θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτή η σχέση ισχύει γενικά για διάφορες τιμές των μεταβλητών(π.χ $αβ(β-2)-2αβ=αβ^2$).

Ας δούμε τι μπορεί να μας δείχνει μία αλγεβρική παράσταση

Σε αυτήν την παράσταση υπάρχουν δύο γενικοί αριθμοί α,β που στη θέση τους μπορούμε να βάλουμε οποιονδήποτε αριθμό εκτός από 3 στη θέση του α (γιατί;)

$$\frac{\alpha.\beta}{\alpha-3}$$

Περιγράφει μια διαδικασία πράξεων

Πολλαπλ/ζουμε τον α με τον β και βρίσκουμε έναν **<u>νέο αριθμό</u>** τον (**α.β**)

Αφαιρούμε από τον α το 3 και βρίσκουμε ένα **<u>νέο αριθμό</u>** τον (**α.-3**)

Διαιρούμε τον α.β με τον α-3 και βρίσκουμε **<u>τον αριθμό</u>**

$$\frac{\alpha,\beta}{\alpha-3}$$

Επομένως μία αλγεβρική παράσταση παριστάνει και μια διαδικασία πράξεων αλλά ταυτόχρονα συμβολίζει και μπορεί να θεωρηθεί συνολικά και σαν ένας αριθμός που είναι το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων.

Παρενθέσεις με αλγεβρικές παραστάσεις

Γνωρίζουμε ότι σε μια διαδικασία πράξεων με βάση την προτεραιότητα πράξεων προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις θεωρώντας όποτε μας διευκολύνει μια αλγεβρική παράσταση σε παρένθεση π,χ (2.3-8) ή την (2.α-5) σαν έναν αριθμό, όπως και πράγματι είναι αν θεωρηθεί σαν το αποτέλεσμα των πράξεων που περιγράφει.

Έτσι π.χ 6 (2.3 – 8) -12 = 6 . (6-8) - 12 =6.(-2) -12 = - 12-12=-24

Τι συμβαίνει όμως αν οι παραστάσεις στις παρενθέσεις είναι αλγεβρικές και δεν υπάρχει δυνατότητα πράξεων ;

Π.χ 3. (2α-8) - 6.α (εδώ δεν μπορώ να κάνω την πράξη 2.α -5 ούτε την πράξη 2.α ή -4.α αφού δεν ξέρω την τιμή του α (γενικός αριθμός-μεταβλητή)

Στην περίπτωση αυτή για να προχωρήσουμε τους υπολογισμούς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες των πράξεων αριθμών.

Ας δούμε πώς γίνεται αυτό .

$6.(2\alpha-8). -12.\alpha = 6.(2.\alpha)-6.8 -12.\alpha = (6.2).\alpha- 48 -12.\alpha = 12.\alpha-48 -12.\alpha=$

Εφαρμόζουμε επιμεριστική ιδιότητα θεωρώντας το 2.α έναν αριθμό (πρακτικά έτσι «ανοίγουμε» την παρένθεση και «απελευθερώνουμε τους αριθμούς που περιέχει).

Με προσεταιριστική ιδιότητα μπορούμε να φέρουμε «κοντά» τους 6 και 2

Κάνουμε την πράξη 6.2=12

$12.\alpha -12.\alpha-48 = \cancel{12}.\alpha -\cancel{12}.\alpha-48 = 0 - 48= - 48$

Εφαρμόζουμε αντιμεταθετική και προσεταιριστική και φέρνουμε κοντά τα 12α και -12α

Εφαρμόζουμε το άθροισμα αντιθέτων

Έχουμε προχωρήσει υπολογισμούς δίνοντας απλούστερη μορφή στην αρχική παράσταση