ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω οι συναρτήσεις f , g με πεδία ορισμού Α , Β αντίστοιχα.

ι) Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g.

Μονάδες 1

ιι) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της.

Μονάδες 4

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό .

« Κάθε συνάρτηση $f : R \to R$ που είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή με το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α).

Μονάδες 3

Α3. α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1 ;

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση f(x) με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o \in A$;

Μονάδες 3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η γραφική παράσταση της - f(x) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy΄ της γραφικής παράστασης της f(x).

β. Αν f , g δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα , τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$

γ. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με την γραφική παράσταση συνάρτησης f(x) το πολύ ένα κοινό σημείο.

δ. Η συνάρτηση $g(x) = ημx$ έχει μια μόνο θέση ολικού μεγίστου.

ε. Αν f , g δυο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι πάντα το Α∩Β.

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$ $x \neq 1$

Β1. Να προσδιορίσετε την $f \circ g$

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln(\frac{x}{1-x})$, $x \in (0,1)$ να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $φ(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in R$, να βρείτε :

α) το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της φ είναι κάτω απ την ευθεία $y = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

β) τις τιμές του $α > 0$ για τις οποίες η εξίσωση $φ(x) = \ln α$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο R

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει :

$$f(\ln x) = x - \frac{e}{\ln x} \quad , \text{όπου } x > 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - \frac{e}{x}$, $x > 0$

Μονάδες 3

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η τιμή $f^{-1}(0)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρεθεί η σχετική θέση των συναρτήσεων $g(x)= e^x$ και

$h(x) = \frac{e}{x}$, στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση :

$$e^{x^2} - e^{x^4} < \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^4+1}$$

Μονάδες 6

Γ5. Να λυθεί η εξίσωση :

$$f(\ln x+1) + e \cdot x = e^{\frac{1}{x}}$$

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -(x-1)^2 + 3$, $x \geq 1$

Δ1. Να μελετήσετε την f(x) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι η f(x) αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των f , f^{-1} με την ευθεία y=x.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τις τιμές των α , β αν ισχύει:

$$f(\ln\alpha) + f(e^{\beta} - 1) = 6 \ , \alpha > 0 \text{ και } \beta \in R$$

Μονάδες 5

Δ5. Να λυθεί η εξίσωση :

$$f(x+1) + \sigma\upsilon\nu x = 4$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή .

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΛΑΜΑΝΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

από τον Ιορδάνη Χ. Κοσόγλου, Msc μαθηματικό ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ

I like maths
Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 25 – Ορισμός.

Α2. **α)** Ψευδής

β) Αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} x, x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, x > 0 \end{cases}$ σελίδα 35-σχήμα 34.

Α3. α) σελίδα 33 ορισμός. β) σελίδα 32 ορισμός.

Α4. α)Λ β)Σ γ)Σ δ)Λ ε)Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_{f\circ g} = \{ x \neq 1 \text{και} \frac{x}{1-x} > 0 \} = \{x(1-x) > 0\} = (0,1)$

$$f\big(g(x)\big) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right),\ x \in (0,1)$$

Β2. $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$. Έστω x_1, $x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow$

$\ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \Rightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1\text{-}x_1x_2 = x_2\text{-}x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Άρα η h(x) είναι 1-1 στο (0,1) συνεπώς αντιστρέφεται.

$$\begin{cases} y = h(x) \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = \dfrac{x}{1-x} \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = x(1+e^y) \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{e^y}{e^y+1} \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow h^{-1}(y) = \frac{e^y}{e^y+1}, y \in R \quad \text{ή} \quad h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, x \in R$$

B3.

α) Αρκεί να λυθεί η ανίσωση $\varphi(x) < \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in R$.

Είναι, $2\varphi(x) < 1 \Leftrightarrow 2\frac{e^x}{e^x+1} < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

β) Για την λύση της $\varphi(x) = \ln\alpha$, οι τιμές της $\varphi(x)$ είναι το (0,1) δηλαδή το πεδίο ορισμού της h(x).

Έχουμε τουλάχιστον μια λύση αν, $0 < \ln\alpha < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < e$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Θέτω στην $u = \ln x$, $u > 0 \Leftrightarrow x = e^u$, $x > 1$

$$f(u) = e^u - \frac{e}{u}\ , \text{όπου } u > 0 \quad \text{ή} \quad f(x) = e^x - \frac{e}{x}\ , \text{όπου } x > 0$$

Γ2. Για κάθε x_1 , $x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

Επίσης , $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{e}{x_1} < -\frac{e}{x_2}$ (2)

Από (1) , (2) με πρόσθεση κατά μέλη $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty) \Rightarrow$ η f(x) είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Είναι $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 = f^{-1}(0)$.

Γ3. Παρατηρώ ότι $f(x) = g(x) - h(x)$, $x > 0$

Η f(x) όπως είπαμε στο Γ2 είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης στο Γ2 είπαμε ότι $f(1) = 0$.

Έχω $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > h(x)$,η g(x) πάνω απ την h(x) στο $(1,+\infty)$.

Έχω $0<x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < h(x)$,η g(x) κάτω απ την h(x) στο (0,1).

Για x= 1 είναι $f(1) = 0 \Leftrightarrow g(1) = h(1)$, οι συναρτήσεις τέμνονται στο (1,e).

Γ4.

$$e^{x^2} - e^{x^4} < \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^4+1} \Leftrightarrow e^{x^2+1} - \frac{e}{x^2+1} < e^{x^4+1} - \frac{e}{x^4+1}, \ x \in R$$

$f(x^2+1) < f(x^4+1)$, $\{x^2+1 > 0 , x^4+1 > 0\}$

$x^2+1 < x^4+1 \Leftrightarrow x^2(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow x^2 -1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1$ ή $x < -1$

Γ5. $f(\ln x+1) + e\cdot x = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(\ln x+1) = -e\cdot x + e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$

$$f(\ln x+1) = f(\tfrac{1}{x}), \ x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x + 1 = \frac{1}{x}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $k(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, x > \frac{1}{e}$, είναι γνησίως αύξουσα, γιατί για κάθε

$x_1 , x_2 \in (\frac{1}{e},+\infty)$ με $x_1< x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ (1)

Επίσης , $x_1< x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$ (2)

Άρα, $k(x_1) < k(x_2)$ και $k(1) = 0$,άρα μοναδική ρίζα η $x = 1$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Για κάθε $x_1 , x_2 \in [1,+\infty)$ με $x_1< x_2 \Rightarrow x_1-1< x_2 -1 \Rightarrow$

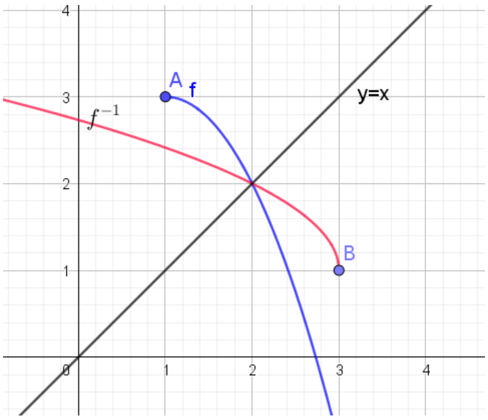
$(x_1-1)^2<(x_2-1)^2 \Rightarrow -(x_1-1)^2 > -(x_2-1)^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,άρα η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Είναι $-(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 + 3 \leq 3 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$, συνεπώς το σημείο (1,3) είναι ολικό μέγιστο της f(x).

Δ2. Η f(x) είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1 ⇒ Αντιστρέφεται.

$$y = f(x) \Leftrightarrow 3-y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{3-y} \\ y \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\sqrt{3-y} \\ y \le 3 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(x) = 1+\sqrt{3-x}$, $x \le 3$



Δ3. Για κάθε $x \in [1,+\infty)$ έχω :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -(x-1)^2+3 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 3]$ ψάχνω για κοινά σημεία y=x και $f^{-1}(x)$, έχω :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{3-x} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{3-x} \\ 1 \le x \le 3 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ 1 \le x \le 3 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Δ4. $f(x) \le 3$, $x \in [1,+\infty)$, το «=» ισχύει για $x = 1$, άρα πρέπει

$f(\ln\alpha)=3$ και $f(e^{\beta}-1)=3$, $\alpha > 0$ και $\beta \in R$

$\Leftrightarrow \ln\alpha = 1$ **και** $e^{\beta} - 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\alpha = e$ **και** $e^{\beta} = 2 \Leftrightarrow$

$\alpha = e$ **και** $\beta = \ln 2$

Δ4. f(x+1) +συνx = 4 , ορίζεται για κάθε x+1≥ 1 ⟺ x ≥ 0

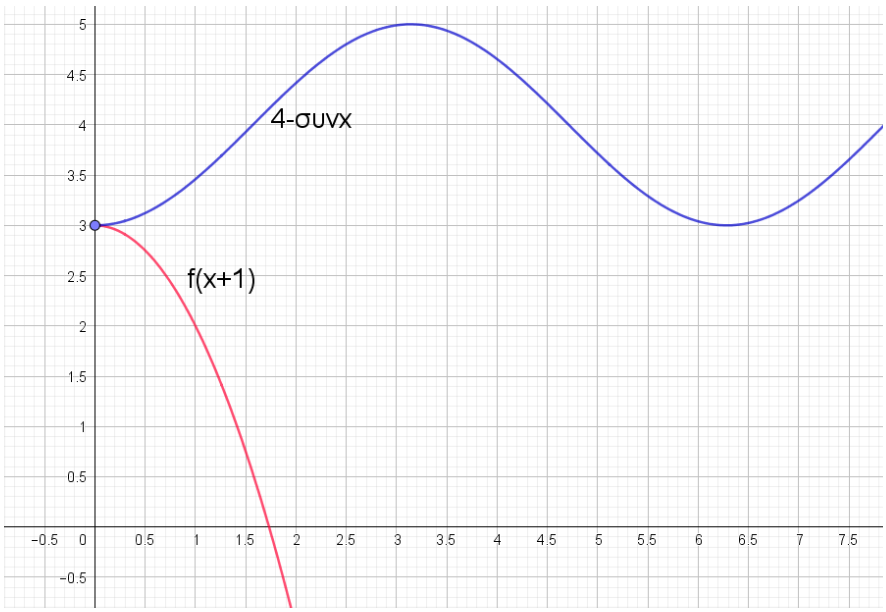
$$f(x+1) = 4\text{- συν}x\ ,\ x \geq 0$$

<u>το αριστερό μέλος</u> είναι : f(x+1) ≤ 3 , το «=» ισχύει για x+1 = 1 ή **x = 0.**

<u>Το δεξί μέλος είναι</u> : -1 ≤συνx ≤1 ⟺ -1 ≤ -συνx ≤ 1 ⟺ 3 ≤ 4-συνx ≤ 5

Άρα για κάθε x ισχύει 4 – συνx ≥ 3 , το «=» ισχύει συνx = 1 ή **x = 2κπ ,κ∈ Z**

Για κ = 0 έχω **x = 0** που είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης f(x+1) +συνx = 4



Καλή συνέχεια σε όλους σας.