

### Ασκηση Ημερας (57)

Εστω  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη ζ.ω:

$$(f'(x) - \frac{1}{x}) \cdot (f(x) - \ln x) = x, \quad \forall x > 0$$

$$\ln f(1) + f(1) - 1 = 0$$

I. Να βρείτε το  $f(1)$ .

II. Ν.δ.ο. η  $f(x) = x + \ln x, x > 0$

III. Χρησιμοποιώντας την γνωστή ανισότητα:  $\ln x \leq x - 1, \forall x > 0$   
να δείξετε ότι  $\ln 2 < \frac{2}{e}$  και στη συνέχεια ότι  
η τρίωστη  $f(x) = \frac{x}{e} + 2$  έχει μια τονλάχιστον  
ρίζα στο  $(2, e)$ .

IV. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι αναστρέψιμη και να  
λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(x) = x$ .

### Ασκηση Ημερας (58)

Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με  $f(0) = 1$  και  
 $f'(x) \cdot (x^2 + 1) + 2x \cdot f(x) = (x^2 + 1) \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

I. Ν.δ.ο.  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

II. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονotonία.

III. Να βρείτε την  $f''(x)$  και να δείξετε ότι έχει  
μια τονλάχιστον ρίζα στο  $(-1, 1)$ .

IV. Να λύσετε την εξίσωση:  $e^{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+3)^2 + 1}{16x^2 + 1}$