Άσκηση ημέρας (71)

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και F η παράγουσα της στο $\mathbb{R}$:

$F(0) = \frac{1}{4}$, $F(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και $(x^2+4) \cdot f(x) = (x^2+4) F(x) - 2x F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η $F(x) = \dfrac{e^x}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$

β. Να δείξετε ότι η F είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της F^{-1}.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - \ln(x^4+4) < 1 - \ln 5$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$F\left(F(x) - \frac{1}{5e^{-1}} + 2\right) = \frac{1}{8e^{-2}}.$$

Άσκηση ημέρας (72)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = -1$, παραγωγίσιμη:

$e^{x+1} \cdot (1 + f'(x)) = \dfrac{2x}{e^{f(x)}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και G αρχική της f στο $\mathbb{R}$.

I. (α) Να δείξετε ότι η $g(x) = e^{f(x)} \cdot e^{x+1} - x^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

(β) Να δείξετε ότι η $f(x) = \ln(x^2+1) - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

II. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $f\left(\dfrac{x^4+2x^2+2}{x^2+6x+10}\right) = f\left(e^{x^2-x+2}\right)$.

III. Να δείξετε ότι η f έχει 2 σημεία καμπής και στη συνέχεια, ότι οι εφαπτόμενες σ' αυτά τέμνονται στον $y'y$.

IV. Να δείξετε ότι: $x \cdot G(x) + G(x^3) < (x+1) \cdot G(x^2)$, $\forall x > 1$