

2^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΕΠΤΑ (7)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$, με $a\neq 0$ είναι συνάρτηση 1-1.

Μονάδες 4

A2. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα.

i. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g .

Μονάδες 3

ii. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της.

Μονάδες 2

A3. Έστω $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε μια συνάρτηση $f:\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και τότε γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A ισχύει ότι $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x \in A$.

β. Αν f, g δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$

γ. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με την γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο.

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ έχει μια μόνο θέση ολικού ελαχίστου.

ε. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 + 1$, $x \geq 1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τον άξονα συμμετρίας της με την f .

Μονάδες 7

B4. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) + \ln x = 1$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(e^x) = x - e^{-x+1} + e, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + e$, $x > 0$ *Μονάδες 3*

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. *Μονάδες 5*

Γ3. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $g(x) = \frac{e}{x}$ και $\varphi(x) = \ln(e^e x)$

Μονάδες 5

Γ4. Να βρεθεί το πρόσημο της f και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$h(x) = \ln(e - f(f(x)))$$

Μονάδες 7

Γ5. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f^{-1}(e^{x+1} + x) = e, \text{ } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x, x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{e} - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να ορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$

Μονάδες 6

Δ2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{1}{e} - e^{-x}\right), x > 0$, να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη h^{-1} .

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε τη σχετική θέση της συνάρτησης $\varphi = f + g$ ως προς τον άξονα x' .

Μονάδες 5

Δ4. Να λυθεί η ανίσωση :

$$\ln\left(\frac{x^2 + e}{x^4 + e}\right) < \frac{1}{e^{x^2 + e}} - \frac{1}{e^{x^4 + e}}$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή .

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΛΑΜΑΝΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

από τον Ιορδάνη Χ. Κοσόγλου, Msc μαθηματικό του ΓΕΛ ΑΡΙΔΑΙΑΣ



ΘΕΜΑ Α

- A1. Σελίδα 34, έτσι για παράδειγμα.....
A2. Σελίδα 25
A3. Σελίδα 31
A4. Α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2+1, x \geq 1$.

B1. Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1-1 < x_2-1$ $\stackrel{\text{θετικά τα μέλη}}{\Rightarrow}$

$$(x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Είναι $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Συνεπώς το σημείο $(1, f(1))=(1,1)$ είναι ολικό ελάχιστο της f .

*(Η γραφική παράσταση της f προκύπτει απ την x^2 με δυο μετατοπίσεις. Μια προς τα δεξιά και μια προς τα πάνω.)

B2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται.

$$y=f(x) \Leftrightarrow y-1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = \sqrt{y-1} \\ y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{y-1} \\ y \geq 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1}, x \geq 1$$

B3. Αρκεί να λυθεί η εξίσωση :

$$f^{-1}(x)=x, x \geq 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x-1} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x-1, x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ή } x-1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(1,1), (2,2)$

B4. Έχουμε , $f(x)+\ln x=1, x \geq 1$

$$(x-1)^2+\ln x=0$$

$$x=1,$$

γιατί η συνάρτηση $(x-1)^2+\ln x$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ ως άθροισμα γνησίως αυξουσών συναρτήσεων με προφανή ρίζα την $x=1$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(e^x)=x-e^{-x+1}+e, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Θέτω $u=e^x, u > 0 \Leftrightarrow x=\ln u$

$$f(u)=\ln u-e^{-\ln u+1}+e=\ln u-e^{\frac{\ln e}{u}}+e=\ln u-\frac{e}{u}+e, u > 0$$

Άρα $f(x)=\ln x-\frac{e}{x}+e, x > 0$

Γ2. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1+e < \ln x_2+e$ (1)

$$\text{Επίσης, } x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{e}{x_1} < -\frac{e}{x_2} \quad (2)$$

Από (1), (2) με πρόσθεση κατά μέλη $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty) \Rightarrow$ η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Γ3. Έχουμε , $g(x)=\varphi(x), x > 0$

$$0=\varphi(x)-g(x)$$

$$0=e+\ln x-\frac{e}{x}$$

$$0=f(x)$$

$$f(1)=f(x)$$

$$1=x$$

Γ4. Έχουμε , $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x > 1$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Είναι $D_{f \circ f} = \{x > 0 \text{ και } f(x) > 0\} = \{x > 0 \text{ και } x > 1\} = (1, +\infty)$

Επίσης, $D_h = \{x > 1 \text{ και } e - f(f(x)) > 0\} = \{x > 1, f(e) > f(f(x))\}$
 $= \{x > 1, e > f(x)\}$
 $= \{x > 1, f(e) > f(x)\}$
 $= \{x > 1, e > x\}$
 $= \{1 < x < e\}$

Γ5. Είναι, $f^{-1}(e^{x+1} + x) = e, x \in \mathbb{R}$

$$e^{x+1} + x = f(e)$$

$$e^{x+1} + x = e$$

$\rho(x) = \rho(0)$, όπου $\rho(x) = e^{x+1} + x, x \in \mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα.

$$x = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x, x > 0 \text{ και } g(x) = \frac{1}{e} - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Είναι $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) > 0\} = \left\{ \frac{1}{e} - e^{-x} > 0 \right\}$
 $= \{e^{-1} > e^{-x}\}$
 $= \{-1 > -x\} = (1, +\infty)$

Και, $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{1}{e} - e^{-x}\right), x > 1$

Δ2. Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{1}{e} - e^{-x_1}\right) = \ln\left(\frac{1}{e} - e^{-x_2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e} - e^{-x_1} = \frac{1}{e} - e^{-x_2}$$

$$-e^{-x_1} = -e^{-x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

$$\begin{cases} y = h(x) \\ x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln\left(\frac{1}{e} - e^{-x}\right) \\ x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^y + e^{-1} = e^{-x} \\ x \in (1, +\infty) \\ \frac{1}{e} - e^y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{e} - e^y\right), y < -1$$

Άρα, $f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{1}{e} - e^x\right), x < -1$

Δ3. Είναι $(f+g)(x) = \varphi(x) = \ln x + \frac{1}{e} - e^{-x}, x > 0$

Επίσης, $\varphi(1) = 0$.

Η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$ και η συνάρτηση $-e^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$.

Και έχουμε,

$$x > 1 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$$

οπότε είναι πάνω απ τον άξονα για $x > 1$ και κάτω απ τον άξονα για $0 < x < 1$

Δ4. Είναι,

$$\ln\left(\frac{x^2+e}{x^4+e}\right) < \frac{1}{e^{x^2+e}} - \frac{1}{e^{x^4+e}}, x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x^2+e) - \frac{1}{e^{x^2+e}} + \frac{1}{e} < \ln(x^4+e) - \frac{1}{e^{x^4+e}} + \frac{1}{e}$$

$$\varphi(x^2+e) < \varphi(x^4+e), \{x^2+e > 0, x^4+e > 0\}$$

$$x^2+e < x^4+e$$

$$x^2(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$|x| > 1 \Leftrightarrow$$

$$x > 1 \text{ ή } x < -1$$

Καλή συνέχεια σε όλους σας.