Περιοδική έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου

https://mathsgymnasio.wordpress.com/

Τεύχος 1

Περιεχόμενα

Δουκάκης Σπυρίδων & Σαράφης Ιωάννης

Αθήνα, Αύγουστος 2014

Έκδοση 1.0

ISSN: 2241-9381

Πρόλογος

Η περιοδική έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου αποτελεί μία προσπάθεια δόμησης κατάλληλου διδακτικού υλικού, η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο στο πλαίσιο της σχολικής τάξης, όσο και στο σπίτι από τον ίδιο τον μαθητή και την μαθήτρια.

Το υλικό έχει αναπτυχθεί σε φύλλα εργασίας τα οποία είναι δομημένα σε μορφή δίστηλου. Τα φύλλα εργασίας περιλαμβάνουν στην αριστερή στήλη και μέσα σε κατάλληλα πλαίσια θεωρία, χρήσιμες πληροφορίες, ιστορικά σημειώματα κ.α., τα οποία χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένα εικονίδια[1] για να μπορεί ο μαθητής και η μαθήτρια να διακρίνει το στόχο τους. Στο κύριο μέρος του φύλλου εργασίας ο μαθητής καλείται να εργαστεί ατομικά ή συνεργατικά για να οικοδομήσει τις γνώσεις τους, μέσα σε ένα πλαίσιο σκαλωσιάς μάθησης, βάσει του ισχύοντος προγράμματος σπουδών, των οδηγιών διδασκαλίας, του υλικού του σχολικού βιβλίου και του υλικού του βιβλίου εκπαιδευτικού. Το υλικό συνοδεύεται από επιλεγμένα μικροπειράματα[2] που προέρχονται από το ψηφιακό σχολείο, από άλλες πηγές ή έχουν αναπτυχθεί από τους συγγραφείς. Κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ασκήσεις, που καλείται να λύσει ο μαθητής. Οι ασκήσεις έχουν αναπτυχθεί με γνώμονα τις ανάγκες της σχολικής τάξης και την εμβάθυνση των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

Τα φύλλα εργασίας και οι ασκήσεις αποτελούν μία οργανωμένη συγκέντρωση των υπαρχουσών πηγών υλικού και στοχεύουν στην υποστήριξη της μάθησης των μαθητών και στην ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης, μέσα από ένα πλούσιο σε πηγές πλαίσιο. Για το λόγο αυτό το υλικό προσφέρεται με άδεια creative commons, ώστε να είναι διαθέσιμο και «ανοικτό» σε όλη την εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα.

Το υλικό έχει δουλευτεί στις τάξεις, έχει αξιοποιηθεί από δεκάδες μαθητές και μαθήτριες και από αρκετούς εκπαιδευτικούς. Ευχαριστούμε για τη βοήθεια όλους τους συναδέλφους που μας στήριξαν σε αυτή την προσπάθεια και κυρίως τους συναδέλφους μαθηματικούς του PIERCE-Αμερικανικό Κολλέγιο Ελλάδος και της Ελληνογαλλικής Σχολής Καλαμαρί.

Το Τεύχος 1 περιέχει υλικό για τα ακόλουθα:

- **Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄ Αριθμητική-Άλγεβρα, Κεφάλαιο 1, Οι φυσικοί αριθμοί**
- **Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄ Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1, Βασικές Γεωμετρικές έννοιες**

Καλή μελέτη!

Σπυρίδων Δουκάκης & Ιωάννης Σαράφης
mathsgymnasio@gmail.com

Η αναφορά σε αυτό θα πρέπει να γίνεται ως εξής:
Δουκάκης, Σ., & Σαράφης, Ι. (2014). *Περιοδική έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου, Τεύχος 1,* (Έκδοση 1.0, σ. 64).

Ευχαριστίες στους/στις εκπαιδευτικούς: Βροντάκη Εμμανουήλ, Διαμάντη Χρήστο, Κάντα Σπυριδούλα, Μιχαλοπούλου Γεωργία και Πέρδο Αθανάσιο.

[1] Τα εικονίδια προέρχονται από το βιβλίο: Βακάλη Α., Γιαννόπουλος Η., Ιωαννίδης Ν., Κοίλιας Χ., Μάλαμας Κ., Μανωλόπουλος Ι., Πολίτης Π. (1999), *Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον*, ΙΤΥΕ, Διόφαντος.

[2] Τα μικροπειράματα προέρχονται από το Ψηφιακό σχολείο (dschool.edu.gr) και έχουν αναπτυχθεί από την ομάδα του Εργαστήριου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας με συντονιστή τον Καθ. Κυνηγό Χρόνη.

Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄: Αριθμητική – Άλγεβρα, Κεφάλαιο 1 - Οι φυσικοί αριθμοί

Κεφάλαιο 1: Φυσικοί αριθμοί

Επαναληπτικές έννοιες

~

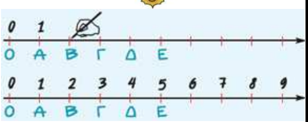
Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6......... 98, 99, 100........ 1999, 2000, 2001, ... ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί**.

Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και ένα προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.

Για τη σύγκριση των αριθμών χρησιμοποιούνται τα παρακάτω σύμβολα:
το = που σημαίνει «ίσος με», το < που σημαίνει «μικρότερος από» και το > που σημαίνει «μεγαλύτερος από».
Για παράδειγμα: 0<1<2< .... <10<11< ... <297< ... <1000< ...

Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τους άρτιους ή ζυγούς και τους περιττούς ή μονούς.

Άρτιοι λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 2, (δηλαδή διαιρούνται με το 2) και περιττοί εκείνοι που δεν διαιρούνται με το 2.



Για να τοποθετηθούν οι αριθμοί σε μία ευθεία γραμμή, φτιάχνετε μία ευθεία στην οποία τοποθετείτε αυθαίρετα στην ευθεία ένα σημείο Ο, που αποτελεί την αρχή για να παραστήσετε τον αριθμό 0. Μετά δεξιά από το σημείο Ο διαλέγετε ένα άλλο σημείο Α, που παριστάνει τον αριθμό 1. Τότε, με μονάδα μέτρησης το ΟΑ, βρίσκετε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς: 2, 3, 4, 5, ...

1. Δραστηριότητα

(α) Διαλέξτε έναν τριψήφιο αριθμό που θα έχει διαφορετικά όλα τα ψηφία του: ....

(β) Βρείτε τους έξι διαφορετικούς αριθμούς που προκύπτουν όταν εναλλάξετε τα ψηφία του αριθμού που διαλέξατε και γράψτε τους.

(γ) Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος; ....

(δ) Γράψτε όλους τους αριθμούς που βρήκατε με σειρά αύξουσα, δηλαδή από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

....

(ε) Γράψτε όλους τους αριθμούς που βρήκατε με σειρά αύξουσα, χρησιμοποιώντας κατάλληλα σύμβολα.

....

(στ) Στη συνέχεια, γράψτε τους ίδιους αριθμούς με φθίνουσα σειρά.

....

(ζ) Να προσδιορίσετε ποιοι από τους αριθμούς που έχετε σημειώσει στο ερώτημα β είναι άρτιοι και ποιοι είναι περιττοί.

Άρτιοι	Περιττοί

(η) Να τοποθετήσετε τους αριθμούς που έχετε σημειώσει στο ερώτημα β σε μια ευθεία γραμμή.

2. Να τοποθετήσετε στην ευθεία γραμμή τους αριθμούς: 370, 234, 558, 92, 703. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa11.ggb. Στη συνέχεια φτιάξτε την ευθεία των αριθμών και τοποθετήστε τους αριθμούς στο φύλλο εργασίας.

Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

~

Πρόσθεση είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς **α** και **β**, τους **προσθετέους**, υπολογίζεται ένας τρίτος φυσικός αριθμός γ, που είναι το άθροισμά τους και ισχύει: α + β = γ

Το 0 όταν προστεθεί σε ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

α + 0 = 0 + α = α

Η σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος μπορεί να αλλάζει.

Αντιμεταθετική ιδιότητα

α + β = β + α

Είναι δυνατή η αντικατάσταση προσθετέων με το άθροισμά τους ή η ανάλυση ενός προσθετέου σε άθροισμα.

Προσεταιριστική ιδιότητα

α + (β + γ) = (α + β) + γ

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, **Μ (μειωτέος)** και **Α (αφαιρετέος)** υπολογίζεται ένας αριθμός **Δ (διαφορά)**, ο οποίος όταν προστεθεί στο Α δίνει το Μ.

Μ = Α + Δ

Δ = Μ - Α

Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς **α** και **β**, τους **παράγοντες**, υπολογίζεται ένας τρίτος φυσικός αριθμός γ, που είναι το **γινόμενό** τους:

α · β = γ

Εμβαδό ορθογωνίου

Εμβαδό = β · υ

3. Δραστηριότητα

(α) Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες προσθέσεις:

9 + 3 =	3 + 9 =	7 + 5 =	5 + 7 =	8 + 4 =	4 + 8 =	6 + 6 =	0 + 1 =	0+8 =

(β) Να εντοπίσετε και να καταγράψετε από τα παραπάνω ζεύγη, το ζεύγος των αριθμών που έχει άθροισμα 12 και διαφορά 2.

....

(γ) Τι παρατηρείτε στις δύο τελευταίες προσθέσεις;

....

(δ) Τι παρατηρείτε στις δύο πρώτες προσθέσεις;

....

4. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες προσθέσεις:

(5 + 4) + 2 =	5 + (4 + 2) =	(9 + 1) + 3 =	9 + (1 + 3) =

Τι παρατηρείτε στις δύο τελευταίες προσθέσεις;

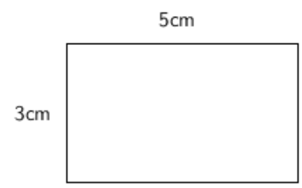
....

....

5. Σε όλο το μήκος του εθνικού δρόμου Αθήνας - Αλεξανδρούπολης υπάρχουν χιλιομετρικές ενδείξεις. Οι ενδείξεις αυτές γράφουν: στη Λαμία 214, στη Λάρισα 362, στην Κατερίνη 445, στη Θεσσαλονίκη 514, στην Καβάλα 677, στην Ξάνθη 732, στην Κομοτηνή 788 και στην Αλεξανδρούπολη 854.
Να βρείτε τις αποστάσεις μεταξύ των πόλεων:

Λαμίας και Λάρισας	Λάρισας και Κομοτηνής	Κατερίνης και Αλεξανδρούπολης

6. Ο Νέστορας και ο Μενέλαος υπολόγισαν το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκαν 15 τετραγωνικά εκατοστά. Υπολογίστε και εσείς το εμβαδόν και δώστε μια εξήγηση για το τι ακριβώς κάνατε για να το βρείτε.



....

....

....

....

- Το 1 όταν πολλαπλασιαστεί με ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.
  α · 1 = 1 · α = α
- Μπορείτε να αλλάζετε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου.
  Αντιμεταθετική ιδιότητα
  α · β = β · α
- Μπορείτε να αντικαθιστάτε παράγοντες με το γινόμενο τους ή να αναλύετε έναν παράγοντα σε γινόμενο.

Προσεταιριστική ιδιότητα
α · (β · γ) = (α · β) · γ

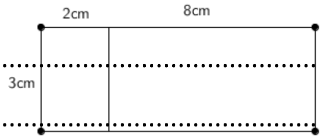
Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού **ως προς την πρόσθεση**:
α · (β +γ) = α · β + α · γ

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού **ως προς την αφαίρεση**:
α · (β - γ) = α · β -α · γ

Για να πολλαπλασιάσετε έναν αριθμό επί 10, 100, 1.000, ... γράφετε στο τέλος του αριθμού:

....
....
....
....

7. Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδόν του σχήματος.



....
....
....
....

8. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

8 · (4 + 6)	89 · (7 + 3)	7 · (6 - 4)

9. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

23 · 49 + 77 · 49	76 · 13 -76 · 3	7 · 8 - 7 · 4

10. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα για να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει:

5 · (6 + 4) = (☐ · 6) + (5 · ☐)	9 · (7 - 1) = (9 · ☐) - (☐ · 1)

11. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

6 · 53	5 · 97	7 · 402

12. Το αμφιθέατρο του Κολλεγίου έχει 29 γραμμές καθισμάτων όπου η κάθε γραμμή έχει 12 καθίσματα. Χρησιμοποιήστε την επιμεριστική ιδιότητα για να βρείτε πόσα συνολικά καθίσματα έχει το αμφιθέατρο.

....
....
....
....

13. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

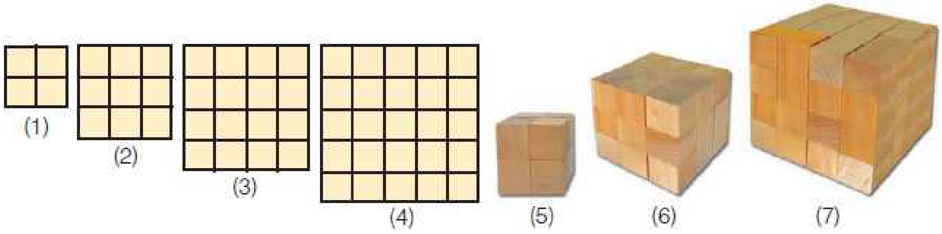
35 · 10	421 · 100	5 · 1.000	27 · 10.000

Α.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

~

14. Δραστηριότητα

(α) Από πόσα τετράγωνα αποτελούνται τα τέσσερα πρώτα σχήματα και από πόσους κύβους τα επόμενα τρία;



....

....

(β) Γράψτε το πλήθος των τετραγώνων που εντοπίσατε στο ερώτημα (α) ως γινόμενο δύο ίδιων αριθμών.

....

(γ) Γράψτε το πλήθος των κύβων που εντοπίσατε στο ερώτημα (α) ως γινόμενο τριών ίδιων αριθμών.

....

15. Να υπολογίσετε το τετράγωνο, τον κύβο, την τέταρτη, την πέμπτη και την έκτη δύναμη του αριθμού 10. Τι παρατηρείτε;

....

....

16. Γράψτε με τη μορφή των δυνάμεων τα γινόμενα:

(α) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ ....

(β) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ ....

(γ) $\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta$ ....

(δ) $\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma$ ....

(ε) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ ....

(στ) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ....

(ζ) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta$ ....

17. Κάντε τις ακόλουθες πράξεις:

(α) $2 \cdot 7^2$ ....

(β) $2 \cdot 7^2 + 3$ ....

(γ) $2 \cdot 7^2 + 3^2$ ....

(δ) $2 \cdot 7 + 3^2$ ....

(ε) $2 \cdot (7 + 3)^2$ ....

Η πρόσθεση είναι η πρώτη πράξη με την οποία ήρθατε σε επαφή.
Ακολούθησε η πράξη του πολλαπλασιασμού, όπου αναδείχτηκε πώς πρόκειται για πράξη στην οποία πραγματοποιούνται συνεχείς προσθέσεις του ίδιου αριθμού. Π.χ.
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 8 \cdot 3 = 24$
Όμως τι συμβαίνει σε ένα γινόμενο των οποίων όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι; Π.χ.
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$ ....

Το γινόμενο **$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$**, που έχει **ν παράγοντες** ίσους με το α, λέγεται **δύναμη του α στη ν** ή **νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με **α^{ν}**.

Ο **αριθμός α** λέγεται **βάση** της δύναμης και ο **ν** λέγεται **εκθέτης**.

Το **α^1**, δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι **ο ίδιος ο αριθμός α**.

Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το **1^{ν}**, είναι **όλες ίσες με 1**.

Η δύναμη του αριθμού στη δευτέρα, δηλαδή το **α^2**, λέγεται και **τετράγωνο του α**.

Η δύναμη του αριθμού στην τρίτη, δηλαδή το **α^3**, λέγεται και **κύβος του α**.

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

Η σειρά με την οποία πραγματοποιούνται οι πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση (προτεραιότητα των πράξεων) είναι η ακόλουθη:

1. Υπολογισμός δυνάμεων.
2. Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων
3. Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, χρειάζεται να εκτελέσετε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

18. Δραστηριότητα

Ο Κωστάκης, η Ρένα και ο Δημήτρης έκαναν τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση: $8 \cdot (2 \cdot 3 + 4 \cdot 6) + 5 \cdot (7 + 7 \cdot 9) + 10$ και βρήκαν ο καθένας διαφορετικό αποτέλεσμα. Ο Κωστάκης βρήκε 1.312, η Ρένα 600 και ο Δημήτρης 180.

(α) Βρείτε ποιο από τα τρία αποτελέσματα είναι το σωστό.

....

....

....

(β) Μπορείτε να προσδιορίσετε με ποια σειρά έκανε ο καθένας τις πράξεις; Ποια λάθη έγιναν στον τρόπο που πραγματοποίησαν τις πράξεις;

....

....

....

(γ) Διατυπώστε έναν κανόνα για την προτεραιότητα που πρέπει να τηρείτε, όταν κάνετε πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση.

19. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

(α) $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3 + 2)^2$	**(β)** $(2 + 3)^3 - 8 \cdot 3^2$

20. Δημιουργήστε ομάδες των 4 ατόμων για να εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa12.ggb. Προσπαθήστε να δημιουργήσετε με την χρήση των συμβόλων των πράξεων και των παρενθέσεων τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

....

....

....

....

....

Α.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

~

Όταν δοθούν **δύο φυσικοί αριθμοί Δ** και **δ**, τότε υπάρχουν **δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π** και **υ**, έτσι ώστε να ισχύει: $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$

Ο αριθμός **Δ** λέγεται **διαιρετέος**, ο **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** ονομάζεται **πηλίκο** και το **υ** **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Το υπόλοιπο είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός και πάντα μικρότερος του διαιρέτη:

$$0 \leq \upsilon < \delta$$

Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.

Τα σύμβολο ≤ και ≥ δηλώνουν μία από τις δύο πιθανές περιπτώσεις. Π.χ. αν ισχύει α ≥ β σημαίνει ότι ο αριθμός α ή είναι ίσος ή είναι μεγαλύτερος του β.

Αν το υπόλοιπο **υ** μιας διαίρεσης είναι 0, τότε η διαίρεση καλείται **Τέλεια Διαίρεση:**

$$\Delta = \delta \cdot \pi$$

Ο διαιρέτης **δ** μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι **0**.

Όταν **Δ = δ**, τότε **π = 1**.

Όταν **δ = 1**, τότε **π = Δ**.

Όταν **Δ = 0**, τότε **π = 0**.

21. Ο καθηγητής φυσικής αγωγής χρειάζεται να προσδιορίσει με ποιο τρόπο μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές του σχολείου για την παρέλαση.

(α) Να εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa13.ggb.

(β) Μπορεί να φτιάξει πλήρεις τριάδες, τετράδες, πεντάδες,, εξάδες ή επτάδες;

....

....

....

(γ) Πόσες από αυτές θα σχηματιστούν σε κάθε περίπτωση;

....

....

22. Στην Α΄ τάξη γυμνασίου φοιτούν 175 μαθητές. Όλοι οι μαθητές θα συμμετάσχουν σε μία εκπαιδευτική επίσκεψη στο Αρχαιολογικό Μουσείο.

Αν κάθε λεωφορείο χωρά 50 μαθητές, πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για την μεταφορά των μαθητών;

....

....

23. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες διαιρέσεις:

(α) 43 : 7	(β) 42 : 7	(γ) 42 : 42	(δ) 42 : 1	(ε) 0 : 42
43 7	42 7	42 42	42 1	0 42

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα γ;

....

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα δ;

....

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα ε;

....

Τα σύμβολο ≠ δηλώνει ότι δεν είναι ίσο. Π.χ. αν ισχύει $α \neq 0$ σημαίνει ότι ο αριθμός α δεν μπορεί να είναι μηδέν.

24. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες διαιρέσεις:

(α) $x : x$	**(β)** $x : 1$	**(γ)** $0 : x$, **με** $x \neq 0$

25. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν «Ευκλείδεια διαίρεση»;

(α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$	**(β)** $1.345 = 59 \cdot 21 + 106$	**(γ)** $374 = 8 \cdot 46 + 6$

Α.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας-ΜΚΔ-ΕΚΠ-Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

~

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού **α** είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του α με όλους τους φυσικούς αριθμούς. Με τον τρόπο αυτό θα προκύψουν τα πολλαπλάσια του α που είναι 0, α, 2α, 3α, 4α ....

26. Δύο πλοία πραγματοποιούν δρομολόγια σ’ ένα νησί του Αιγαίου. Τα δύο πλοία επισκέπτονται το νησί ως εξής: Το πρώτο ανά 4 ημέρες και το δεύτερο ανά 6 ήμερες. Παρακολουθήστε το μικροπείραμα mpa14.ggb. Αν ξεκίνησαν από το νησί ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού για πρώτη φορά; Για δεύτερη φορά; Για τρίτη φορά;

....

....

....

....

27. Να γράψετε ορισμένα πολλαπλάσια του αριθμού 5 και του αριθμού 8.

Πολλαπλάσια του 5									
Πολλαπλάσια του 8									

Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.

Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.

Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

(α) Ελέγξτε αν ο αριθμός 5 διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.

....

....

....

(β) Ελέγξτε αν ο φυσικός αριθμός 48 διαιρείται από τον αριθμό 8. Είναι ο αριθμός 48 πολλαπλάσιο του 8;

....

....

(γ) Ελέγξτε αν ο φυσικός αριθμός 24 διαιρείται από τον αριθμό 16. Είναι ο αριθμός 24 πολλαπλάσιο του 16;

....

....

Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν ονομάζεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.
Το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο αριθμών** γράφεται **ΕΚΠ(α, β)**.

28. Να γράψετε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4:

Πολλαπλάσια του 3														
Πολλαπλάσια του 4														

(α) Με βάση τον πίνακα, να καταγράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των δύο αριθμών.

....

....

(β) Ποιο είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 3 και 4;

....

....

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και α.

Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.

Δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) των **α** και **β** και συμβολίζεται **ΜΚΔ(α, β).**

Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(α, β) = 1.**

Για τον υπολογισμό του ΜΚΔ:
α) Γίνεται ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
β) Επιλέγονται **μόνο οι κοινοί παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη**.

Για τον υπολογισμό του ΕΚΠ:
α) Γίνεται ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
β) Επιλέγονται **οι κοινοί και μη κοινοί παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη**.

29. Να βρείτε τους διαιρέτες του 48.

30. Να βρείτε τους διαιρέτες του 37.

Τι παρατηρείτε;

31. Να βρείτε τους διαιρέτες του 18 και 63.

Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των δύο αυτών αριθμών;

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους;

32. Να βρείτε τους διαιρέτες του 18 και 65.

Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των δύο αυτών αριθμών;

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους;

33. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 450, 30 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.

Κριτήρια Διαιρετότητας λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορείτε να συμπεράνετε, χωρίς να κάνετε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 9, 10 **ή** 25.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10, 100, 1000,** ..., αν λήγει σε **ένα, δύο, τρία,** ... **μηδενικά** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 ή 5.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9,** αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4** ή το **25,** αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται συγχρόνως **με το 2 και το 3**.

34. Να βρείτε αν διαιρούνται οι αριθμοί 12510, 772, 225, 13600 με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 8, 9. 10. 25. 100. Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογείτε την απάντησή σας.

12510

772

225

13600

35. Έχει αναδειχθεί ότι, ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11, όταν η διαφορά των αθροισμάτων των ψηφίων που βρίσκονται στις άρτιες και στις περιττές θέσεις διαιρείται με το 11. Να ελέγξετε αν ο αριθμός 27514322 διαιρείται από το 11.

Ασκήσεις προς λύση

Κριτήρια διαιρετότητας

1.1. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $31 + 32 + 33 + 34 + 16 + 17 + 18 + 19$

1.2. Να κάνετε τις πράξεις:

Α. $62 \cdot 5 + 62 \cdot 9$

Β. $349 \cdot 17 - 349 \cdot 12$

Γ. $99 \cdot 15 + 99 \cdot 11 - 99 \cdot 20$

Δ. $73 \cdot 32 - 73 \cdot 12 + 73 \cdot 5$

1.3. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:

Α. $2 \cdot α + 5 \cdot α$

Β. $12x - 9x$

Γ. $3y + 10y - 8y$

1.4. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:

Α. $7 \cdot (x - y) + 7y + 3$

Β. $12 \cdot (ω + κ) + 10 - 12 \cdot ω - 12 \cdot κ$

1.5. Αν $x - y = 2$,να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

Α. $4x - 4y$

Β. $8x - 8y + 8$

1.6. Αν $α + β = 3$ και $κ - λ = 2$,να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α. $6α + 6β + 2κ - 2λ$

Β. $5(α + κ) + 5(β - λ)$

1.7. Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:

Α. $x + x + y + y + y$

Β. $x \cdot x \cdot x + y \cdot y$

Γ. $x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$

Δ. $(x + x) \cdot y \cdot y$

Ε. $χ + χ + χ + χ + χ$

ΣΤ. $χ \cdot χ \cdot χ \cdot χ \cdot χ$

1.8. Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:

Α. $xy + xy + xy$

Β. $3 \cdot x \cdot x \cdot 3 \cdot x$

Γ. $4x + 4x + 4x$

1.9. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $10 \cdot y^2 + (10 \cdot y)^2$ όταν $y = 2$

1.10. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

Α. $3{\cdot}2$ και 2^3

Β. 4^3 και 3^4

Γ. $(2+4)^2$ και 2^2+4^2

Δ. $(3\cdot 4)^2$ και $3^2\cdot 4^2$

Ε. $(5-3)^2$ και 5^2-3^2

1.11. Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί 6·x και 6·y + 30 διαιρούνται με το 6 (όπου x, y φυσικοί αριθμοί).

1.12. Τρείς φίλοι παίζουν στο Internet ένα παιχνίδι. Ο πρώτος παίζει το παιχνίδι κάθε 4 μέρες, ο δεύτερος κάθε 6 μέρες και ο τρίτος κάθε 8 μέρες. Αν σήμερα παίζουν όλοι το παιχνίδι, μετά από πόσες ημέρες θα ξαναπαίξουν όλοι μαζί;

1.13. Ένας Μαθηματικός έχει επιλέξει 30 ασκήσεις από το 1ο κεφάλαιο, 48 ασκήσεις από το 2ο κεφάλαιο και 36 ασκήσεις από το 3ο κεφάλαιο για να ετοιμάσει επαναληπτικά διαγωνίσματα.

Α. Πόσα το πολύ όμοια διαγωνίσματα (δηλαδή με ίδιο πλήθος ασκήσεων από κάθε κεφάλαιο) μπορεί να φτιάξει;

Β. Πόσες ασκήσεις θα υπάρχουν στο κάθε διαγώνισμα από το ίδιο κεφάλαιο;

1.14. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ψηφίο α στον αριθμό 23α4 ώστε να προκύψει αριθμός που:

Α. να διαιρείται με το 9

Β. να διαιρείται με το 3

1.15. Αν x + y = 2,να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

Α = 2(x + 1) + 2(y - 1)

Β = x + 3(x + 2) + 4(y - 1)

1.16. Ένα βιβλίο Μαθηματικών έχει 400 με 450 σελίδες. Αν μετρήσουμε τις σελίδες ανά 7, 12, 15 δεν περισσεύει καμία. Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄: Γεωμετρία
Κεφάλαιο 1 - Βασικές Γεωμετρικές έννοιες

Ευχαριστίες στους/στις εκπαιδευτικούς: Βροντάκη Εμμανουήλ, Διαμάντη Χρήστο, Κάντα Σπυριδούλα, Μιχαλοπούλου Γεωργία και Πέρδο Αθανάσιο.

Β.1.1. Σημείο, Ευθύγραμμο τμήμα, Ευθεία, Ημιευθεία, Επίπεδο, Ημιεπίπεδο άξονα

∼

Α. Το σημείο

Η άκρη του μολυβιού, οι κορυφές ενός σχήματος, η μύτη μιας βελόνας, δίνουν την έννοια του ....

Με το μολύβι μπορείτε να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία, αφού το σημείο δεν έχει διαστάσεις, αλλά χρησιμοποιείται για προσδιορισμό θέσης.

1. Πώς μπορείτε να «βάλετε» ένα σημείο;

....

....

2. Αν «βάλετε» πολλά σημεία πώς θα τα διακρίνετε (ξεχωρίσετε);

....

....

Στην οθόνη του υπολογιστή ένα σημείο γράφεται με το ποντίκι ή σε ένα tablet με το δάχτυλο.

3. Ανοίξτε το μικροπείραμα (mpb11.ggb) για να μελετήσετε το σημείο. Περιγράψτε πώς μπορείτε να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου.

....

....

Το ευθύγραμμο τμήμα δεν έχει προσανατολισμό.
Μπορεί να διαβαστεί ως: το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ή το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ.

Β. Το ευθύγραμμο τμήμα

Μία τεντωμένη κλωστή με άκρα **Α** και **Β** δίνει μια εικόνα της έννοιας του ....

Τα σημεία **Α** και **Β** είναι τα **..............** του ευθύγραμμου τμήματος.

Τα σημεία Α και Β ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

4. Ανοίξτε το μικροπείραμα (mpb11.ggb) για να μελετήσετε το ευθύγραμμο τμήμα Πώς κατασκευάζεται ένα ευθύγραμμο τμήμα;

....

....

Η διαφορά από το σημείο είναι ότι έχει μία διάσταση, όπου πάνω σε αυτό το τμήμα μπορεί κάποιος να κινηθεί.

5. Δίνονται τρία διαφορετικά σημεία Α, Β και Γ. Ενώστε ανά δύο τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα και δώστε ονομασία σε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται. Τι παρατηρείτε;

Με το ευθύγραμμο τμήμα παρέχεται η δυνατότητα μέτρησης.

Γ. Η ευθεία

Εάν ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** προεκταθεί απεριόριστα, τότε το νέο σχήμα, που **δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος**, λέγεται ....

Τα x΄x και y΄y δεν είναι άκρα.

Μια ευθεία συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα από τα αρχικά του αλφαβήτου, π.χ. (ε), ή με δύο μικρά γράμματα από τα τελευταία του αλφαβήτου π.χ. x΄x, y΄y.

6. Ανοίξτε το μικροπείραμα (mpb11.ggb) για να μελετήσετε την ευθεία.

(α) Πόσες ευθείες μπορείτε να κατασκευάσετε που να διέρχονται από δύο σημεία;

....

....

Από ένα σημείο διέρχονται ....

(β) Κατασκευάστε ένα σημείο και 3 ευθείες που να διέρχονται από αυτό το σημείο. Πόσες ακόμα τέτοιες ευθείες μπορείτε να κατασκευάσετε;

....

....

....

....

Από δύο σημεία διέρχεται ....

Δ. Η ημιευθεία

Εάν ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** προεκταθεί απεριόριστα πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το Β, τότε το νέο σχήμα, που έχει **αρχή** το **Α** αλλά **....................................**, λέγεται ....

Εάν **Ο** είναι ένα σημείο της ευθείας **x΄x**, τότε με αρχή το **Ο** ορίζονται δύο ημιευθείες **Οx** και **Οx΄**, οι οποίες λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.

Η ημιευθεία συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα μικρό από τα τελευταία γράμματα, π.χ. **Αx**, **Βx ή ακόμα και ΑΒx** κ.λπ.

7. Ανοίξτε το μικροπείραμα (mpb11.ggb) για να μελετήσετε την ημιευθεία.

Πότε οι ημιευθείες Οx και Οx΄ είναι αντικείμενες ημιευθείες;

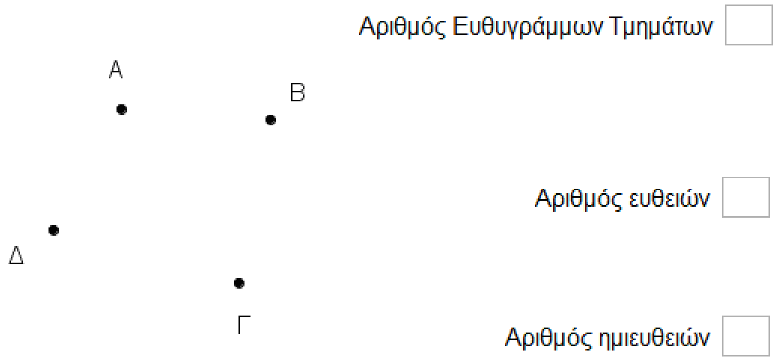
....

....

....

Η φράση αντικείμενες προέκυψε από τη χρήση του ρήματος αντίκειμαι που σημαίνει ότι βρίσκονται σε αντίθεση και πιο συγκεκριμένα σε αντίθετη κατεύθυνση.

8. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα. Τα ερωτήματα μπορείτε να τα διερευνήσετε και στο μικροπείραμα (mpb11.ggb).



(α) Στο παραπάνω σχήμα να χαράξετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, που έχουν άκρα τα σημεία αυτά. Πόσα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα είναι; ....

(β) Στο παραπάνω σχήμα πόσες ευθείες μπορούμε να κατασκευάσουμε; ....

(γ) Στο παραπάνω σχήμα πόσες ημιευθείες μπορούμε να κατασκευάσουμε; ....

9. Ανοίξτε το μικροπείραμα mpb12.ggb. Μελετήστε τι σχήμα γράφει κάθε σημείο.

Ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ ευθείας, ημιευθείας και ευθύγραμμου τμήματος;

....

....

....

Ε. Το επίπεδο

10. Ανοίξτε το αρχείο mpb13.ggb.

- Παρατηρήστε το επίπεδο.
- Μελετήστε τα θέματα (1ο, 2ο, 3ο, 4ο και 5ο που είναι σημαντικά να γνωρίζετε για το επίπεδο).

  Καταγράψτε το 1ο σημαντικό θέμα που χρειάζεται να γνωρίζετε για το επίπεδο.

  ....

  ....

  ....

  Καταγράψτε το 2ο σημαντικό θέμα που χρειάζεται να γνωρίζετε για το επίπεδο.

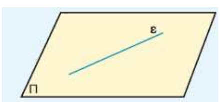
  ....

  ....

  ....

Επίπεδο είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

Η ονομασία του επιπέδου δίνεται με ένα **κεφαλαίο γράμμα** του αλφάβητου π.χ. **Π, Ρ, Σ** κ.λπ.



Καταγράψτε το 3ο σημαντικό θέμα που χρειάζεται να γνωρίζετε για το επίπεδο.

....

....

Καταγράψτε το 4ο σημαντικό θέμα που χρειάζεται να γνωρίζετε για το επίπεδο.

....

....

Καταγράψτε το 5ο σημαντικό θέμα που χρειάζεται να γνωρίζετε για το επίπεδο.

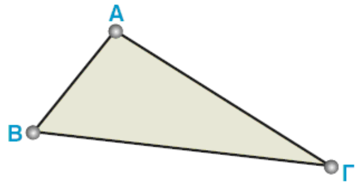
....

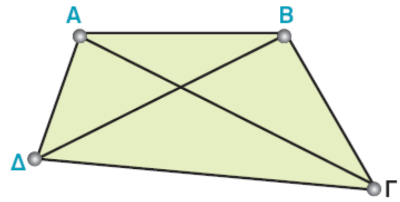
....

Στο τρίγωνο **ΑΒΓ**, τα τμήματα **ΑΒ**, **ΒΓ** και **ΓΑ** που ορίζονται από δύο **κορυφές**, λέγονται **πλευρές** του τριγώνου.

Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** με **κορυφές** τα σημεία **Α, Β, Γ, Δ** έχει **πλευρές** τα τμήματα **ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ** που ορίζονται από διαδοχικές κορυφές. Τα τμήματα **ΑΓ** και **ΒΔ**, που ορίζονται από μη διαδοχικές κορυφές, λέγονται **διαγώνιες** του τετραπλεύρου.

11. Έστω ένα τρίγωνο, με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και ένα τετράπλευρο, με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Ποια ονομασία έχουν τα ευθύγραμμα τμήματα που βλέπετε στα σχήματα;





....

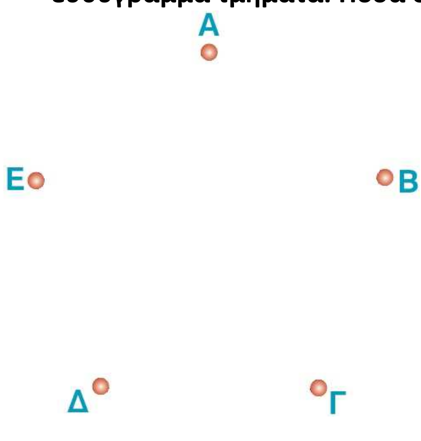
....

....

....

....

12. Στο σχήμα φαίνονται πέντε σημεία, τα Α, Β, Γ, Δ και Ε. Να χαράξετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, που έχουν άκρα τα σημεία αυτά. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα. Πόσα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα είναι;



....

....

....

....

....

....

....

....

Β.1.2. Γωνία, Γραμμή, Επίπεδα σχήματα, Ευθύγραμμα σχήματα, Ίσα σχήματα

~

Οι γωνιές στη φύση, στο ανθρώπινο σώμα και στις ανθρώπινες κατασκευές

13. Δώστε παραδείγματα γωνιών που έχετε δει:

- Στη φύση:

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

- Στο ανθρώπινο σώμα:

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

- Στις ανθρώπινες κατασκευές:

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

Κάθε μία από τις περιοχές που χωρίζεται το επίπεδο μαζί με τις ημιευθείες Οx και Οy ονομάζεται γωνία.

Το σημείο Ο λέγεται κορυφή της γωνίας και οι ημιευθείες Οx και Οy λέγονται πλευρές της γωνίας.

Οι γωνίες που σχηματίζονται συμβολίζονται $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$ (το γράμμα της κορυφής Ο γράφεται πάντα στη μέση) ή με ένα μικρό γράμμα, π.χ. $\hat{\omega}$.

14. Γωνία

Α. Σχεδιάστε δύο ημιευθείες Οx και Οy.

Β. Σε πόσες περιοχές χωρίζεται το επίπεδο; Να τα ονοματίσετε.

15. Κυρτή και μη κυρτή γωνία. Πειραματιστείτε με το μικροπείραμα mpb14.ggb.

Α. Ποια γωνία λέγεται κυρτή;

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Β. Ποια γωνία λέγεται μη κυρτή;

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Στο τρίγωνο και στο τετράπλευρο

Όταν λέμε, π.χ. η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ, εννοούμε τη γωνία που έχει αρχή το Α και οι πλευρές της είναι η προέκταση των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και περιέχει το τρίγωνο.

Η γωνία $\hat{A}$ λέμε ότι περιέχεται μεταξύ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου.

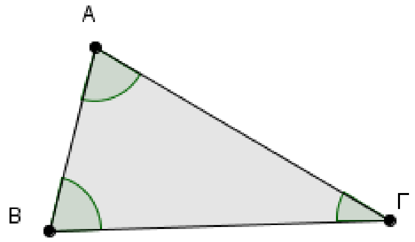
Λέμε ότι στο τρίγωνο η πλευρά ΒΓ είναι απέναντι στη γωνία $\hat{A}$, ενώ οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες της πλευράς ΒΓ.

Τεθλασμένη γραμμή είναι μια πολυγωνική γραμμή, που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

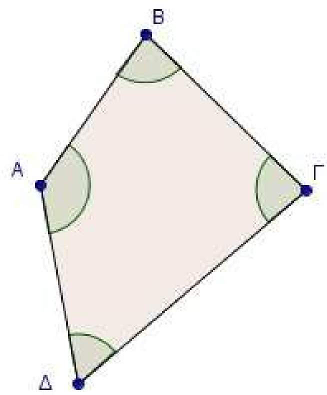
Ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.

Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται κυρτή, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά λέγεται μη κυρτή.

16. Το τρίγωνο ……………. έχει ………. γωνίες, τις …………………………………………………….



17. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει γωνίες, που καθεμιά τους περιέχει το τετράπλευρο.
Οι γωνίες αυτές είναι οι ………………………………………………………………………………. που γράφονται και ως εξής: ……………………………



Ευθύγραμμα σχήματα.

18. Να σχεδιάσετε μία κυρτή και μία μη κυρτή τεθλασμένη γραμμή.

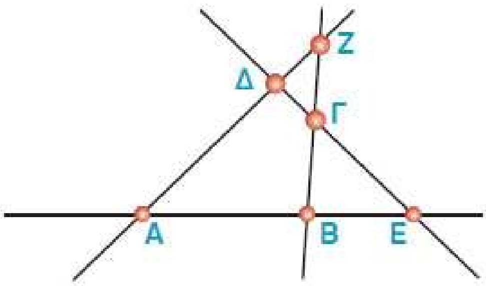
19. Να σχεδιάσετε ένα κυρτό ευθύγραμμο σχήμα και ένα μη κυρτό ευθύγραμμο σχήμα.

Ίσα σχήματα

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα, αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.

Στα ίσα σχήματα, τα στοιχεία που συμπίπτουν, δηλαδή οι κορυφές, οι πλευρές και οι γωνίες, ονομάζονται αντίστοιχα στοιχεία των σχημάτων αυτών.

20. Ποιες γωνίες και ποια ευθύγραμμα σχήματα σχηματίζονται από τις ευθείες του ακόλουθου σχήματος;



....

....

....

....

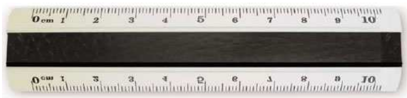
....

Β.1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

~

Το απλούστερο σχήμα, του οποίου το μήκος μπορεί να μετρηθεί, είναι το ευθύγραμμο τμήμα και αποτελεί βασικό στοιχείο των άλλων ευθυγράμμων σχημάτων.

21. Να κάνετε τις αντιστοιχίσεις των εικόνων κάθε οργάνου μέτρησης με το όνομά του.

(i) 	(Α) Μετροταινία
(ii) 	(Β) Μικρόμετρο
(iii) 	(Γ) Υποδεκάμετρο

Κάθε σύγκριση ενός μεγέθους με την αντίστοιχη μονάδα λέγεται μέτρηση.

22. Μελετήστε το υποδεκάμετρο που έχετε μαζί σας.
Για να μετρήσετε το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος χρησιμοποιείτε:

Πώς ορίζεται η απόσταση δύο σημείων και πως μετριέται;

Η σχέση μεταξύ των υποδιαιρέσεων του μέτρου είναι η ακόλουθη

Μονάδα μήκους είναι το «μέτρο» (m)

- Για να μετρήσετε, ένα ευθύγραμμο τμήμα, χρησιμοποιείτε ένα αντίγραφο του μέτρου και κάνετε τη σύγκριση μ’ αυτό.
- Εάν όμως το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος είναι πολύ μεγαλύτερο ή πολύ μικρότερο από το μήκος του μέτρου, επιλέγετε, για τη μέτρηση ένα πολλαπλάσιο ή μια υποδιαίρεση του μέτρου για το σκοπό αυτό.
- Για να μετρήσετε σχετικά μικρά μήκη χρησιμοποιείτε, συνήθως, το υποδεκάμετρο, που είναι το ένα δέκατο $\left(\frac{1}{10}\right)$ του μέτρου.
- Για μεγαλύτερα μήκη, όπως π.χ. έναν τοίχο ή τις διαστάσεις ενός οικοπέδου, χρησιμοποιείτε τη μετροταινία.
- Για πολύ μικρά μήκη π.χ. τη διάμετρο μιας βίδας ή το πάχος μιας λαμαρίνας, χρησιμοποιείτε το παχύμετρο ή το μικρόμετρο, αντίστοιχα.

Η έννοια της απόστασης σημείων είναι από τις πιο συνηθισμένες γεωμετρικές έννοιες, π.χ. απόσταση δύο πόλεων κ.λπ.

Ονομασία μονάδας μήκους	Σύμβολο		Σχέση με το μέτρο
Πολλαπλάσιο του μέτρου	Χιλιόμετρο	Km	1 Km = 1000 m
	ΜΕΤΡΟ	m	
Υποδιαιρέσεις του μέτρου	Δεκατόμετρο ή παλάμη	dm	$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0{,}1 \text{ m}$
	Εκατοστόμετρο ή πόντος	cm	$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} = 0{,}01 \text{ m}$
	Χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό	mm	$1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} \text{ m} = 0{,}001 \text{ m}$

Απόσταση δύο σημείων Α και Β λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, που τα ενώνει.

1 m	= 10 dm	= 100 cm	= 1000 mm
	1 dm	= 10 cm	= 100 mm
		1 cm	= 10 mm

23. Πώς μπορείτε να βρείτε το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος:

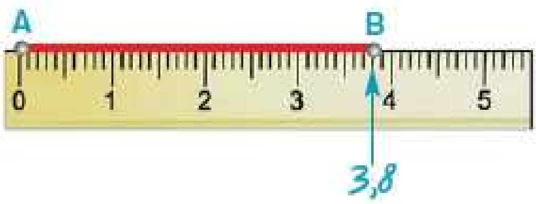
Αν έχετε τα σημεία Α και Β:

1. Χαράζετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ
2. Το μετράτε με το κατάλληλο μέτρο.
3. Βρίσκετε το μήκος.

Με το σύμβολο ΑΒ εννοούνται ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα:
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, αλλά και το μήκος αυτού του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Για να ξεχωρίσετε το μήκος, συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός (ΑΒ). Ωστόσο για απλούστευση, μπορείτε να γράψετε: μήκος ΑΒ.

24. Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Β.



1. Έχετε τα σημεία Α και Β.
2. Χαράζετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
3. Το μετράτε με το υποδεκάμετρο.
4. Βρίσκετε ότι έχει μήκος 3,8 cm.
5. Λέτε ότι η απόσταση των σημείων Α και Β είναι 3,8 cm.
6. Γράφετε ΑΒ = 3,8 cm.

25. Να πραγματοποιήσετε μία δική σας μέτρηση. Καταγράψτε τα βήματα και το αποτέλεσμα της μέτρησης.

....
....
....
....

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται το σημείο Μ του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.

26. Έχετε ακούσει τη φράση: «Βρισκόμαστε στο μέσο της διαδρομής»; Τι καταλαβαίνετε; Τι σημαίνει απέχουμε την ίδια απόσταση από τα δύο άκρα; Τι ονομάζεται μέσο του ευθυγράμμου τμήματος;

....
....
....

27. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb15.ggb. Μελετήστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί σύγκριση μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Καταγράψτε τα αποτελέσματα της μελέτης σας.

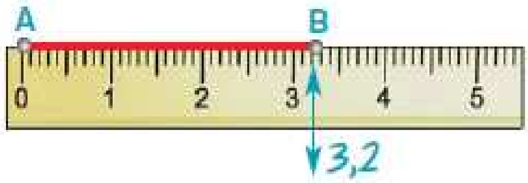
....

....

....

....

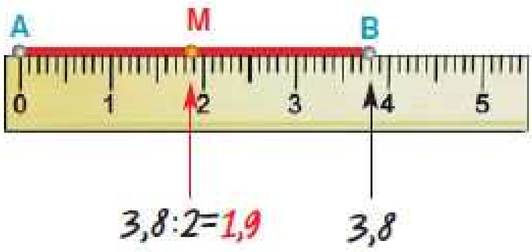
28. Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι ίσο με το τμήμα ΑΒ: (α) με το υποδεκάμετρο και (β) με διαβήτη.



Να καταγράψετε τα βήματα που θα ακολουθήσετε:

....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

29. Ποια είναι τα βήματα που θα ακολουθήσετε για να βρείτε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.



....

....

....

....

....

....

Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει πάντα ένα μέσο Μ, που είναι και μοναδικό.

Β.1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

Για να προσθέσετε ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετείτε διαδοχικά πάνω σε μια ευθεία. Το τμήμα που έχει άκρα την αρχή του πρώτου και το τέλος του τελευταίου είναι το άθροισμά τους.

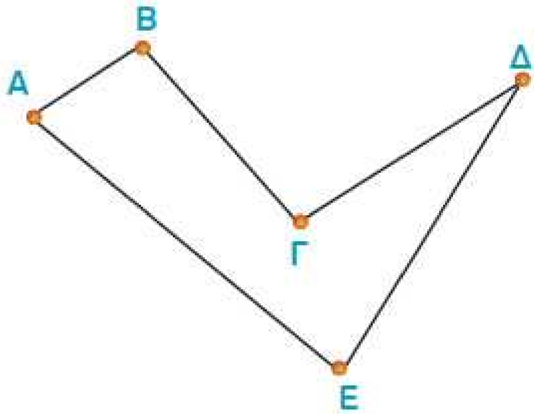
Για να αφαιρέσετε δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετείτε με κοινή αρχή στην ίδια ημιευθεία. Το τμήμα που αρχίζει από το τέλος του μικρότερου και καταλήγει στο τέλος του μεγαλύτερου αποτελεί τη διαφορά τους.

Μία τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται.

Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι μικρότερο από το μήκος κάθε τεθλασμένης γραμμής με τα ίδια άκρα Α και Β.

Το άθροισμα των πλευρών ενός ευθύγραμμου σχήματος, θα το λέμε περίμετρο του σχήματος.

30. Στο παρακάτω σχήμα, μεταξύ των διαδρομών ΑΒΓΔ και ΑΕΔ, να βρείτε ποια διαδρομή από τις δύο είναι η συντομότερη, για να πάει κάποιος/α από την πόλη Α στην πόλη Δ.



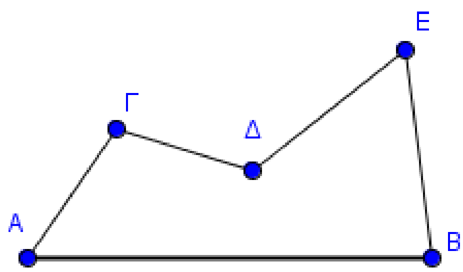
31. Να βρείτε την διαφορά των διαδρομών αυτών.

32. Στο παρακάτω σχήμα:

Α. να βρείτε ποια διαδρομή από τις δύο είναι η συντομότερη, για να πάει κάποιος από την πόλη Α στην πόλη Β.

Β. μπορείτε να βρείτε συντομότερη διαδρομή από την πόλη Α στην πόλη Β με την προϋπόθεση ότι θα περάσετε και από τουλάχιστον μία άλλη πόλη;

Γ. Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, σε σχέση με το μήκος κάθε τεθλασμένης γραμμής με τα ίδια άκρα Α και Β.



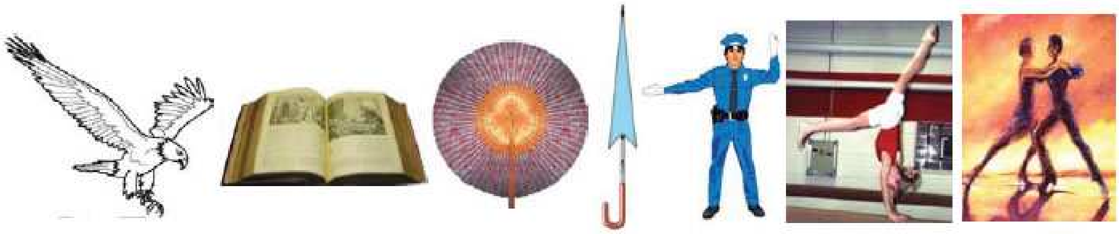
33. Να βοηθήσετε τον ταχυδρόμο να παραδώσει ένα γράμμα express στη διεύθυνση Β, και άλλα τρία στις διευθύνσεις Γ, Δ, Ε και να επιστρέψει στο Ταχυδρομείο Στόχος σας είναι να εντοπίσετε την μικρότερη διαδρομή. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb16.ggb.

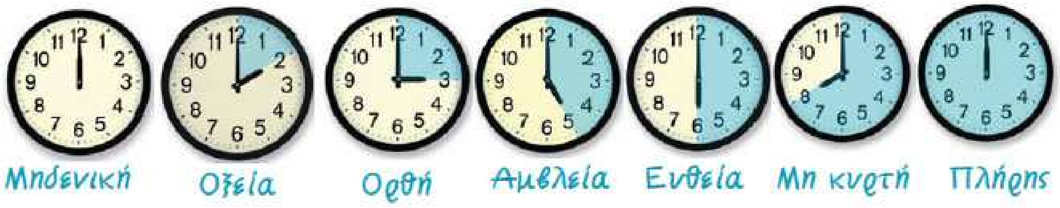
Β.1.6. Είδη γωνιών, Κάθετες ευθείες

~

Είδη γωνιών

34. Σε όλα τα παρακάτω αντικείμενα σχηματίζονται διάφορες γωνίες ανάλογα με τη σχετική θέση, κάθε φορά, δύο ημιευθειών που έχουν ένα κοινό σημείο, όπως π.χ. είναι οι δείκτες του ρολογιού, τα πόδια των ανθρώπων, τα φτερά του αετού κ.λπ. Η σειρά που τοποθετήθηκαν τα διάφορα σκίτσα είναι τυχαία. Μπορείτε να βρείτε τη σωστή αντιστοιχία;





35. Το σπίτι της ακόλουθης εικόνας έχει δύο καμινάδες.

Α. Ποια είναι η μεταξύ τους διαφορά;

Β. Ποια από τις δύο είναι κάθετη στη στέγη και γιατί;

Γ. Γενικότερα, είναι δυνατό να υπάρχουν κάθετες ευθείες, χωρίς απαραίτητα να είναι αυτές οριζόντιες και κατακόρυφες;

....

....

....

....

....

....

....

....

36. Πώς μπορείτε να κατασκευάσετε μία γωνία; Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb17.ggb για να κατασκευάσετε μερικές γωνίες μέσω του υπολογιστή και του λογισμικού GeoGebra. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο κατασκευής;

....

....

....

....

....

Στη συνέχεια, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε το μοιρογνωμόνιό σας για να κατασκευάσετε τις γωνίες στα επόμενα ερωτήματα.

Ορθή γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 90°.

Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι κάθετες ημιευθείες.

37. Να κατασκευάσετε μία ορθή γωνία.

Οξεία γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μικρότερο των 90°.

38. Να κατασκευάσετε μία οξεία γωνία.

Αμβλεία γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90° και μικρότερο των 180°.

39. Να κατασκευάσετε μία αμβλεία γωνία.

Ευθεία γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 180°.

Οι πλευρές της ευθείας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες.

40. Να κατασκευάσετε μία ευθεία γωνία.

Μη κυρτή γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 180° και μικρότερο των 360°.

41. Να κατασκευάσετε μία μη κυρτή γωνία.

Μηδενική γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 0^o.

Πλήρης γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 360^o.

42. Να κατασκευάσετε μία μηδενική και μία πλήρη γωνία. Τι παρατηρείτε;

Παρατηρώ ότι: ....

....

43. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mpb18.ggb](mpb18.ggb). Να βρείτε το μέτρο μερικών κυρτών και μη κυρτών γωνιών. Καταγράψτε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται ο υπολογισμός του μέτρου των γωνιών με τη χρήση του μοιρογνωμονίου.

....

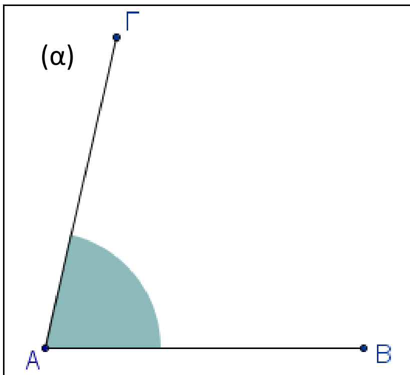
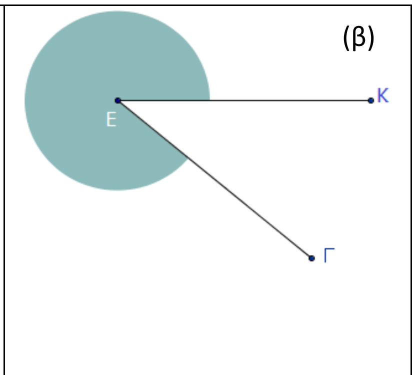
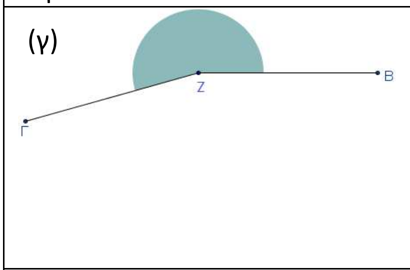
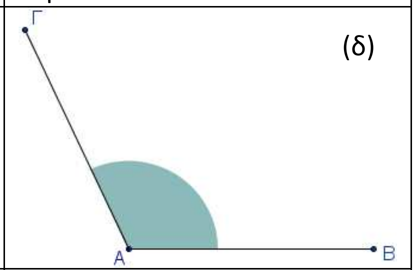
....

....

....

....

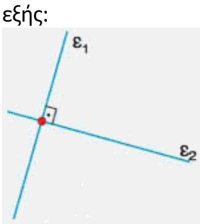
44. Να χρησιμοποιήσετε το μοιρογνωμόνιο για να μετρήσετε πόσες μοίρες είναι κάθε γωνία.

	
Η γωνία ΓΑΒ είναι:	Η γωνία ....
	
Η γωνία	Η γωνία ....

Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές τεμνόμενες, είναι ορθές.

Με τη σχέση ε1 ⊥ ε2 περιγράφεται ότι «*η ε1 είναι κάθετη στην ε2*».

Στο σχήμα η καθετότητα συμβολίζεται ως εξής:



45. Πώς μπορεί να διαπιστωθεί ότι δύο τεμνόμενες ευθείες είναι κάθετες;

....

....

....

46. Πώς μπορούν να κατασκευαστούν δύο κάθετες ευθείες;

……

……

……

……

……

47. Να σχεδιάσετε ευθεία ε΄, που διέρχεται από σημείο Α και είναι κάθετη σε ευθεία ε.

Στο συγκεκριμένο σχεδιασμό μπορούν να προσδιοριστούν δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Το σημείο Α ανήκει στην ε.

2η περίπτωση: Το σημείο Α δεν ανήκει στην ε.

Β.1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών, Διχοτόμος γωνίας

～

Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το μοιρογνωμόνιο.

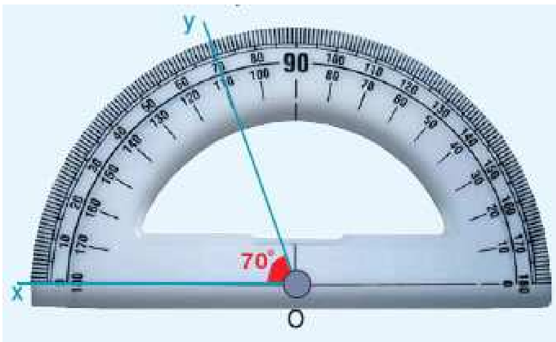
Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται μέτρο της γωνίας.

Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η μοίρα, που γράφεται: 1^{o}.

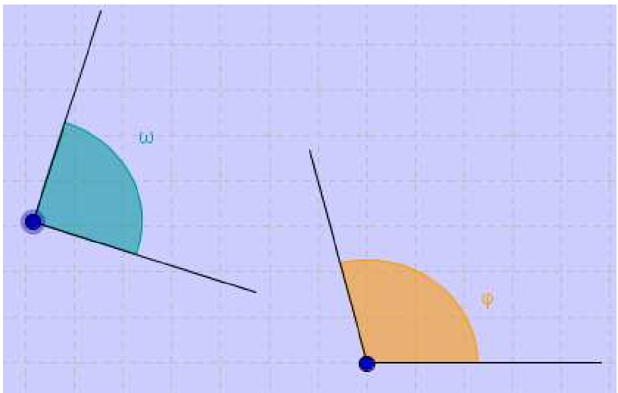
Είναι: $1^{o} = 60'$ (πρώτα λεπτά) και $1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά).

Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο που εξαρτάται μόνο από το «άνοιγμα» των πλευρών της.

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες.



48. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb19.ggb. Να συγκρίνετε τις γωνίες ω και φ. Ποια γωνία είναι μεγαλύτερη; Με ποιους τρόπους μπορεί να γίνει η σύγκριση;



....

....

....

....

....

49. Να συγκρίνετε τις προσκείμενες στη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου.

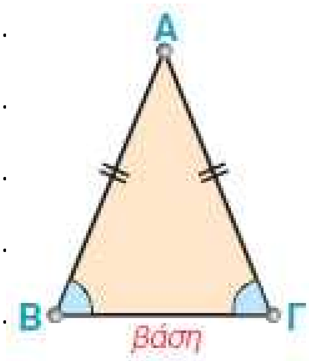
....

....

....

....

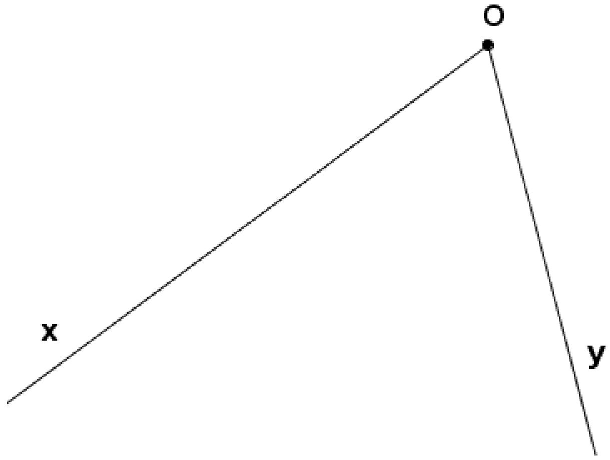
....



....

Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

50. Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$. Να κατασκευάσετε την διχοτόμο της.



1ος τρόπος: Με το μοιρογνωμόνιο	**2ος τρόπος:** Με δίπλωση χαρτιού
....	....
....	....
....	....
....	....

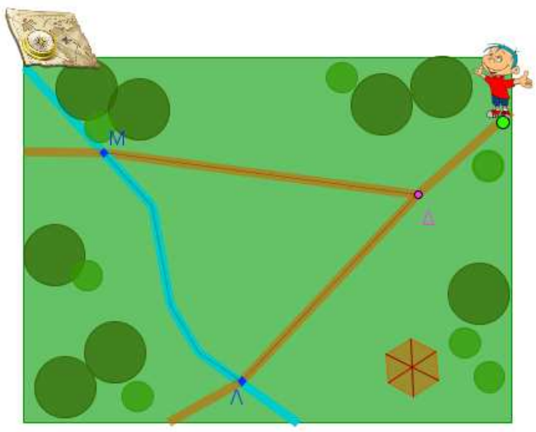
51. Μελετήστε το μικροπείραμα mpb110.ggb. Δείτε πώς κατασκευάζετε η διχοτόμος με τη βοήθεια του λογισμικού. Επιχειρήστε τη διερεύνηση. Καταγράψτε τι παρατηρείτε.

....

....

....

52. Ο Γιάννης παίζει το παιχνίδι του κρυμμένου Θησαυρού... Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb111.ggb.



Β.1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες, Άθροισμα γωνιών

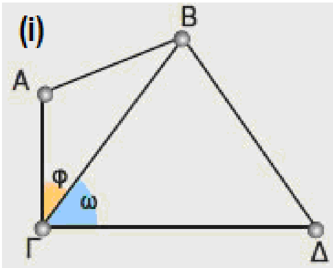
~

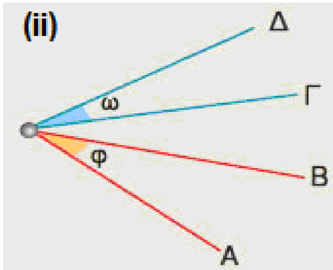
Εφεξής γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.

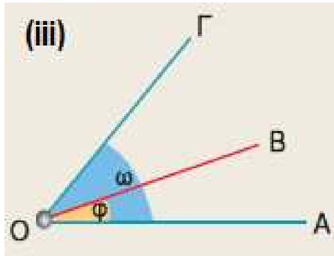
Η λέξη εφεξής χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει τη φράση:
από εδώ και στο εξής ή από εδώ και πέρα.

Διαδοχικές γωνίες λέγονται περισσό-τερες από δύο γω-νίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενή της.

53. Σε καθένα από τα παρακάτω τρία σχήματα υπάρχουν δύο γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$. Συμπληρώστε τα κενά στην πρόταση που αντιστοιχεί σε καθένα από τα τρία σχήματα και δικαιολογήστε την απάντησή σας.





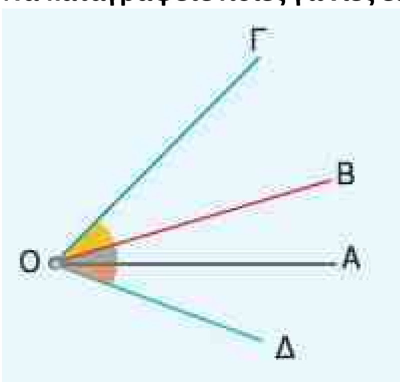


i. Οι γωνίες ω και φ, έχουν κοινή την …………… και την …………… και κανένα άλλο κοινό σημείο. Οι γωνίες αυτές ονομάζονται ……………………

ii. Οι γωνίες ω και φ, έχουν μόνο κοινή …………… και κανένα άλλο κοινό σημείο.

iii. Οι γωνίες ω και φ, έχουν κοινή την ………………… μία ………………………… και ……………………

54. Να καταγράψετε ποιες γωνίες είναι διαδοχικές στο ακόλουθο σχήμα:



…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

55. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mpb112.ggb](mpb112.ggb). Διερευνήστε τις τρεις περιπτώσεις που προσδιορίστηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα. Στη συνέχεια να εργαστείτε στις ερωτήσεις, ώστε να διαπιστώσετε τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να γίνουν δύο γωνίες εφεξής. Καταγράψτε πώς μπορούν να γίνουν δύο γωνίες εφεξής.

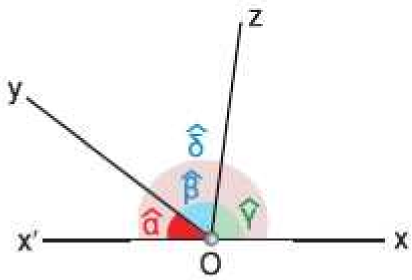
……
……
……
……
……
……
……

Για να προστεθούν δύο γωνίες έστω $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, δηλαδή να βρεθεί μια τρίτη γωνία, που να είναι το άθροισμά τους, τότε:

- Κάνουμε τις γωνίες εφεξής.
- Σχηματίζεται μία νέα γωνία.

Το μέτρο της είναι το μέτρο $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$, δηλαδή είναι το άθροισμα των μέτρων ($\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$), των δύο γωνιών.

56. Δίνεται ευθεία x΄x. Από ένα σημείο O της ευθείας και προς το ίδιο μέρος της, έχουν σχεδιαστεί δυο ημιευθείες Oy και Oz. Να βρείτε το άθροισμα των τριών γωνιών, που σχηματίζονται, όπως φαίνεται στο σχήμα.



....

....

....

....

....

57. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mpb113.ggb](mpb113.ggb) και πειραματιστείτε επιλέγοντας διαφορετικές γωνίες και υπολογίζοντας το άθροισμα των γωνιών. Ελέγξτε αν ισχύει ο τρόπος εύρεσης αθροίσματος γωνιών που περιγράφηκε στο περιθώριο αριστερά.

....

....

....

....

58. Μπορείτε να υπολογίσετε το μέτρο του αθροίσματος των γωνιών χωρίς να ακολουθήσετε τη διαδικασία που έχει περιγραφεί; Εξηγήστε.

....

....

....

....

....

....

....

Β.1.8. Παραπληρωματικές, συμπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες

~

Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180^o. Η κάθε μία από αυτές λέγεται παραπληρωματική της άλλης.
Αν $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ οι δύο γωνίες θα ισχύει:
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^o$$

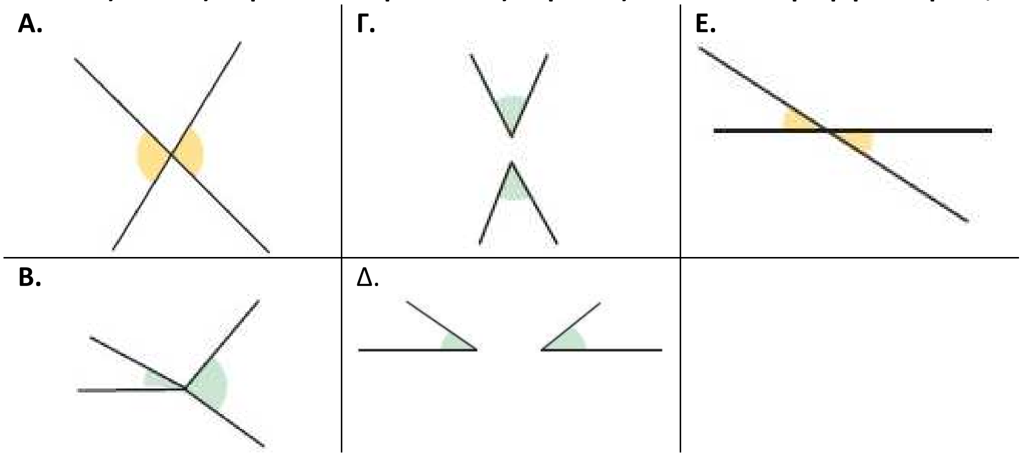
59. Να σχεδιάσετε δύο εφεξής γωνίες με ονόματα $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$, για τις οποίες οι μη κοινές πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες. Να βρείτε το άθροισμα των δύο γωνιών.

Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90^o. Η κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης.
Αν $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ οι δύο γωνίες θα ισχύει:
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^o$$

60. Να σχεδιάσετε δύο εφεξής γωνίες με ονόματα $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$, για τις οποίες οι μη κοινές πλευρές τους είναι κάθετες ημιευθείες. Να βρείτε το άθροισμα των δύο γωνιών.

Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες.

61. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις οι γωνίες είναι κατακορυφήν και γιατί;



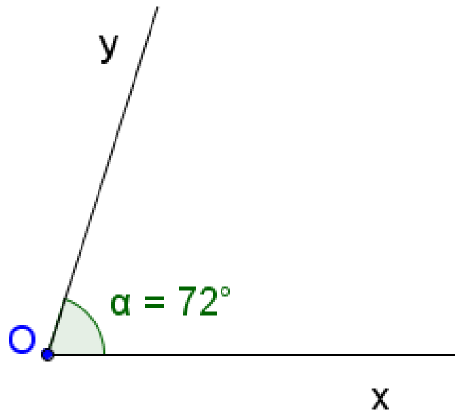
Για να βρείτε το μέτρο της παραπληρωματικής μιας γωνίας μπορείτε να αξιοποιήσετε τη σχέση: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^{o}$.

Για να σχεδιάσετε την παραπληρωματική μιας γωνίας $x\hat{O}y$, προεκτείνετε την πλευρά αυτής Οx προς το μέρος του Ο, οπότε έχετε την ημιευθεία Οx΄, αντικείμενη της Οx. Έτσι σχηματίζεται η γωνία $y\hat{O}x$, που είναι παραπληρωματική της $x\hat{O}y$ και έχει μέτρο το $\hat{\beta}$, ώστε να ισχύει $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^{o}$.

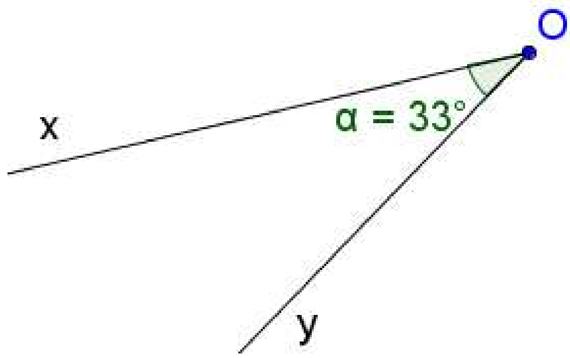
Για να σχεδιάσετε τη συμπληρωματική μιας γωνίας $x\hat{O}y$, φέρνετε την ημιευθεία Οx΄ $\perp$ Οx προς το μέρος του ημιεπιπέδου που βρίσκεται η Οy. Έτσι σχηματίζεται η γωνία $y\hat{O}x$, που είναι συμπληρωματική της $x\hat{O}y$ και έχει μέτρο το $\hat{\beta}$, ώστε να είναι $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^{o}$.

Για να βρείτε το μέτρο της συμπληρωματικής μιας γωνίας αξιοποιείτε τη σχέση $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^{o}$.

62. Δίνεται η γωνία $x\hat{O}y$ με μέτρο $\hat{\alpha}$ = 72°. Να βρείτε και να σχεδιάσετε την παραπληρωματική της.



63. Δίνεται η γωνία $x\hat{O}y$ με μέτρο $\hat{\alpha}$ = 33°. Να βρείτε και να σχεδιάσετε την συμπληρωματική της.



Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

64. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb114.ggb.

(Α) Ελέγξετε αν ισχύει ότι δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

(Β) Διερευνήστε τα ερωτήματα του μικροπειράματος και καταγράψτε τις παρατηρήσεις που προέκυψαν.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

65. Να δικαιολογήσετε γιατί δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν τέσσερις ορθές γωνίες.

....

....

....

....

....

....

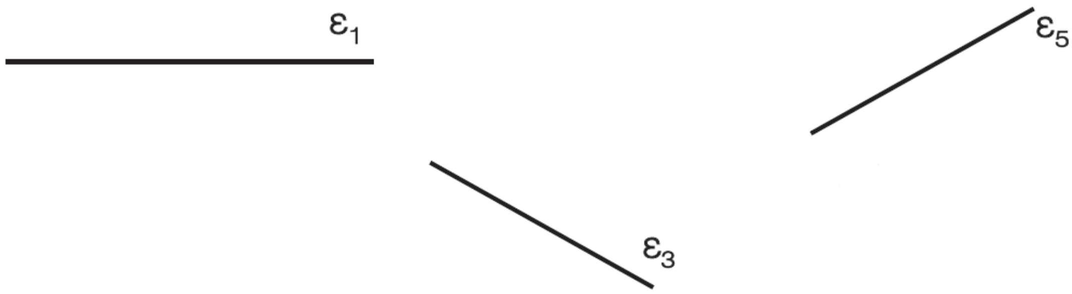
....

Β.1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

~

Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου λέγονται παράλληλες, αν δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.

66. Να σχεδιάσετε παράλληλες ευθείες σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.



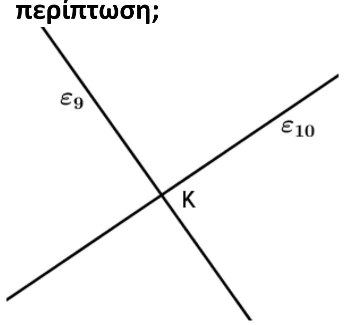
Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται **τεμνόμενες** και το κοινό τους σημείο λέγεται **σημείο τομής** των δύο ευθειών.

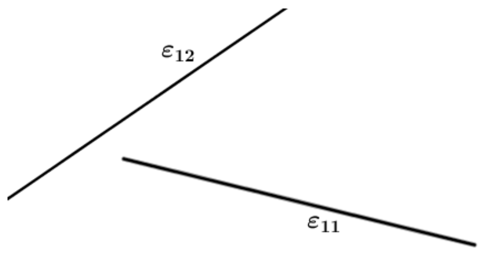
Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή θα τέμνονται.

Για να δηλωθεί ότι δύο ευθείες **ε_1**, και **ε_2** είναι παράλληλες, χρησιμοποιείται το σύμβολο "**//**". Η σχέση γράφεται: **ε1 // ε2.**

67. Να σχεδιάσετε τεμνόμενες ευθείες σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

68. Να εξετάσετε αν οι ακόλουθες ευθείες είναι τεμνόμενες. Τι παρατηρείτε σε κάθε μία περίπτωση;





....

....

....

....

....

....

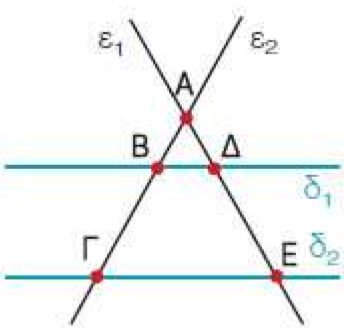
....

69. Να βρείτε:

(Α) ποιες από τις ευθείες του σχήματος είναι παράλληλες

(Β) ποιες από τις ευθείες του σχήματος είναι τεμνόμενες

(Γ) ποια ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα.



....

....

....

....

70. Να σχεδιάσετε ευθεία ε1 που να είναι παράλληλη προς μια ευθεία ε και να διέρχεται από σημείο Α, το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία ε.
Καταγράψτε την διαδικασία σχεδίασης.
(http://users.sch.gr/thafounar/classA/paraLine/paraLine.html)

....

....

....

....

....

....

....

....

Δύο ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες, θα λέγονται παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα και ισχύει ότι ΑΒ // ΓΔ.

Δύο ευθείες του επιπέδου **κάθετες σε μια ευθεία** είναι μεταξύ τους **παράλληλες**.

Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται μία και μοναδική ευθεία ε1 παράλληλη στην ε.

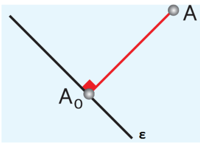
Ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» ορίζει ως παράλληλες: «ΤΙΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΕΚΕΙΝΕΣ ΠΟΥ ΕΥΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΙΔΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΠΡΟΕΚΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ ΚΙ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ ΜΕΡΗ ΔΕ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΙ ΣΕ ΚΑΝΕΝΑ ΑΠ' ΑΥΤΑ».

Το σημαντικότερο έργο Γεωμετρίας στην αρχαιότητα ήταν τα «Στοιχεία» (13 βιβλία) του Ευκλείδη (330 - 270 π.Χ.), που απετέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχτηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αναγνωρίζονται διεθνώς ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρωπίνου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μαζί με τη Βίβλο είναι από τα συγγράμματα που είχαν τις περισσότερες εκδόσεις.

Β.1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων

~

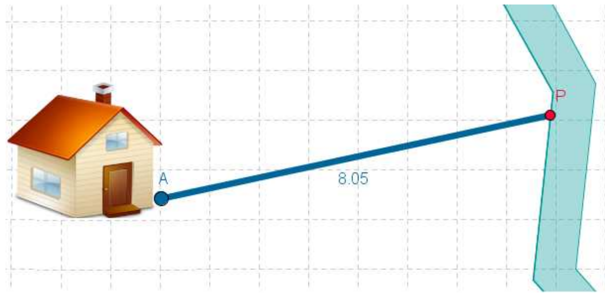
Απόσταση του σημείου **Α** από την ευθεία ε ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος **AA_0** από το σημείο **Α** προς την ευθεία **ε**.



71. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb115.ggb. Διερευνήστε τα ακόλουθα:

(Α) Βρείτε σε ποιο σημείο του δημόσιου αγωγού νερού, στο παρακάτω σχεδιάγραμμα, πρέπει να γίνει η σύνδεση με το σημείο Α του σπιτιού, ώστε ο σωλήνας να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η σύνδεση;

(Β) Πόσο εκτιμάτε ότι είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει ο σωλήνας με τον αγωγό στο σημείο που ο σωλήνας έχει το μικρότερο μήκος;

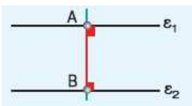


....

....

....

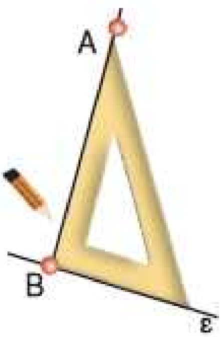
Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ' αυτές, π.χ. το **ΑΒ**.



72. (Α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

(Β) Να φέρετε από το σημείο Α παράλληλη στην ευθεία ε και να την ονομάστε ε_1.

(Γ) Να φέρετε την κάθετη από ένα άλλο σημείο της ε_1 στην ε.



....

....

....

....

Σχεδιάστε μία ευθεία και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το σημείο δοκιμάστε να φέρνετε ευθύγραμμα τμήματα από το Α προς την ε. Αναστοχαστείτε για το σημείο της ε η απόσταση του οποίου από το Α θα είναι ελάχιστη.

73. Να βρείτε σημείο μίας ευθείας ε, η απόσταση του οποίου από ένα σημείο Α εκτός αυτής να είναι η ελάχιστη.

....

....

....

....

....

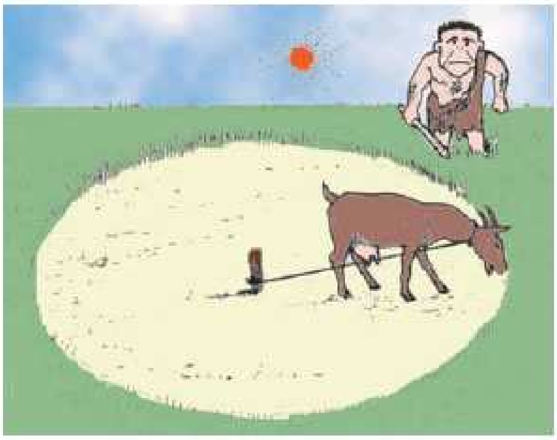
....

74. Να σχεδιάσετε δύο ευθείες ε1 και ε2 παράλληλες προς μια ευθεία ε, που να απέχουν από αυτή 3 cm.

Β.1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

∼

75. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb116.ggb.



Ο πρωτόγονος άνθρωπος για να μη χάσει την κατσίκα του την έδεσε με ένα σχοινί, σ' ένα ξύλινο πάσσαλο, μέσα στο λιβάδι. Όταν γύρισε να την πάρει είδε ότι η κατσίκα είχε βοσκήσει εκείνο το μέρος του λιβαδιού που της επέτρεπε το μήκος του σχοινιού να φθάσει. Έτσι, όλα τα χόρτα που απείχαν μικρότερη ή ίση απόσταση από το σχοινί, που ήταν δεμένη, είχαν φαγωθεί.

Ποια γεωμετρική έννοια χαρακτηρίζει την περιοχή της οποίας το χορτάρι φαγώθηκε;

....

....

76. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb117.ggb. Με ποιους τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί ο σχεδιασμός ενός κύκλου; Σκεφτείτε και άλλους εναλλακτικούς τρόπους σχεδίασης κύκλου.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο.

Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με ρ και λέγεται **ακτίνα του κύκλου.** Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο του κύκλου.**

Ένας κύκλος με κέντρο **Ο** και ακτίνα **ρ**, συμβολίζεται με συντομία **(Ο, ρ)**.

Για τον σχεδιασμό ενός κύκλου μπορεί να χρησιμοποιηθεί **διαβήτης**.

Δύο κύκλοι με ακτίνες ίσες είναι ίσοι.

Δύο σημεία Α και Β του κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη που το καθένα **λέγεται τόξο του κύκλου με άκρα τα Α και Β**.

Το **ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συνδέει δύο σημεία Α και Β** του κύκλου, λέγεται **χορδή** του κύκλου.

Η **χορδή** που περνάει **από το κέντρο** του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.

Η **διάμετρος** είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου, είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και **χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη** (ημικύκλια).

Κυκλικός δίσκος (Ο, ρ) είναι ο κύκλος (Ο, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει. Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο Ο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ.

77. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb118.ggb. Στη συνέχεια απαντήστε τα ακόλουθα:
(Α) Πότε δύο ή περισσότεροι κύκλοι καλούνται ομόκεντροι.
(Β) Να σχεδιάσετε έναν κύκλο και να φέρετε δύο χορδές του.
(Γ) Να φέρετε τη διάμετρο του κύκλου που σχεδιάσατε.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

78. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο, αν γνωρίζετε ότι τα μήκη των πλευρών του είναι: α = 3 cm, β = 2 cm και γ = 1,5 cm. Εργαστείτε στο μικροπείραμα: mpb119.ggb. Καταγράψτε τα βήματα κατασκευής. Στη συνέχεια κάντε την ανάλογη κατασκευή για τα συγκεκριμένα μήκη.

....
....
....
....

79. Να κατασκευάσετε τρίγωνο, για το οποίο γνωρίζετε ότι έχει δύο πλευρές 3 cm και 4 cm και των οποίων η περιεχόμενη γωνία είναι 55^{o}.

80. Να κατασκευάσετε τρίγωνο, για το οποίο γνωρίζετε ότι έχει μία πλευρά 3 cm και τις προσκείμενες γωνίες 40^{o} και 100^{o}.

Β.1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

~

Όταν ευθεία και κύκλος **δεν έχουν κανένα κοινό σημείο η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου**.

Όταν η απόσταση από το κέντρο του κύκλου στην ευθεία ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου, η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου.

Όταν ευθεία και κύκλος **έχουν ένα μόνο κοινό σημείο Μ**, η ευθεία λέγεται **εφαπτόμενη** του κύκλου στο σημείο Μ.

Όταν η απόσταση από το κέντρο του κύκλου στην ευθεία ε είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου, η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Μ.

81. Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις που μπορεί να έχουν σ' ένα επίπεδο ένας κύκλος και μια ευθεία. Για το σκοπό αυτό εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb120.ggb. Να καταγράψτε τις περιπτώσεις που διακρίνετε και σχεδιάστε τα αντίστοιχα σχήματα.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Όταν ευθεία και κύκλος **έχουν δύο κοινά σημεία Α** και **Β**, η ευθεία λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου **ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα Α και Β.**

Όταν η απόσταση από το κέντρο του κύκλου στην ευθεία ε είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου, η ευθεία είναι τέμνουσα του κύκλου.

Αν Μ το σημείο που τέμνονται οι εφαπτόμενες, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ και ΒΜ λέγονται εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου.

82. Να σχεδιάσετε ευθεία που να εφάπτεται σε σημείο ενός κύκλου. Για τις ανάγκες της κατασκευής εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb121.ggb. Καταγράψτε τα βήματα της κατασκευής και στη συνέχεια πραγματοποιήστε τον δικό σας σχεδιασμό.

....

....

....

83. Να σχεδιάσετε κύκλο που να εφάπτεται σε σημείο μιας ευθείας. Περιγράψτε την κατασκευή.

....

....

....

84. Να σχεδιάσετε εφαπτόμενες ενός κύκλου (Ο, ρ) στα άκρα Α και Β μιας χορδής του ΑΒ. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb122.ggb και καταγράψτε τα συμπεράσματα.

....

....

....

....

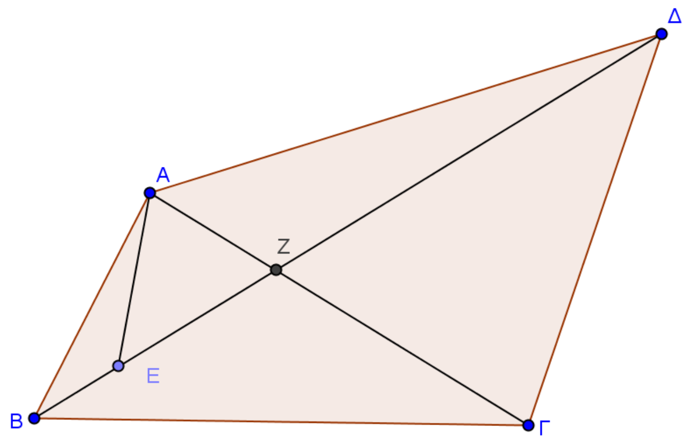
....

....

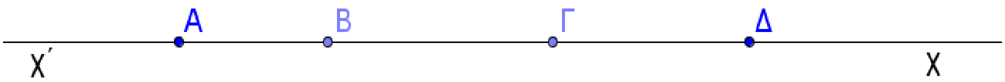
Ασκήσεις προς λύση

Σημείο, Ευθύγραμμο τμήμα, Ευθεία, Ημιευθεία, Επίπεδο, Ημιεπίπεδο

1.1. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του σχήματος.

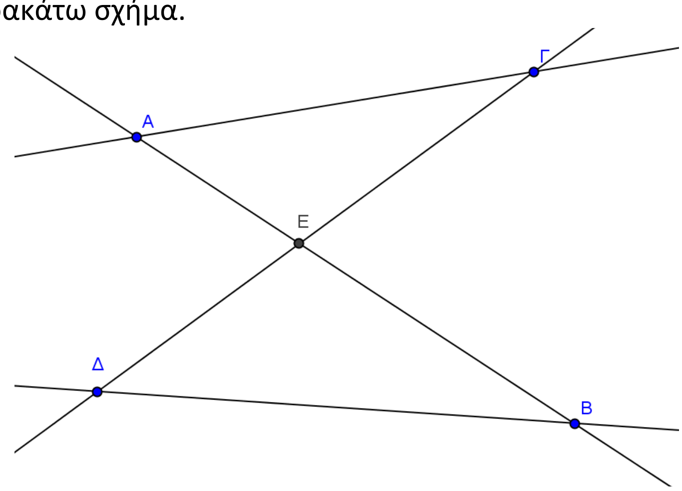


1.2. Δίνεται το σχήμα.

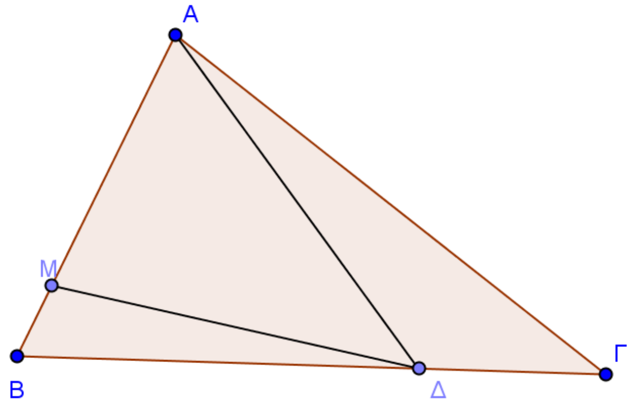


Α. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα σημεία Α, Β, Γ και Δ.
Β. Να γράψετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν για ένα άκρο τους το σημείο Β.
Γ. Να ονομάσετε όλες τις ημιευθείες που ορίζονται στο σχήμα.
Δ. Να γράψετε όλα τα ζεύγη των ημιευθειών που είναι αντικείμενες.

1.3. Να γράψετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, όλες τις ευθείες και όλες τις ημιευθείες που ορίζονται στο παρακάτω σχήμα.

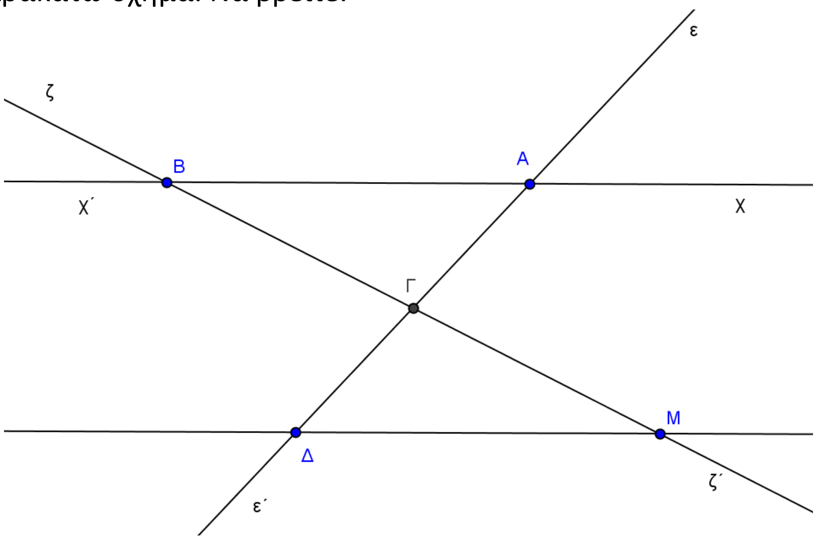


1.4. Δίνεται το παρακάτω σχήμα.



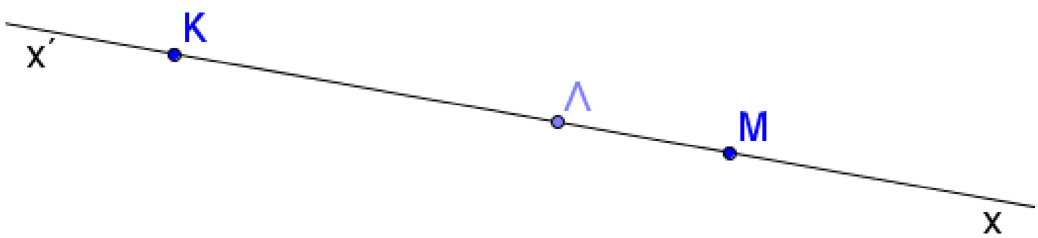
Α. Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που υπάρχουν στο σχήμα.
Β. Να ονομάσετε τα τρίγωνα αυτά.

1.5. Δίνεται το παρακάτω σχήμα. Να βρείτε:



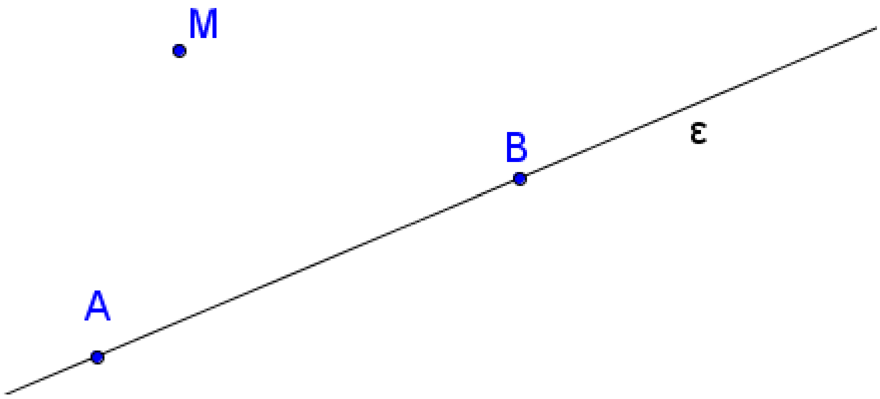
Α. Πόσες ευθείες υπάρχουν στο σχήμα.
Β. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα υπάρχουν στο σχήμα που να έχουν άκρα δύο από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Μ.
Γ. Πόσες ημιευθείες υπάρχουν στο σχήμα που να έχουν αρχή ένα από τα σημεία Β, Δ.

1.6. Δίνεται η ευθεία χ΄χ και τα σημεία αυτής Κ, Λ, Μ.



Α. Να γράψετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία αυτά.
Β. Να γράψετε όλες τις ημιευθείες που έχουν αρχή τα σημεία αυτά.
Γ. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω ημιευθείες είναι αντικείμενες.

1.7. Έστω σημείο Μ και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το Μ. Θεωρούμε τα σημεία Α, Β της ευθείας (ε).

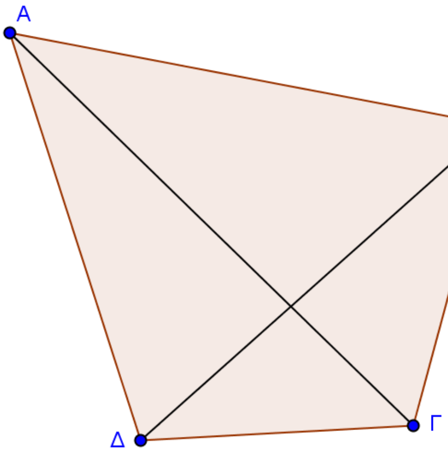


Α. Πόσες ευθείες διέρχονται από το Μ;

Β. Πόσες από τις παραπάνω ευθείες διέρχονται από το Α;

Γ. Υπάρχει ευθεία που να διέρχεται από τα σημεία Μ, Α, Β; Αιτιολογήστε.

1.8. Δίνεται το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τις γωνίες που περιέχονται:



Α. Στις πλευρές ΓΒ και ΓΔ.

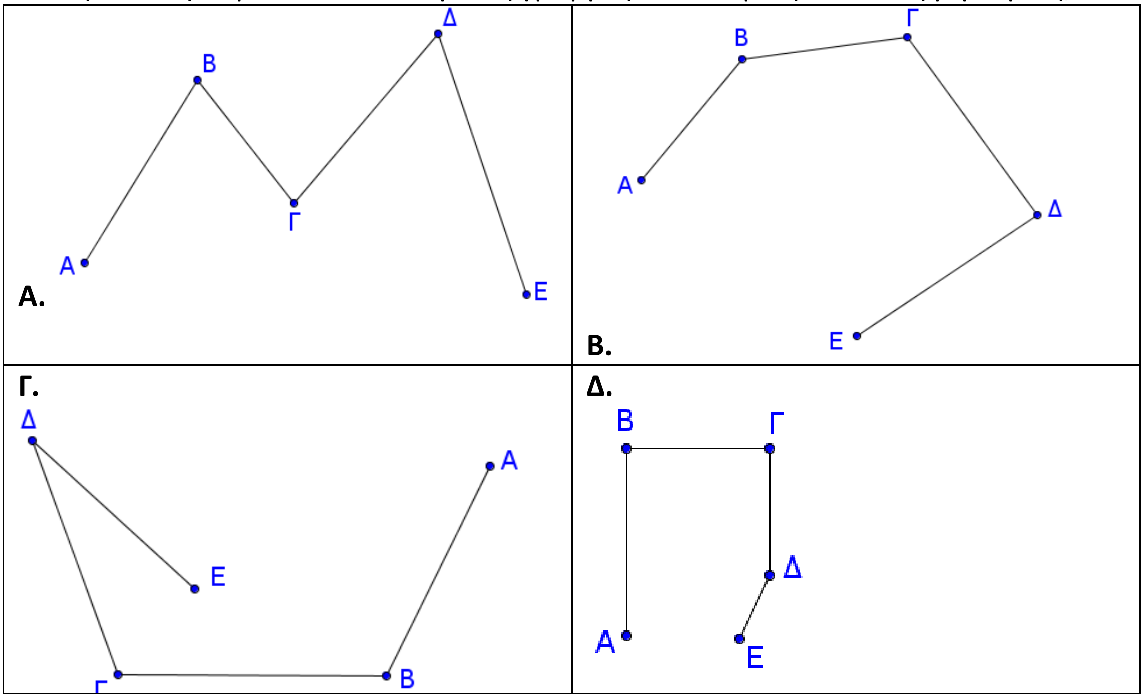
Β. Στη διαγώνιο ΑΓ και στην πλευρά ΑΒ.

Γ. Στις πλευρές ΑΔ και ΑΒ.

Δ. Στη διαγώνιο ΔΒ και στην πλευρά ΔΓ.

Γωνία-Γραμμή-Επίπεδα σχήματα-Ευθύγραμμα τμήματα-Ίσα σχήματα Είδη γωνιών-Εφεξής-Διαδοχικές-Άθροισμα γωνιών

1.9. Ποιες από τις παρακάτω τεθλασμένες γραμμές είναι κυρτές και ποιες μη κυρτές;



1.10. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Το μέσο Μ απέχει από το σημείο Α 3 cm.
- **Α.** Να βρείτε πόσο απέχει το σημείο Μ από το Β.
- **Β.** Ποιο είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ;

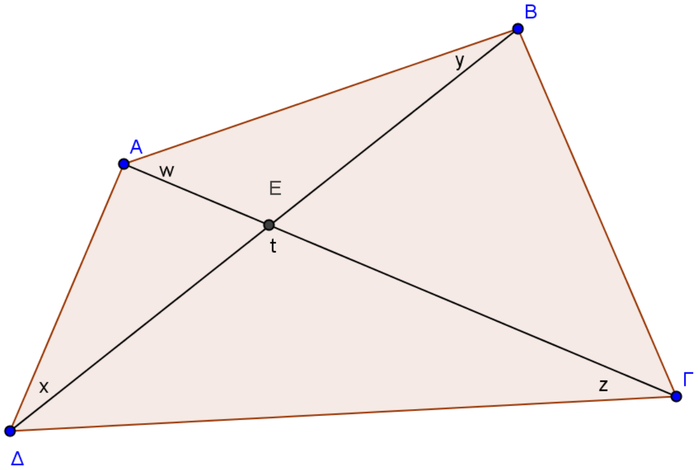
1.11. Δίνεται μια ευθεία (ε). Θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν στην ευθεία (ε) με τη σειρά που δίνονται. Για τα σημεία ισχύει ΚΛ = 4 cm, ΛΜ = 2 cm και ΜΝ = 4 cm.
- **Α.** Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΜ και ΛΝ είναι ίσα.
- **Β.** Να βρείτε το μέσο Ρ του ΚΝ και να εξετάσετε αν αυτό είναι και μέσο του ΛΜ.

1.12. Σε ημιευθεία Αx παίρνουμε τα σημεία Κ, Λ και Μ έτσι, ώστε ΑΛ = 4 cm, ΛΜ = 1 cm και ΑΚ = 2 cm. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:
- **Α.** ΑΜ
- **Β.** ΑΛ - ΑΚ
- **Γ.** ΑΜ - ΑΚ

1.13. Θεωρούμε μια ημιευθεία Οx και παίρνουμε τα σημεία Α και Β έτσι, ώστε ΟΑ = 5 cm και ΟΒ = 7 cm. Αν Γ είναι το μέσο του ΑΒ, να βρείτε το μήκος του ΟΓ.

1.14. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Μ και σχηματίζουμε το τρίγωνο ΑΒΜ. Να ονομάσετε τις γωνίες που είναι:
- **Α.** απέναντι της ΑΒ στο τρίγωνο ΑΒΜ.
- **Β.** απέναντι της ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ.
- **Γ.** προσκείμενες της ΑΜ στο τρίγωνο ΑΒΜ.
- **Δ.** περιεχόμενες των ΑΒ , ΑΜ στο τρίγωνο ΑΒΜ.

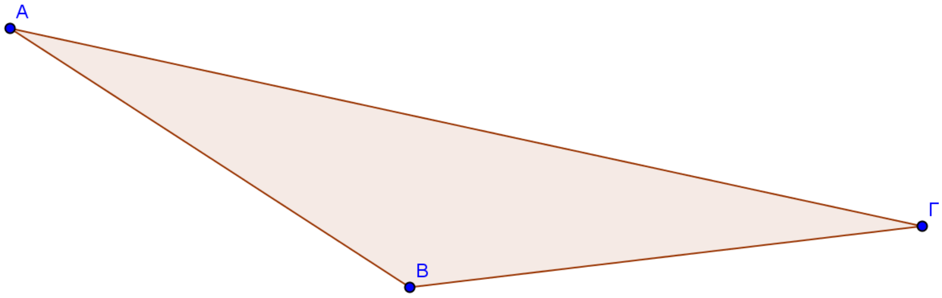
1.15. Γράψτε με τρία γράμματα τις γωνίες x, y, z, w, t στο παρακάτω σχήμα.



1.16. Σε ευθεία x΄x θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 12 cm και σημείο Γ τέτοιο ώστε $ΑΓ = \frac{1}{3}ΓΒ$.

Να βρείτε τα μήκη ΑΓ, ΓΒ.

1.17. Να σχεδιάσετε τα ύψη στο παρακάτω σχήμα.



1.18. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 4 cm. Να χαράξετε την κάθετη ευθεία προς το ευθύγραμμο τμήμα:

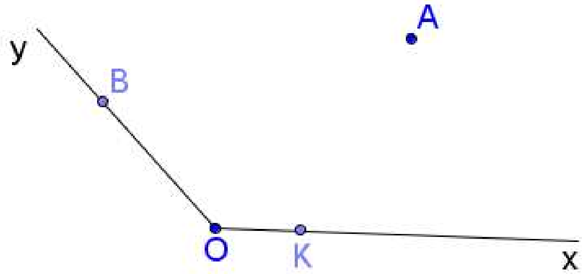
Α. στο σημείο Α.

Β. στο σημείο Β.

Γ. στο μέσο Μ του ΑΒ.

1.19. Να κατασκευάσετε γωνία $x\hat{O}y = 120^\circ$. Φέρνουμε την Οδ κάθετη στην Οx, στο εσωτερικό της $x\hat{O}y$. Να υπολογίσετε τη γωνία $δ\hat{O}y$.

1.20. Στο παρακάτω σχήμα να φέρετε κάθετη ευθεία:



Α. από το Α στην Οy.

Β. από το Α στην Οx.

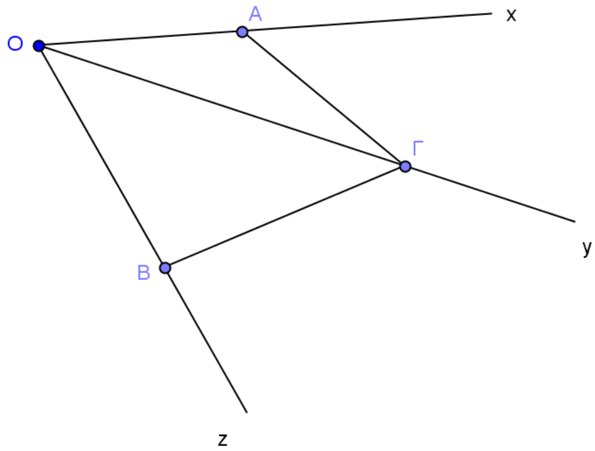
Γ. στην Οy στο Β.

Δ. στην Οx στο Κ.

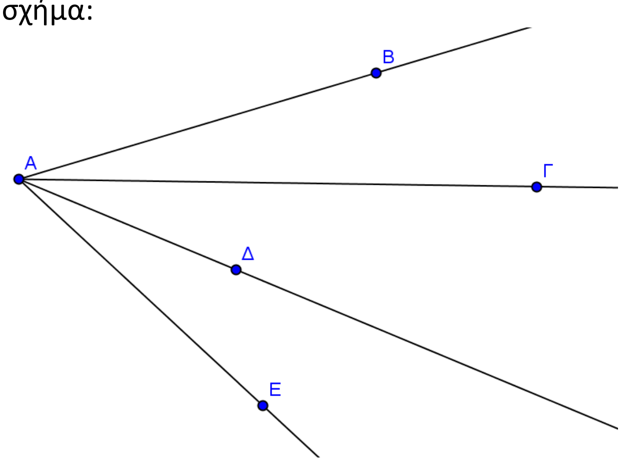
1.21. Να βρείτε ποιο ευθύγραμμο τμήμα από τα παρακάτω είναι μεγαλύτερο και ποιο το μικρότερο:

Α. 47,3 cm
Β. 4,62 m
Γ. 481 mm
Δ. 46,5 dm

1.22. Σημειώστε τις κυρτές εφεξής γωνίες που υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα:

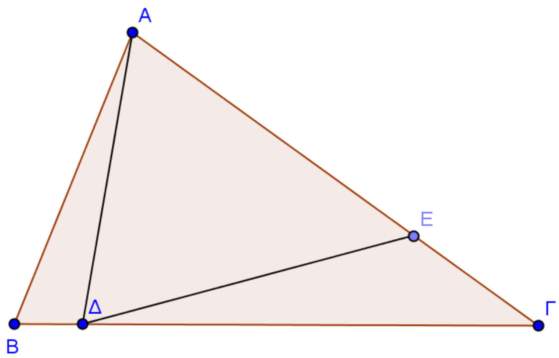


1.23. Δίνεται το παρακάτω σχήμα:



Α. Να σημειώσετε τα ζεύγη των εφεξής γωνιών του σχήματος.
Β. Να γράψετε τρείς γωνίες του σχήματος που είναι διαδοχικές.

1.24. Να γράψετε τα ζεύγη των εφεξής γωνιών που υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα.



Παραπληρωματικές, Συμπληρωματικές και Κατακορυφήν γωνίες

1.25. Μια γωνία είναι τριπλάσια από τη συμπληρωματική της. Πόσες μοίρες είναι;

1.26. Μια γωνία είναι 30° μεγαλύτερη από την συμπληρωματική της. Πόσες μοίρες είναι η παραπληρωματική της;

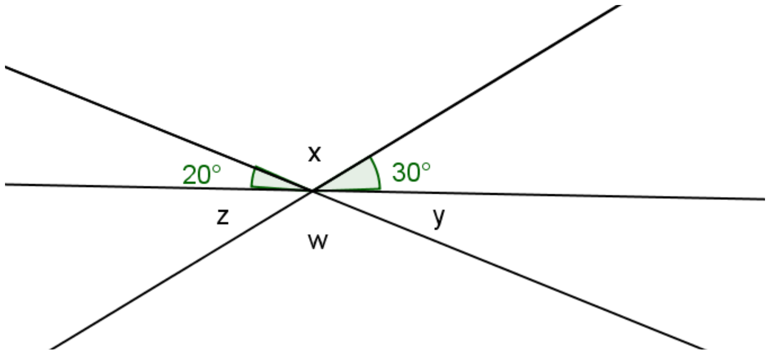
1.27. Μια γωνία είναι το $\frac{1}{4}$ ευθείας γωνίας. Πόσες μοίρες είναι η παραπληρωματική της;

1.28. Μία γωνία είναι τα $\frac{5}{16}$ της ορθής. Πόσες μοίρες είναι η συμπληρωματική της;

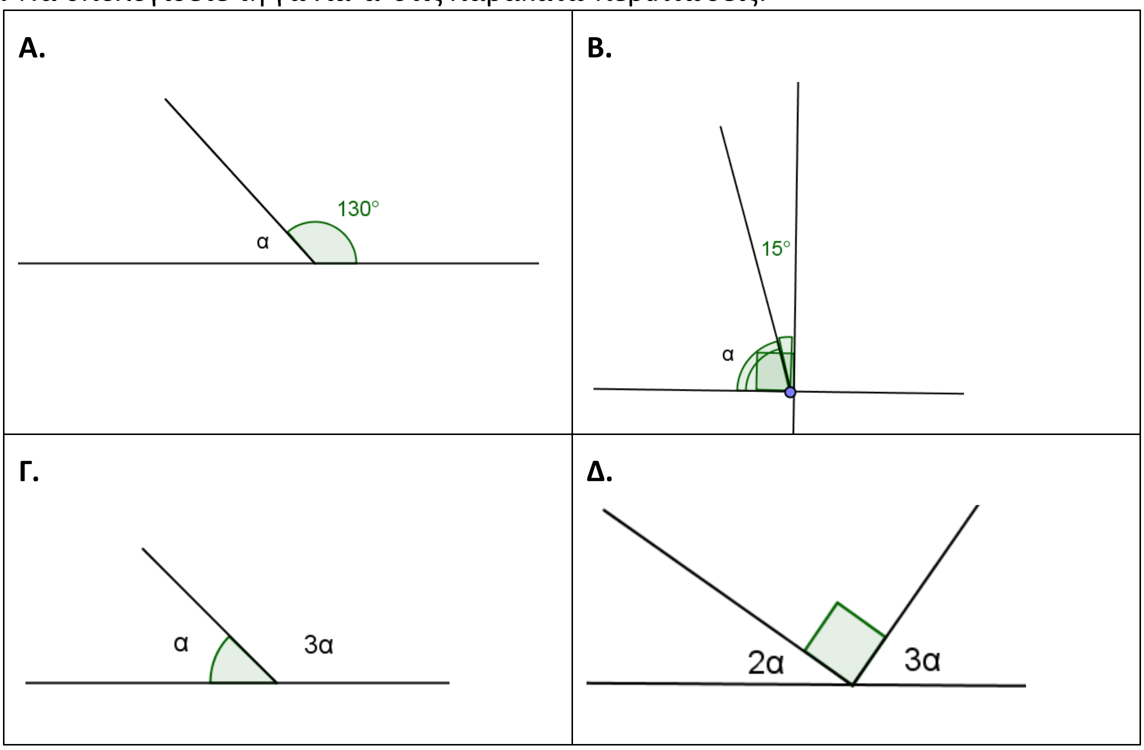
1.29. Δύο γωνίες είναι εφεξής και συμπληρωματικές. Αν διαφέρουν κατά 20° να υπολογίσετε τις γωνίες.

1.30. Τρείς εφεξής γωνίες $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ έχουν άθροισμα 150°. Τα μέτρα τους είναι ανάλογα των αριθμών 2, 3, 5 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

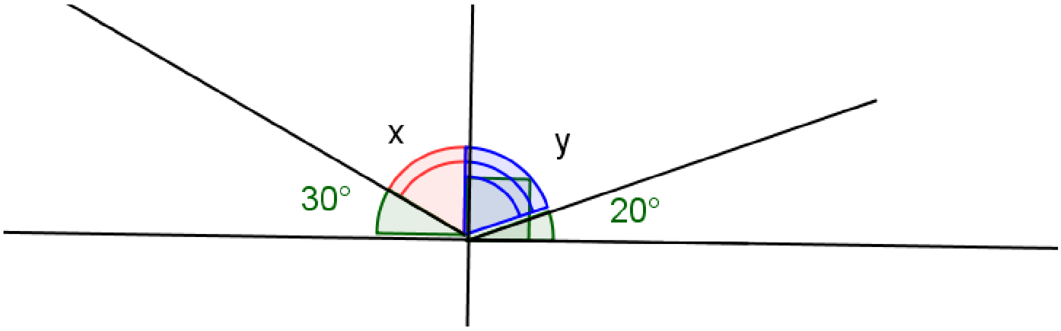
1.31. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{w}$ του σχήματος.



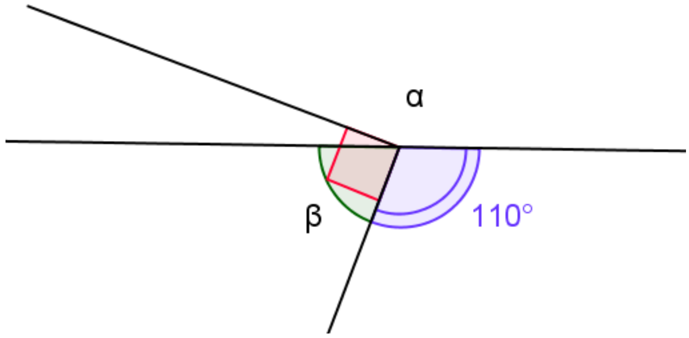
1.32. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\alpha}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:



1.33. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$ του σχήματος.

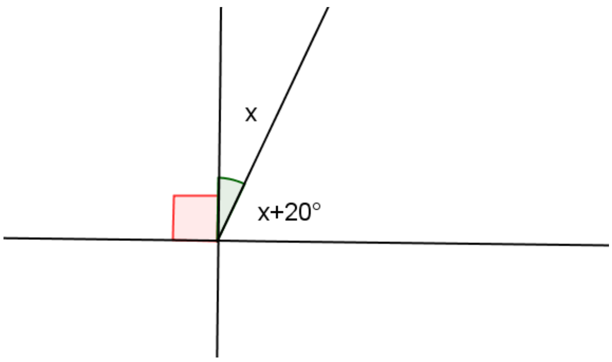


1.34. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ του σχήματος.

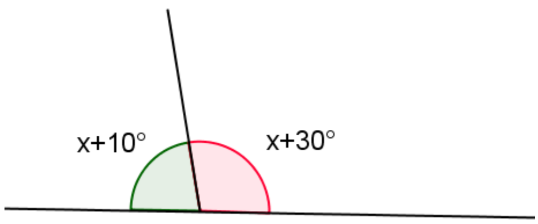


1.35. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{x}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

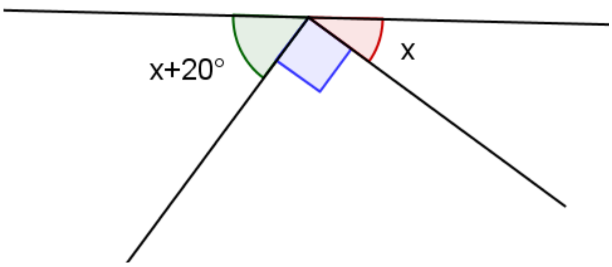
Α.



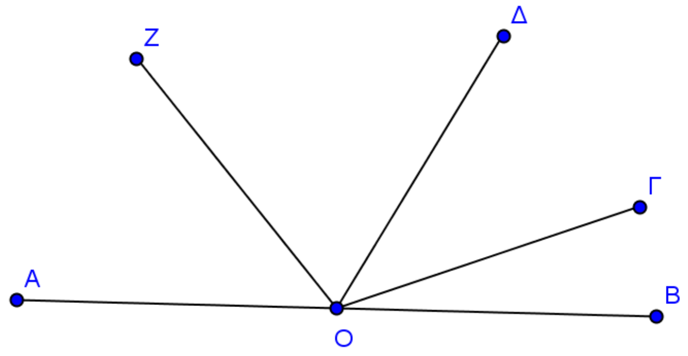
Β.



Γ.

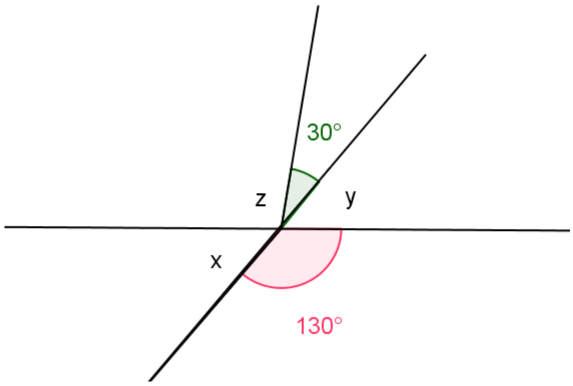


1.36. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\widehat{ΓΟΔ} = 40^\circ, \widehat{ΑΟΓ} = 160^\circ$ και $\widehat{ΒΟΖ} = 130^\circ$

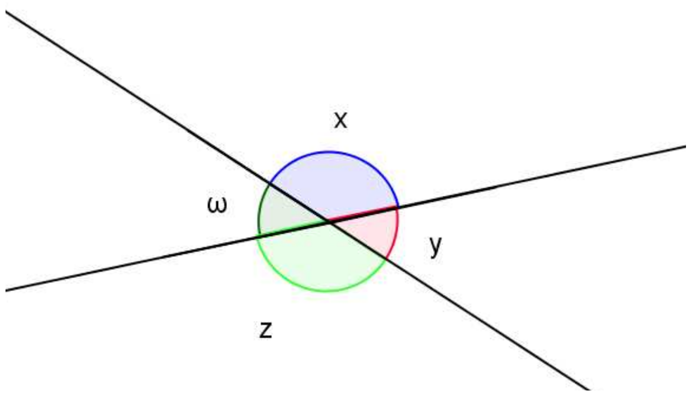


Να υπολογίσετε τις γωνίες $Α\hat{Ο}Ζ, Β\hat{Ο}Γ$ και $Δ\hat{Ο}Ζ$.

1.37. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ του παρακάτω σχήματος

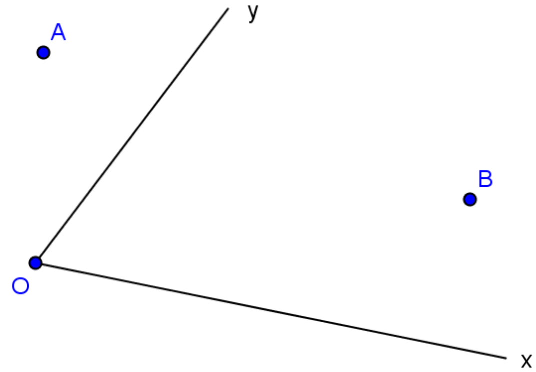


1.38. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος, αν $\hat{x} = \frac{1}{3}\hat{y}$.

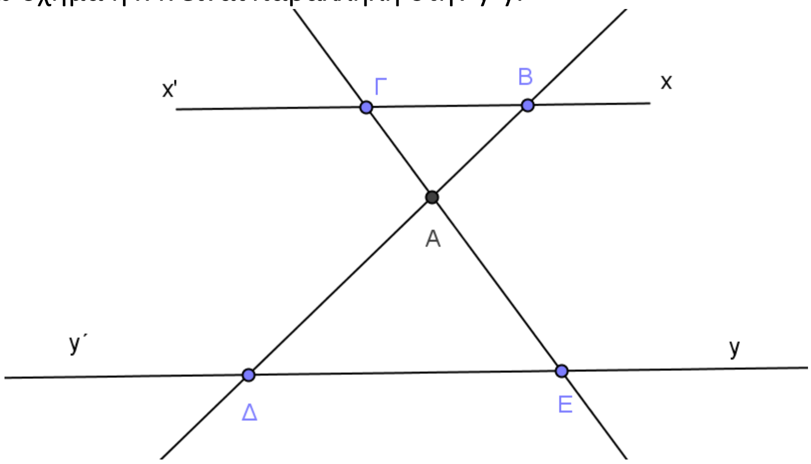


Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

1.39. Σχεδιάστε τις παράλληλες στις Οx και Οy από τα σημεία Α και Β.



1.40. Στο παρακάτω σχήμα η x΄x είναι παράλληλη στην y΄y.



- **Α.** Να φέρετε την ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στις x΄x και y΄y.
- **Β.** Να βρείτε τις ημιευθείες που είναι παράλληλες στην x΄x.
- **Γ.** Να βρείτε τις ημιευθείες που είναι παράλληλες στην y΄y.

1.41. Να βρείτε τις δυνατές θέσεις που μπορούν να έχουν τρεις διαφορετικές ευθείες στο επίπεδο.

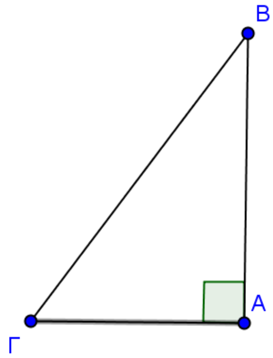
1.42. Δίνεται ευθεία x΄x και ένα σημείο αυτής Μ. Να φέρετε μια ευθεία (ε) κάθετη στην x΄x στο Μ. Να πάρετε στην ευθεία (ε) σημείο Δ. Να φέρετε κάθετη ευθεία (δ) στην ευθεία (ε) στο σημείο Δ. Να πάρετε σημείο Ζ στην ευθεία (δ). Να φέρετε ευθεία (η) κάθετη στην (δ) στο σημείο Ζ. Να βρείτε τη σχέση που έχουν οι ευθείες x΄x και (δ) όπως και οι ευθείες (δ) και (η).

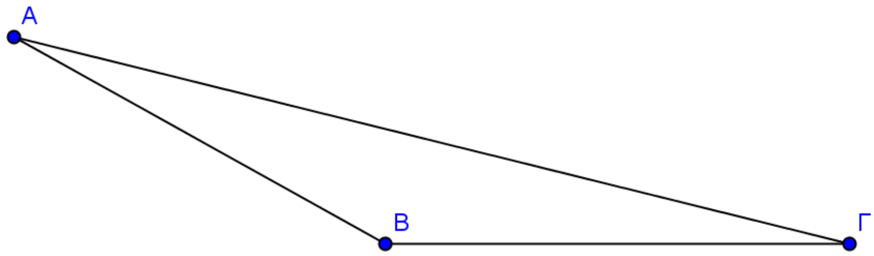
1.43. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ και ένα σημείο Μ στην προέκταση του προς το μέρος του Ο. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΟΑΒ που να έχει ύψος το ΒΜ.

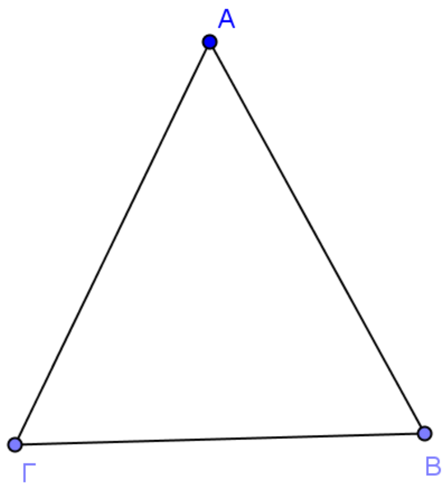
Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων

1.44. Δίνεται ευθεία ε και ένα σημείο Ο εκτός της ευθείας. Να βρείτε το σημείο της ευθείας του οποίου η απόσταση από το Ο είναι η ελάχιστη δυνατή.

1.45. Να σχεδιάσετε τα ύψη των παρακάτω τριγώνων.







1.46. Δίνεται η γωνία xOy. Το σημείο Α βρίσκεται στην πλευρά Ox και το σημείο Β στην πλευρά Oy. Από το σημείο Α φέρτε παράλληλη ευθεία στην Oy και από το σημείο Β φέρτε παράλληλη στην ευθεία Ox οι οποίες τέμνονται στο σημείο Κ.

Α. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα.

Β. Να φέρετε τις αποστάσεις του σημείου Ο από τις παράλληλες που φέρατε.

1.47. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και Μ το μέσο του. Μια ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Μ. Να φέρετε τις αποστάσεις των σημείων Κ,Λ από την ευθεία ε.

Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

1.48. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ = 6 cm. Να γραμμοσκιάσετε το τμήμα που απέχει από το Κ το πολύ 4 cm και από το Λ το πολύ 5 cm.

1.49. Να σημειώσετε ένα σημείο Α και να γραμμοσκιάσετε τα σημεία του επιπέδου τα οποία απέχουν από το Α:

Α. λιγότερο από 4 cm.

Β. το πολύ 3 cm.

Γ. περισσότερο από 5 cm.

Δ. περισσότερο από 3 cm και λιγότερο από 5 cm.

1.50. Να σχεδιάσετε δύο κύκλους με κέντρο Ο και ακτίνες 3 cm και 5 cm αντίστοιχα.

Α. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση μεγαλύτερη από 3 cm και μικρότερη από 5 cm.

Β. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση μεγαλύτερη ή ίση από 3 cm και μικρότερη ή ίση από 5 cm.

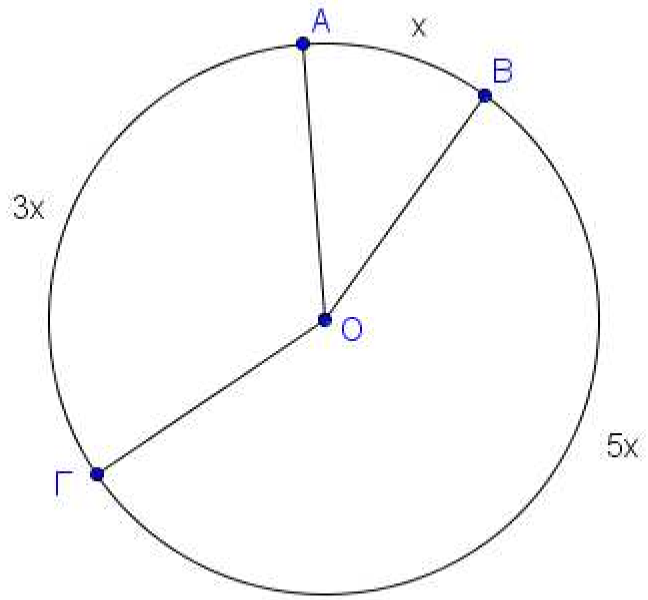
1.51. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ = 4 cm. Σχεδιάστε τους κύκλους (Ο, ΟΑ) και (Α, ΟΑ). Οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Μ και Λ. Σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΟΚΑΛ.

Α. Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΟΚΑΛ έχει ίσες πλευρές.

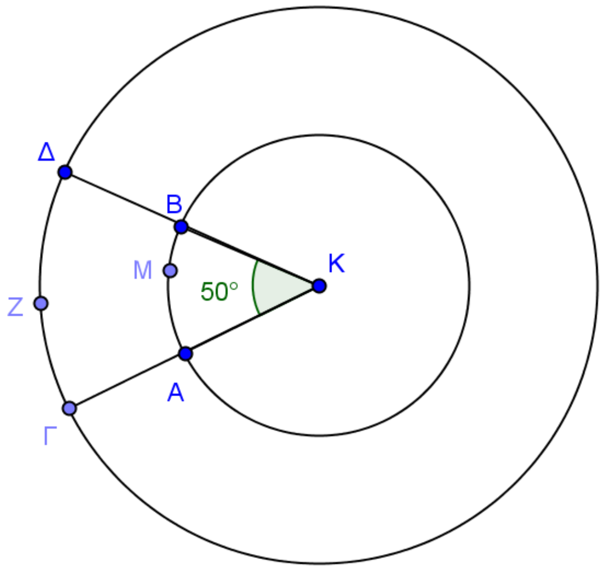
Β. Πόσο είναι το μήκος κάθε πλευράς.

Επίκεντρη γωνία

1.52. ***Δίνεται το παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος.



1.53. ***Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (με ίδιο κέντρο) με κέντρο το Κ και μια επίκεντρη γωνία 50°.**

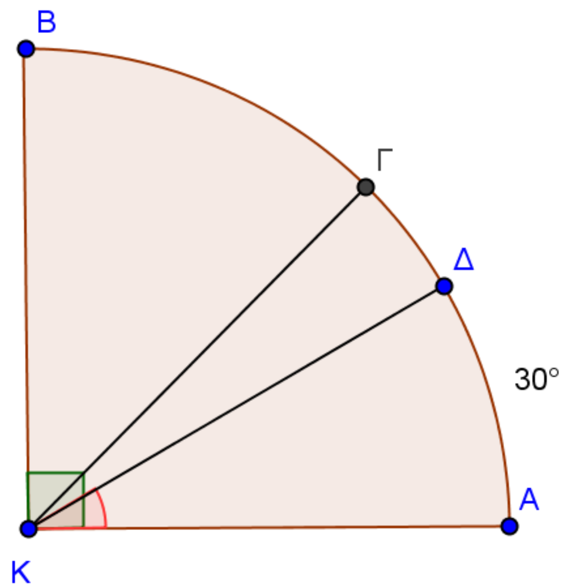


Α. Πόσες μοίρες είναι το τόξο $\overset{\frown}{ΑΜΒ}$;

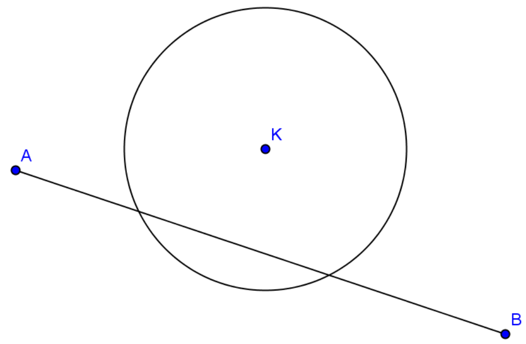
Β. Πόσες μοίρες είναι το τόξο $\overset{\frown}{ΓΖΔ}$;

Γ. Είναι ίσα μεταξύ τους τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΜΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΖΔ}$;.Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

1.54. ***Στο τεταρτοκύκλιο του σχήματος το τόξο $\overset{\frown}{ΑΔ}$ είναι 30°. Η ΚΓ είναι διχοτόμος του τεταρτοκυκλίου. Υπολογίστε το τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$.**

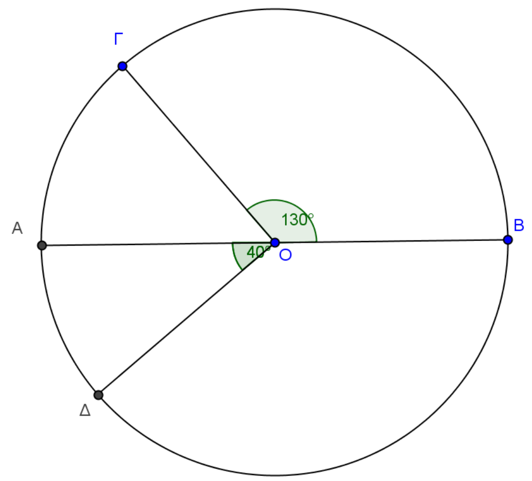


1.55. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα ρ =2 cm:



Α. Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση του κέντρου Κ από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
Β. Ποια σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ απέχουν από το κέντρο Κ απόσταση 2cm;

1.56. ***Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, ρ). Δίνονται οι γωνίες $\hat{ΑΟΔ} = 40^\circ$, $\hat{ΒΟΓ} = 130^\circ$.

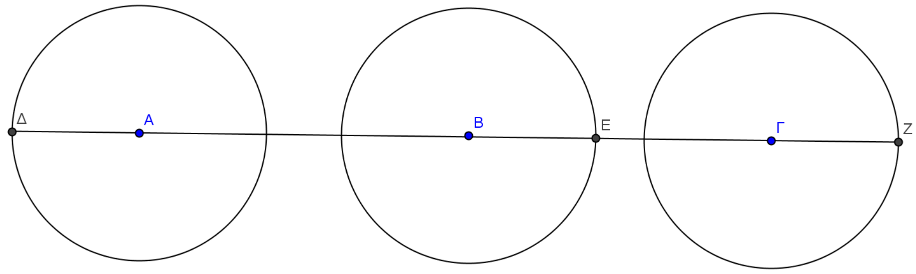


Α. Να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{ΑΟΓ}$, $\overset{\frown}{ΔΟΒ}$.

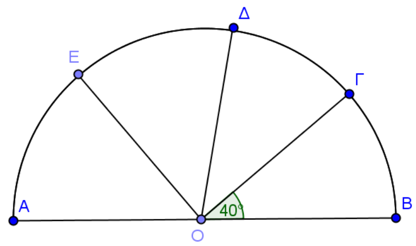
Β. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{ΓΟΔ}$.

1.57. Να σχεδιάσετε κύκλο (Κ, 2 cm) και να πάρετε στον κύκλο σημείο Ο. Στην ημιευθεία ΚΟ να πάρετε σημεία Α και Β, ώστε ΚΑ = 1,5 cm και ΚΒ = 4 cm.
Α. Να φέρετε την κάθετη ευθεία (ε) στην ΚΟ στο σημείο Α και να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας (ε) με τον κύκλο.
Β. Να φέρετε την κάθετη ευθεία (δ) στην ΚΟ στο σημείο Β και να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας (δ) με τον κύκλο.

1.58. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν 3 ίσοι κύκλοι με ρ = 2 cm, ΑΒ = 5 cm και ΒΓ = 4,5 cm. Να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΔΒ, ΑΓ, ΒΖ, ΔΖ.



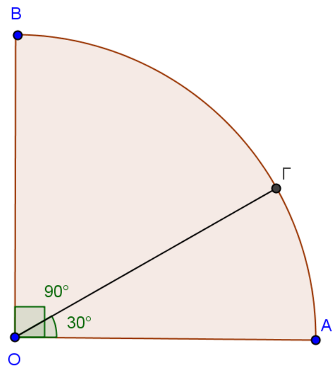
1.59. *Στο παραπάνω σχήμα έχουμε $\hat{ΒΟΓ} = 40^\circ$ και η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ΒΟΔ}$.



Α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{ΒΟΔ}$.

Β. Αν η ΟΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ΑΟΔ}$,να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΕΟΓ}$.

1.60. *Στο παρακάτω τεταρτοκύκλιο το τόξο ΑΓ είναι 30° .Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{ΒΟΓ}$.



1.61. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (δ) οι οποίες απέχουν 3cm.Έστω Ο ένα σημείο της ευθείας (δ).

Α. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας (ε) που απέχουν από το Ο απόσταση 4cm.

Β. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας (ε) που απέχουν από το Ο απόσταση 3cm.

Γ. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας (δ) που απέχουν από το Ο απόσταση 2cm.

1.62. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες που απέχουν μεταξύ τους 6 cm.

Α. Βρείτε σημείο Ο, που να απέχει από τις ευθείες 3 cm.

Β. Να βρείτε τη θέση που έχουν οι ευθείες από τους παρακάτω κύκλους, (Ο, 2,9 cm), (Ο, 2 cm), (Ο, 3,1 cm), (Ο, 3 cm).

* Η συγκεκριμένη άσκηση περιλαμβάνεται για την πληρότητα του υλικού.