ΑΣΚΗΣΗ ΗΜΕΡΑΣ (73)

$f: R \to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in R$ επιπλέον ισχύει : $\int_{-1}^{1} 2x f'(x)dx = -4 - \int_{-1}^{1} x^2 f''(x)dx$

α. Να δείξετε ότι $f'(1) - f'(-1) = -4$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ. Έστω G αρχική της f και $g(x) = G(x) - G(4-x)$, $x \in R$

I. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

II. Να δείξετε ότι : $2g(3) > g(4) + g(2)$.

ΑΣΚΗΣΗ ΗΜΕΡΑΣ (74)

$f: R \to R$ τέτοια ώστε : $f(x) = e^{-x} - \int_{-1}^{0} e^{x+1} f(x)dx$

I. Να δείξετε ότι η $f(x) = e^{-x} - 1$, $x \in R$

II. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

III. Έστω $g(x) = f(x) - f^{-1}(x) = e^{-x} - 1 + \ln(x+1)$

ⓐ. Να δείξετε ότι η g είναι $\downarrow$ στο $(-1, +\infty)$

ⓑ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, τον $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

IV. (α) Να δείξετε ότι η $f(x) = e^{-x} - 1$ τέμνει την $y = -\frac{1}{x}$ σε ένα ακριβώς $x_0 \in (0, +\infty)$

ⓑ να δείξετε ότι $x_0 > 1$

(γ) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την $y = -1/x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x = x_0$ είναι $E(x_0) = \frac{1}{x_0} - x_0 + \frac{1}{e} + \ln x_0$.