ΑΣΚΗΣΗ ΗΜΕΡΑΣ (55)

Εστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ε.ω. $f(0)=2$, $g(x)=f(x)-\sqrt{x^2+x+4}$

και $\left| f(x) - f(y) - \sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{y^2+y+4} \right| \leq (x-y)^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

α. Ι ν.δ.ο η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ΙΙ. ν.δ.ο η $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$, $x \in \mathbb{R}$

β. Ι. να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

ΙΙ. να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$.

ΙΙΙ. να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+x^2 ημ\frac{1}{x}}{x f(x) - x^2 + συν x}$.

γ. Εστω $h(x)=x^2$, $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την $φ = h \circ f$ και ν.δ.ο υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της $φ$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων τις οποίες να βρείτε.

ΑΣΚΗΣΗ ΗΜΕΡΑΣ (56)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(0)=2$ κ $f'(x)=2f(x)-4x$, $x \in \mathbb{R}$

Α. Ι. ν.δ.ο η $g(x)=(f(x)-2x-1)e^{-2x}$ είναι σταθερή.

ΙΙ. ν.δ.ο η $f(x)=2x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

Β. Ι. ν.δ.ο η εξίσωση $e^{f(x)} = \dfrac{1}{x^2}$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(\frac{1}{e}, 1)$.

ΙΙ. Εστω $h(x)=e^x$ και $φ(x) = -\dfrac{1}{x}$ ν.δ.ο έχουν 1 τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

Γ. Υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) \cdot ημ\dfrac{2022}{f(x)} + \dfrac{ημ f(x)}{f(x)} \right]$