

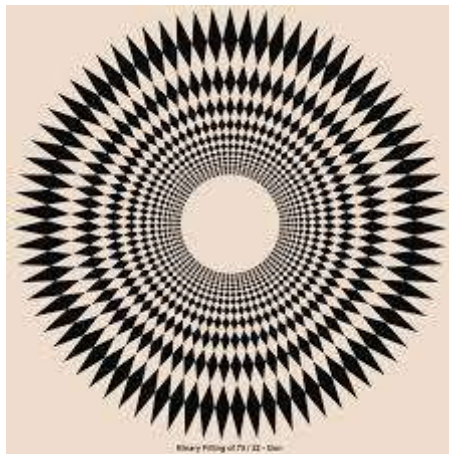
Μπάμπης Στεργίου

Μαθηματική Ομάδα

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Διαγωνισμοί της ΕΜΕ

ΘΑΛΗΣ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ



Προσωρινό
αρχείο

Βιβλίο του Μαθητή



Αντί προλόγου

Φίλε μαθητή !

Πρώτα από όλα σε συγχαίρουμε για την αγάπη σου προς τα μαθηματικά και για την απόφασή σου να συμμετάσχεις στο διαγωνισμό ΘΑΛΗΣ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Οι σημειώσεις που κρατάς δεν είναι τίποτα παραπάνω από έναν πρόχειρο οδηγό, που θα σου επιτρέψει σε πολύ σύντομο διάστημα να κάνεις μια εκτίμηση για το πνεύμα και το επίπεδο των θεμάτων. Πρέπει όμως να σου πούμε από την αρχή ότι η συμμετοχή με αξιώσεις σε έναν διαγωνισμό μαθηματικών απαιτεί συστηματική και πολύμηνη προετοιμασία. Σε κάθε χρονικό διάστημα μικρότερο των πέντε μηνών, δεν είναι παρά μόνο να γίνει μια καλή ίσως ενημέρωση, η οποία μπορεί να συνοδευτεί από μια διάκριση στο Θαλή, η συνέχεια όμως θα είναι πολύ δύσκολη κι αυτό θα το καταλάβει ο διαγωνιζόμενος στην τελευταία φάση, στον Αρχιμήδη Νέων, αν, κάτι που ευχόμαστε, διακριθεί και στον Ευκλείδη. Μια πιο οργανωμένη όμως και άρτια σχεδιασμένη συμμετοχή, μπορεί να στηριχθεί στη βαθειά μελέτη ειδικών βιβλίων που είναι γραμμένα για το σκοπό αυτό και που θα βρεις στο τέλος των σημειώσεων αυτών.

Οι σημειώσεις αυτές μπορούν να είναι πιο αποτελεσματικές, όταν έχουν την καθοδήγηση ενός μαθηματικού, που θα σου υπενθυμίσει γρήγορα τη βασική θεωρία κάθε κεφαλαίου και θα σου επιλέξει κατάλληλα παραδείγματα από τα πολλά που περιέχονται εδώ. Όπως και να έχουν όμως τα πράγματα, η επιτυχία είναι αποκλειστικά δική σου υπόθεση. Ήδη η επιλογή σου να πάρεις μέρος στο διαγωνισμό είναι το πρώτο σημαντικό βήμα, οπότε από κάθε άποψη μπορείς να νοιώθεις ικανοποιημένος.

Σου ευχόμαστε ολόψυχα καλή επιτυχία και καλή συνέχεια μέχρι τον Αρχιμήδη και τη Βαλκανιάδα Νέων !



***Αφιερώνεται στους συναδέλφους μαθηματικούς και τους μαθητές τους που συμμετέχουν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς !!!

Μπάμπης Στεργίου

Μπάμπης Στεργίου

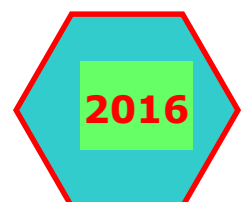
Μαθηματική Ομάδα

Διαγωνισμοί της ΕΜΕ

ΘΑΛΗΣ-ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Βιβλίο του Μαθητή



Αφιερώνεται στους συναδέλφους και τους μαθητές τους που συμμετέχουν στους
μαθηματικούς διαγωνισμούς !!!

Μπάμπης

Διαγωνισμοί της ΕΜΕ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΑΛΗΣ – ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μπάμπης Στεργίου

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

9.1 Στο διπλανό πολλαπλασιασμό έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα ψηφία από το 1 έως και το 9. Να συμπληρώσετε αυτόν τον πολλαπλασιασμό.

$$\begin{array}{r} \boxed{2} \boxed{} \boxed{} \\ \times \boxed{} \boxed{8} \boxed{} \\ \hline \boxed{5} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \end{array}$$

(Ευκλείδης – 2002)

9.2 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2415 - 4 \cdot 10^2 + 2003^0 - 2 \cdot 3^2 + 2.$$

(Θαλής – 2004)

9.3 α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008.$$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$B = \frac{3}{8} \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \text{ και}$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right).$$

(Ευκλείδης – 2010)

9.4 Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = [(-1)^{10} + (-1)^{11}] \cdot (2^4 - 3^2) + 5^{12} : 5^{10} - 20.$$

(Ευκλείδης – 2002)

9.5 Όταν ένα δοχείο είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από όταν είναι κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα χωράει το δοχείο αυτό, όταν είναι γεμάτο;

(Θαλής – 1999)

9.6 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\bullet \quad A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2001}{2000},$$

$$\bullet \quad B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2000}.$$

Να βρείτε τον αριθμό $A - B$.

(Θαλής – 2001)

9.7 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1999},$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \dots + \frac{3994}{3996} + \frac{3996}{3998}.$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $\frac{\alpha + \beta}{2}$, δηλαδή το μέσο όρο των αριθμών α και β .

(Θαλής – 2000)

9.8 Να γράψετε την παράσταση:

$$A = 3 \cdot 2^{18} \cdot [1 - (-1)^3] - 2^6 \cdot (3^2 - 1)(3^3 - 11)(3^4 - 17)$$

ως δύναμη με βάση το 2.

(Ευκλείδης – 2004)

9.9 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1 \text{ και}$$

$$B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1).$$

α) Να βρείτε τις παραστάσεις A , B .

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\frac{A}{20B} \text{ και } \frac{23B}{A}.$$

(Θαλής – 2001)

9.10 α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$A = \frac{1}{8^2} \left(2^3 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \text{ και}$$

$$B = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{3^3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{3^2}{2^7}$$

β) Αν $\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} = \frac{1}{6}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{8-\alpha}{4\alpha} + \frac{12-2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma-3}{12}.$$

(Ευκλείδης – 2011)

9.11 Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^{499} \text{ και}$$

$$B = 2^v \cdot 3^{v+1},$$

όπου v είναι άρτιος φυσικός αριθμός. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $3A^v$ και B .

(Θαλής – 2000)

9.12 Αν α, β, γ είναι φυσικοί αριθμοί, ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 20$ και $3\alpha + 2\beta + 3\gamma = 67$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (2\alpha + \beta + 2\gamma)(4\alpha + 3\beta + 4\gamma).$$

(Ευκλείδης – 1999)

9.13 Σ' ένα σχολικό διαγωνισμό χορού συμμετέχουν μόνο ζευγάρια (αγόρια - κορίτσια). Δηλώνουν συμμετοχή ζευγάρια που σχηματίστηκαν από τα $\frac{8}{13}$ των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών του σχολείου. Τι ποσοστό των μαθητών του σχολείου παίρνει μέρος στο χορό;

(Θαλής – 1998)

9.14 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.

(Θαλής – 1999)

9.15 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{222223 \cdot 444441 \cdot 222220 + 222216}{222222^2}.$$

(Θαλής – 1999)

9.16 Να βρείτε τον αριθμό x , αν γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} & 2^{1997} - 2^{1996} - 1 + \\ & + \left[(2^{80} : 2^{78}) : 2^2 \right] (x - 1 - 2^2) (x + 3^2) = \\ & = 2^{1995} + 2^{1994} + \dots + 2^2 + 2 + 1. \end{aligned}$$

(Ευκλείδης – 1998)

B. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

9.17 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1, 6 και έχουν άθροισμα 140° .α) Να βρείτε τις γωνίες του $\triangle AB\Gamma$.β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το ύψος και η διχοτόμος του $\triangle AB\Gamma$ που αντιστοιχούν στην πλευρά $B\Gamma$.

(Θαλής – 2010)

9.18 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 36^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την παράλληλη από το A προς τη $B\Gamma$ στο σημείο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $A\Delta E$ και ABE είναι ισοσκελή.

(Ευκλείδης – 2011)

9.19 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma \parallel A\Delta$ και:i) $AB = \Gamma\Delta = 12$ m.

ii) Η περίμετρος είναι 54 m.

iii) Το εμβαδόν είναι $E = 120$ m².Να βρεθεί το ύψος u του τραπεζίου.

(Θαλής – 2001)

9.20 Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2A\Delta$ και ισόπλευρο τρίγωνο ABM προς το μέρος της $\Gamma\Delta$. Αν E είναι το μέσο του BM , να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{E}\Gamma$.

(Ευκλείδης – 1999)

9.21 Το σημείο M_1 είναι μέσο του AB , το M_2 είναι μέσο του AM_1 , το M_3 είναι μέσο του AM_2 κλπ. Αν το M_{10} είναι μέσο του AM_9 και $AB = 3 \cdot 2^{11}$, να βρείτε το AM_{10} .

(Ευκλείδης – 1999)

9.22 Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ το μήκος είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 25%, σε τι ποσοστό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο;

(Ευκλείδης – 2010)

Γ. ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

9.23 Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς a που είναι περιττοί, μεγαλύτεροι από 39, μικρότεροι από το 50 και διαιρούμενοι με 4 δίνουν υπόλοιπο 1.

(Θαλής – 2010)

9.24 Δίνονται οι αριθμοί:

$$x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5, \quad y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2.$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς x και y .

β) Να βρείτε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A , του οποίου οι αριθμοί x , y είναι πολλαπλάσια.

(Θαλής – 2011)

9.25 Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους $A = \overline{a\beta\gamma}$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{a\gamma\beta}$.

(ii) Ο $\beta + \gamma$ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης:

$$3x + 12 < 5x - 1.$$

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 3.

(Ευκλείδης – 2011)

9.26 Γράφουμε στη σειρά τους αριθμούς από το 1990 έως και το 1997. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος.

(Θαλής – 1998)

9.27 Το άθροισμα των ψηφίων ενός τριψήφιου αριθμού είναι ίσο με 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος αριθμός μικρότερος από τον αρχικό κατά 297. Ποιος μπορεί να είναι ο τριψήφιος αυτός αριθμός;

(Ευκλείδης – 2010)

9.28 Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x , y αν γνωρίζουμε ότι $x^2(y + 2) = 4375$.

(Ευκλείδης – 1999)

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Υποδείξεις – Λύσεις

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

- 9.1** Αφού το γινόμενο είναι $\overline{5\delta\epsilon\zeta}$, πρέπει $\alpha \cdot 2 \leq 5$, οπότε $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$. Το 2 έχει χρησιμοποιηθεί, οπότε $\alpha = 1$.
- Είναι $\overline{5\delta\epsilon\zeta} \geq 5300$, αφού $\delta \geq 3$ (τα ψηφία 1, 2 έχουν χρησιμοποιηθεί).
- Η διαίρεση $5300 : 18$ δίνει πηλίκο 294, οπότε $\beta = 9$.
- Με $\beta = 9$, πρέπει: $\gamma \in \{3, 4, 6, 7\}$.
- Με απλή δοκιμή οι τιμές $\gamma = 4$, $\gamma = 6$ απορρίπτονται, διότι π.χ.:
- $$8 \cdot 4 = 32, \quad 8 \cdot 6 = 48$$
- και οι τιμές 2, 8 έχουν χρησιμοποιηθεί. Άρα $\gamma = 3$ ή $\gamma = 7$. Τελικά $\gamma = 7$ (με δοκιμές) και έτσι $\delta = 3$, $\epsilon = 4$, $\zeta = 6$. Ο ζητούμενος πολλαπλασιασμός είναι ο:
- $$297 \times 18 = 5346.$$

- 9.2** Είναι:
- $$\begin{aligned} A &= 2415 - 4 \cdot 100 + 1 - 2 \cdot 9 + 2 = \\ &= 2415 - 400 + 1 - 18 + 2 = \\ &= 2015 - 15 = 2000. \end{aligned}$$

- 9.3** α) Αν γράψουμε για ευκολία:
- $$2008 = \alpha,$$
- τότε
- $$\begin{aligned} A &= (\alpha + 2) - (\alpha + 1)\alpha + (\alpha + 2)\alpha = \\ &= \alpha + 2 - \alpha^2 - \alpha + \alpha^2 + 2\alpha = \\ &= 2\alpha + 2 = 2 \cdot 2008 + 2 = 4016 + 2 = \\ &= 4018. \end{aligned}$$

β) Θα υπολογίσουμε τις παραστάσεις B και Γ:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{8} \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{4 \cdot 12 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4}{12} = \frac{3}{8} \cdot \frac{31}{12} = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 3 \cdot 4} = \\ &= \frac{31}{32}. \end{aligned}$$

$$\Gamma = \frac{11-2}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$B = \frac{32-1}{32} = 1 - \frac{1}{32}, \quad \Gamma = \frac{22-1}{22} = 1 - \frac{1}{22}.$$

Επειδή $22 < 32$, είναι $\frac{1}{22} > \frac{1}{32}$, οπότε:

$$B > \Gamma.$$

Σχόλιο

Είναι

$$B - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{22 \cdot 32} > 0,$$

οπότε $B > \Gamma$.

- 9.4** Είναι:

$$\begin{aligned} A &= (+1 + (-1)) \cdot (16 - 9) + 5^{12-10} - 20 = \\ &= 0 + 5^2 - 20 = 25 - 20 = 5. \end{aligned}$$

- 9.5** Μας βοηθάει το διπλανό διάγραμμα:

Όταν το δοχείο είναι κατά 70% γεμάτο, περιέχει 20lit περισσότερο, από ό-
ταν είναι κατά 30% γεμάτο. Άρα το 40% του δοχείου χωράει 20lit, οπότε όλο το δοχείο χωράει:

$$20 : \frac{40}{100} = 20 \cdot \frac{100}{40} = 50 \text{ lit}.$$

Μπορούμε βέβαια να εργαστούμε και με αναγωγή στη μονάδα:

- Το $\frac{1}{10}$ χωράει 20:40 λίτρα,

- Το 100% χωράει $100 \cdot \frac{20}{40} = 50 \text{ lit}.$

30%	
40%	20lit
30%	30%

Άλλος τρόπος (με εξίσωση)

Αν το δοχείο χωράει x λίτρα, τότε:

$$\frac{70}{100}x - \frac{30}{100}x = 20 \Leftrightarrow \frac{40}{100}x = 20 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x = 200 \Leftrightarrow x = 50 \text{ λίτρα.}$$

9.6 Είναι:

$$A - B = (2 - 1) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) + \\ = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{2001}{2000} - \frac{1}{2000}\right) = \\ = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{2000\text{-όροι}} = 2000.$$

9.7 Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha + \beta = (1 + 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\right) + \dots + \\ + \left(\frac{1}{1999} + \frac{3996}{3998}\right) = \\ = 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1999} + \frac{1998}{1999}\right) = \\ = 2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1998\text{-όροι}} = 2 + 1998 = 2000.$$

Άρα $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2000}{2} = 1000.$

9.8 Είναι:

$$A = 3 \cdot 2^{18} [1 - (-1)] - \\ - 2^6 \cdot (9 - 1)(27 - 11)(81 - 17) = \\ = 3 \cdot 2^{18} (1 + 1) - 2^6 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 64 = \\ = 3 \cdot 2^{18} \cdot 2 - 2^6 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^6 = 3 \cdot 2^{19} - 2^{19} = \\ = 2^{19} (3 - 1) = 2 \cdot 2^{19} = 2^{20}.$$

9.9 α) Είναι:

- $A = 25 - 16 : 8 + 1 = 25 - 2 + 1 = 24,$
- $B = (25 - 16) : (8 + 1) = 9 : 9 = 1.$

β) Έχουμε:

- $\frac{A}{20B} = \frac{24}{20 \cdot 1} = \frac{24}{20} > 1,$
- $\frac{23B}{A} = \frac{23 \cdot 1}{24} = \frac{23}{24} < 1.$

Άρα $\frac{23B}{A} < \frac{A}{20B}.$

9.10 α) Είναι:

- $A = \frac{1}{64} \left(8 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) = \\ = \frac{1}{64} \left(9 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{9}{64}.$
- $B = \frac{9-1}{27} : \frac{10-2 \cdot 3}{27} \cdot \frac{9}{2^7} = \frac{8}{27} \cdot \frac{27}{4} \cdot \frac{9}{2^7} =$

$$= \frac{8 \cdot 9}{4 \cdot 2^7} = \frac{2 \cdot 9}{2^7} = \frac{9}{2^6} = \frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $A = B.$

$$\beta) \quad \Gamma = \frac{8-\alpha}{4\alpha} + \frac{12-2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma-3}{12} = \\ = \frac{8}{4\alpha} - \frac{\alpha}{4\alpha} + \frac{12}{3\beta} - \frac{2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma}{12} - \frac{3}{12} = \\ = \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{4} + \frac{4}{\beta} - \frac{2}{3} + \frac{\gamma}{6} - \frac{1}{4} = \\ = \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} \right) - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \\ = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1-3-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1.$$

9.11 Θα υπολογίσουμε την παράσταση A . Είναι:

$$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499} = \\ = -2^{1000} \cdot \frac{3^{500}}{2^{500}} \cdot \frac{1}{2^{998}} \cdot \frac{2^{499}}{3^{499}} = \\ = -\frac{2^{1000} \cdot 2^{499} \cdot 2^{-500} \cdot 2^{-998}}{3^{-500} \cdot 3^{499}} = \\ = -\frac{2^{1000+499-500-998}}{3^{-500+499}} = -\frac{2}{3^{-1}} = -2 \cdot 3 = -6.$$

Είναι επομένως:

- $3A^v = 3(-6)^v = 3 \cdot 6^v,$
- $B = 2^v \cdot 3^{v+1} = 2^v \cdot 3^v \cdot 3 = (2 \cdot 3)^v \cdot 3 = \\ = 3 \cdot 6^v.$

Άρα $3A^v = B.$

9.12 Παρατηρούμε ότι:

- $2\alpha + \beta + 2\gamma = 3\alpha + 2\beta + 3\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) = \\ = 67 - 20 = 47.$
- $4\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3\alpha + 2\beta + 3\gamma + (\alpha + \beta + \gamma) = \\ = 67 + 20 = 87.$

Άρα $A = 47 \cdot 87 = 4089.$

9.13 Έστω x, y ο συνολικός αριθμός των αγοριών και των κοριτσιών αντίστοιχα. Στο διαγωνισμό συμμετέχουν:

- Τα $\frac{8}{13}$ των αγοριών, δηλαδή $\frac{8x}{13}$ αγόρια.
- Τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών, δηλαδή $\frac{2y}{3}$ κορίτσια.

Συνολικά πήραν μέρος:

$$A = \frac{8x}{13} + \frac{2y}{3} = \frac{24x + 26y}{39} \text{ παιδιά.}$$

- Επειδή στο χορό πήρε μέρος ο ίδιος αριθμός αγοριών – κοριτσιών, είναι:

$$\frac{8x}{13} = \frac{2y}{3} \quad \text{ή} \quad 24x = 26y \Leftrightarrow 12x = 13y$$

Έτσι

$$A = \frac{24x + 26y}{39} = \frac{24x + 24x}{39} = \frac{48x}{39} =$$

$$= \frac{3 \cdot 16x}{3 \cdot 13} = \frac{16x}{13}.$$

- Ο συνολικός αριθμός των παιδιών του σχολείου είναι:

$$B = x + y = x + \frac{6y}{6} = x + \frac{12}{13}x = \frac{25x}{13}$$

διότι:

$$24x = 26y \Leftrightarrow 12x = 13y \Leftrightarrow y = \frac{12x}{13}.$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{16x}{13}}{\frac{25x}{13}} = \frac{16}{25} = \frac{4 \cdot 16}{4 \cdot 25} = \frac{64}{100} = 64\%.$$

- 9.14** Επειδή $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 1998^2 - 1997^2 &= \\ &= (1998 + 1997)(1998 - 1997) = \\ &= 1998 + 1997. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} A &= (1998 + 1997) + (1996 + 1995) + \dots + \\ &+ (2 + 1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 1997 + 1998 = \\ &= (1 + 1998) + (2 + 1997) + \dots + (999 + 1000) = \\ &= \underbrace{1999 + 1999 + \dots + 1999}_{999\text{-όροι}} = \\ &= 999 \cdot 1999 = \text{πολ}1999. \end{aligned}$$

- 9.15** Έστω $222222 = \alpha$. Τότε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\alpha+1)(2\alpha-3)(\alpha-2) + (\alpha-6)}{\alpha^2} = \\ &= \frac{(2\alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha - 3)(\alpha-2) + \alpha - 6}{\alpha^2} = \\ &= \frac{(2\alpha^2 - \alpha - 3)(\alpha-2) + \alpha - 6}{\alpha^2} = \\ &= \frac{2\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha^2 + 2\alpha - 3\alpha + 6 + \alpha - 6}{\alpha^2} = \\ &= \frac{2\alpha^3 - 5\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2(2\alpha-5)}{\alpha^2} = 2\alpha - 5 = \\ &= 2 \cdot 222222 - 5 = 444444 - 5 = 444439. \end{aligned}$$

- 9.16** Ας υπολογίσουμε πρώτα το β' μέλος. Έστω:

$$\alpha = 2^{1995} + 2^{1994} + \dots + 2^2 + 2 + 1 \quad (1).$$

Είναι τότε:

$$2\alpha = 2^{1996} + 2^{1995} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 \quad (2).$$

Αφαιρούμε από τη (2) την (1):

$$2\alpha - \alpha = 2^{1996} - 1 \Leftrightarrow \alpha = 2^{1996} - 1$$

Έτσι η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} 2^{1997} - 2^{1996} - 1 + [(2^2 : 2^2)x - 1 - 4](x + 9) &= \\ &= 2^{1996} - 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

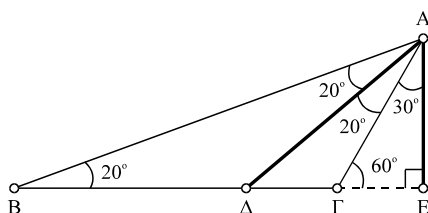
$$\begin{aligned} 2^{1996}(2 - 1) - 1 + (x - 5)(x + 9) &= 2^{1996} - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 5)(x + 9) &= 0 \Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ή} \quad x = 9. \end{aligned}$$

Β' ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- 9.17** α) Έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{1 + 6} = \frac{140^\circ}{7} = 20^\circ.$$

Άρα $\hat{B} = 20^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 6 \cdot 20^\circ = 120^\circ$. Επομένως $\hat{A} = 40^\circ$.

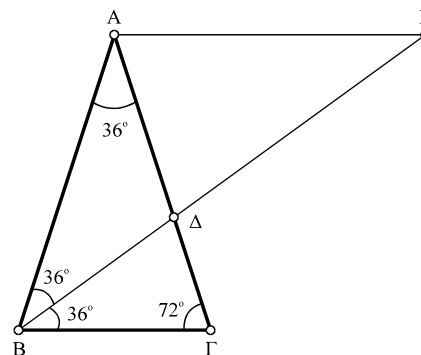


β) Αφού $\hat{A} = 40^\circ$, είναι:

$$\hat{\Delta AB} = \hat{\Delta AG} = 20^\circ$$

Είναι όμως $\hat{\Gamma AE} = 30^\circ$, οπότε $\hat{\Delta AE} = 50^\circ$.

- 9.18** Επειδή $\hat{A} = 36^\circ$, θα είναι:



$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Άρα:

$$\hat{EBA} = \hat{EBG} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

- Είναι $\hat{\Delta BA} = \hat{\Delta AB} = 36^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΔAB είναι ισοσκελές.
- Είναι $\hat{\Delta GB} = 72^\circ$ και $\hat{\Gamma BA} = 36^\circ$, οπότε:

$$\begin{aligned} \hat{BAG} &= 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = \\ &= 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ. \end{aligned}$$

Άρα $\hat{BAG} = \hat{BGA} = 72^\circ$, οπότε το $\hat{BGA}$ είναι ισοσκελές.

- Επειδή $AE \parallel BG$, είναι:

$$\hat{AEB} = \hat{EBG} = 36^\circ = \hat{ABE},$$

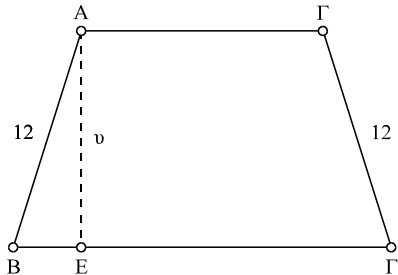
οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

- Στο τρίγωνο AED είναι:

$$\hat{EAD} = \hat{AGB} = 72^\circ.$$

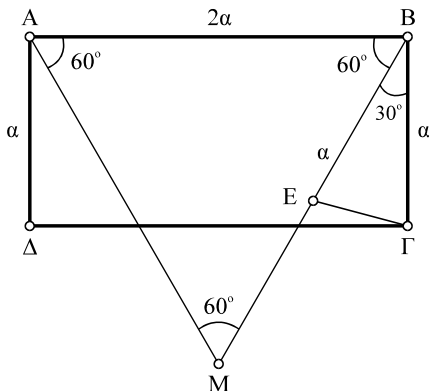
Επίσης $\hat{ADE} = \hat{BAG} = 72^\circ$, οπότε και το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

9.19 Έστω $AE = v$ το ύψος του τραπεζίου. Έχουμε:



- $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 54$ ή
 $12 + (B\Gamma + A\Delta) + 12 = 54$ ή
 $B\Gamma + A\Delta = 54 - 24$ ή $A\Delta + B\Gamma = 30$.
- $E = 120$ ή $\frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \cdot v = 120$ ή
 $\frac{30}{2} \cdot v = 120$ ή $15 \cdot v = 120$ ή
 $v = 120 : 15$ ή $v = 8$ m.

9.20 Αφού $AB = 2A\Delta = 2a$ και το τρίγωνο MAB είναι ισόπλευρο, είναι:

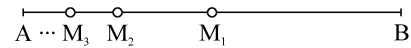


$$BE = \frac{BM}{2} = \frac{2a}{2} = a = B\Gamma.$$

Άρα το τρίγωνο BEΓ είναι ισοσκελές και αφού $\hat{EBG} = 30^\circ$, είναι:

$$\begin{aligned} \hat{BEG} = \hat{BGE} &= \frac{180^\circ - \hat{EBG}}{2} = \\ &= \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ. \end{aligned}$$

9.21 Από την υπόθεση έχουμε:



$$\begin{aligned} AM_{10} &= \frac{1}{2} AM_9 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} AM_8 \right) = \frac{1}{2^3} AM_7 = \\ &= \frac{1}{2^4} AM_6 = \dots = \frac{1}{2^8} AM_2 = \frac{1}{2^9} AM_1 = \\ &= \frac{1}{2^{10}} AB = \frac{1}{2^{10}} \cdot 3 \cdot 2^{11} = 3 \cdot 2^{11-10} = 3 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι στο τυχαίο βήμα $\frac{1}{2^p} AM_p$ είναι $\mu + p = 10$.

9.22 Έστω x το πλάτος και $2x$ το μήκος του. Η νέα πλευρά είναι:

$$x + \frac{25}{100}x = x + \frac{1}{4}x = \frac{5x}{4}.$$

Έστω ότι η μείωση είναι $\alpha\%$. Τότε το νέο μήκος είναι:

$$2x - \frac{\alpha}{100} 2x = \left(1 - \frac{\alpha}{100} \right) 2x = \frac{(100 - \alpha)x}{50}.$$

Το εμβαδόν δε μεταβάλλεται, οπότε:

$$\begin{aligned} x \cdot 2x &= \frac{5x}{4} \cdot \frac{(100 - \alpha)x}{50} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= \frac{x^2(100 - \alpha)}{40} \Leftrightarrow 100 - \alpha = 80 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha &= 100 - 80 \Leftrightarrow \alpha = 20. \end{aligned}$$

Άρα το μήκος πρέπει να μειωθεί κατά 20%.

Γ' ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

9.23 Είναι $a = 4\lambda + 1$, $39 < a < 50$, οπότε το a είναι σίγουρα περιττός. Έτσι:

$$39 < 4\lambda + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\lambda < 49 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{19}{2} < \lambda < \frac{49}{4} \Leftrightarrow 9 + \frac{1}{2} < \lambda < 12 + \frac{1}{4}.$$

Αλλά $\lambda \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda = 10$ ή 11 ή 12 , οπότε $a = 41$, ή $a = 45$ ή $a = 49$.

9.24 α) Είναι:

$$\bullet \quad x = 9 - 4 \cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 =$$

$$= 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$\bullet \quad y = 4 \cdot 25 - 64 + 7 \cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

β) Προφανώς $A = \text{MKΔ}(33, 99) = 33$.

9.25 Έχουμε:

$$\bullet \quad A - B = 27 \Leftrightarrow (100a + 10\beta + \gamma) - (100a + 10\gamma + \beta) = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 9(\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3.$$

$$\bullet \quad 3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 5x - 3x > 12 + 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα $x = 7$, οπότε $\beta + \gamma = 7$.

Έχουμε λοιπόν ότι $\beta - \gamma = 3$, δηλαδή:

$$\beta = 3 + \gamma,$$

οπότε:

$$\beta + \gamma = 7 \quad \text{ή} \quad 3 + \gamma + \gamma = 7 \quad \text{ή} \quad 2\gamma = 4 \quad \text{ή} \quad \gamma = 2.$$

Άρα $\gamma = 2$ και $\beta = 3 + \gamma = 3 + 2 = 5$.

Ο a έχει τη μορφή $\overline{a52}$ και το άθροισμα των ψηφίων του είναι $a + 7$. Επειδή ο A διαιρείται με το 3, πρέπει ο $a + 7$ να διαιρείται με το 3, επομένως:

$$a = 2 \quad (\text{οπότε } a + 7 = 9) \quad \text{ή}$$

$$a = 5 \quad (\text{οπότε } a + 7 = 12) \quad \text{ή}$$

$$a = 8 \quad (\text{οπότε } a + 7 = 15).$$

Έτσι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 252, 552, 852.

9.26 Παρατηρούμε ότι στον αριθμό που προκύπτει:
 $a = 19901991 \dots 19961997$

το άθροισμα των ψηφίων είναι:

$$S = 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9 + (0 + 1 + 2 + \dots + 7) = \\ = 8 + 72 + 72 + 28 = 36 + 144 = 180.$$

Όμως $1 + 8 + 0 = 9$, που σημαίνει ότι ο 180, άρα και ο αριθμός a , διαιρείται με το 9 (και με ο 3). Άρα ο A είναι σύνθετος.

9.27 Έστω $x = \overline{a\beta\gamma}$ ο ζητούμενος αριθμός. Τότε:

$$\bullet \quad a + \beta + \gamma = 10.$$

$$\bullet \quad \overline{a\beta\gamma} - \overline{\gamma\beta a} = 297 \Leftrightarrow (100a + 10\beta + \gamma) - \\ - (100\gamma + 10\beta + a) = 297 \Leftrightarrow 99a - 99\gamma = \\ = 297 \Leftrightarrow a - \gamma = 3.$$

Άρα:

$$(a, \gamma) = \{(3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 3), \\ (7, 4), (8, 5), (9, 6)\}.$$

Επειδή $a + \beta + \gamma = 10$, είναι:

$$(a, \gamma) = (3, 0) \quad \text{ή} \quad (4, 1) \quad \text{ή} \quad (5, 2) \quad \text{ή} \quad (6, 3),$$

οπότε:

$$\overline{a\beta\gamma} \in \{370, 451, 532, 613\}.$$

9.28 Είναι:

$$\begin{array}{r|l} 4375 & 5 \\ 875 & 5 \\ 4375 = 5^4 \cdot 7, & 175 & 5 \\ & 35 & 5 \\ \text{δηλαδή:} & 7 & 7 \\ & 1 & 1 \end{array}$$

$$\bullet \quad x^2(y + 2) = 5^2(5 + 2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x^2 = (5^2)^2 \text{ και } y + 2 = 5 + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 25 \text{ και } y = 5).$$

$$\bullet \quad x^2(y + 2) = 5^2(5^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 2) = 5^2(173 + 2) \text{ οπότε } (x^2 = 5^2 \text{ και } y + 2 = 173 + 2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x = 5 \text{ και } y = 173).$$

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**ΘΕΜΑΤΑ ΕΜΕ 1995-2015****ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΘΑΛΗΣ****Α. ΑΛΓΕΒΡΑ**

1. Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq -1$ να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$A = \frac{1}{\alpha^{-1995} + 1} + \frac{1}{\alpha^{-1994} + 1} + \dots + \frac{1}{\alpha^0 + 1} + \frac{1}{\alpha^1 + 1} + \dots + \frac{1}{\alpha^{1994} + 1} + \frac{1}{\alpha^{1995} + 1}$$

(Θαλής 1995)

2. Ποιος από τους αριθμούς A, B είναι μεγαλύτερος;

α) $A = (-1995)^{1996}$, $B = (-1996)^{1995}$.

β) $A = 1 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right)$, $B = 0,0100001$.

γ) $A = -\frac{5555553}{5555557}$, $B = -\frac{6666665}{6666669}$.

(Θαλής 1995)

3. Έστω οι αριθμοί α, β με $\frac{1}{2}\alpha + 2,5\beta + 1,5\alpha - \frac{1}{2}\beta = -6$.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{114 - 3(\alpha - \beta) - 2(\alpha - 2\beta) - 5 + 3[5\alpha - (-\beta + 1)]}{-2(2\alpha - \beta) - 4(3\beta - 1) - 2(-2\alpha - 5\beta)}$

(Θαλής 1996)

4. Ν' αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A = \frac{222223 \cdot 444441 \cdot 222220 + 222216}{222222^2}$ είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

(Θαλής 1998)

5. Ν' αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ είναι

πολλαπλάσιο του 1999.

(Θαλής 1998)

6. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499} \text{ και } B = 2^v \cdot 3^{v+1} \text{ όπου } v\text{-άρτιος φυσικός.}$$

Να συγκριθούν οι αριθμοί $3 \cdot A^v$ και B .

(Θαλής 1999)

7. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1999} \text{ και } B = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \dots + \frac{3994}{3996} + \frac{3996}{3998}.$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $\frac{A+B}{2}$

(Θαλής 1999)

8. Δίνονται οι παραστάσεις $A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1$ και $B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1)$. Να βρεθούν οι A , B και να

συγκριθούν οι αριθμοί $\frac{A}{20B}$, $\frac{22B}{A}$.

(Θαλής 2000)

9. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2001}{2000} \text{ και } B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000}.$$

Να βρείτε τον αριθμό $A - B$.

(Θαλής 2000)

10. Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A = (2^{10} : 2^6)^2 - 3^{12} : (3^9 \cdot 3) + 5 \cdot (2^3 + 3^2), \quad B = 5 \cdot (2^3 - 1) + 8 \cdot (3^3 - 20) - 8 \cdot (5^2 - 15).$$

(Θαλής 2001)

11. Είναι γνωστό ότι το αλεύρι αυξάνει το βάρος του κατά το ζύμωμα κατά 50%, ενώ το

ζυμάρι χάνει στο ψήσιμο το 20% του βάρους του. Να βρείτε πόσα κιλά αλεύρι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την παραγωγή 840 κιλών ψωμιού.

(Θαλής 2001)

12. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 2 \cdot 50 - 40 : 10 + 5 \cdot (100 - 4 \cdot 20)^2 - 92.$$

(Θαλής 2002)

13. Δίνονται οι αριθμοί: $A = 2^{41}$, $B = 8^{13}$, $\Gamma = 4^{21}$ και $\Delta = 32^8$.

- α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς αυτούς είναι ο μεγαλύτερος.
 β) Να εκφράσετε το άθροισμα $A + B + \Gamma + \Delta$ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(Θαλής 2002)

14. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2415 - 4 \cdot 10^2 + 2003^0 - 2 \cdot 3^2 + 2$.

(Θαλής 2003)

15. Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε το 2001 (από 1-1-2001 μέχρι 31-12-2001) κατά 20%.
 Στη συνέχεια το 2002 μειώθηκε κατά 10%, ενώ το 2003 αναμένεται αύξηση κατά 25%.

α) Να προσδιορίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό, της μεταβολής της τιμής του προϊόντος κατά την τριετία από 1-1-2001 μέχρι 31-12-2003.

β) Αν η τιμή του προϊόντος ήταν 1,60 € την 1-1-2001, ποια θα είναι η τιμή του την 31-12-2003;

(Θαλής 2003)

16. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2^3 \cdot 5^3 + 2004 : 4 + (3^2 - 4) \cdot 100 + 3$

(Θαλής 2004)

17. Η τιμή του πετρελαίου στη Ν. Υόρκη ένα χρόνο πριν στις 30-10-2003 ήταν 32 δολάρια το βαρέλι, ενώ σήμερα είναι 54,4 δολάρια το βαρέλι.

(α) Πόσο τις εκατό έχει αυξηθεί η τιμή του βαρελίου σε σχέση με την τιμή που είχε ένα χρόνο πριν;

(β) Πόσα δολάρια πρέπει να μειωθεί η τιμή του βαρελίου μέχρι την 30-11-2004 έτσι ώστε η τιμή που θα έχει τότε να είναι αυξημένη κατά 40% σε σχέση με την τιμή που είχε στις 30-10-2003;

(Θαλής 2004)

18. Να υπολογιστεί το 3,6% του αριθμού $A = \frac{3 + \frac{4,2}{0,1}}{\left(\frac{1}{0,3} - \frac{7}{3}\right) \cdot 0,3125}$.

(Θαλής 2005)

19. Ο Γιώργος πήγε στο βιβλιοπωλείο έχοντας 20€. Στο μαγαζί υπάρχουν δύο είδη μολυβιών. Η εξάδα του πρώτου είδους κόστιζε 1,17€ ενώ η εξάδα του δεύτερου είδους κόστιζε 1,60€.

Πόσες εξάδες κάθε κατηγορίας πρέπει ν' αγοράσει ο Γιώργος έτσι ώστε να πάρει τα λιγότερα ρέστα;

(Θαλής 2005)

20. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \{ 111 - [264 - (15 + \frac{54}{6}) \cdot |-5|] : 12 \} : 11 + 1$

(Θαλής 2006)

21. Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

(Θαλής 2006)

22. Το 6% του αριθμού $\alpha \neq 0$ είναι ίσο με το 4% του αριθμού β . Να βρείτε την τιμή του κλάσματος

$$K = \frac{9\alpha - 3\beta}{6\alpha - \beta}.$$

(Θαλής 2006)

23. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4.$

(Θαλής 2008)

24. Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = (200 : 8 + 12 \cdot 100) + [200 : (8 + 2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^2.$$

(Θαλής 2007)

25. Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α', Β' και Γ' είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

(Θαλής 2007)

26. Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

(Θαλής 2007)

27. Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$A = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

(Θαλής 2009)

28. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \alpha + 5(4 + \alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919.$$

(Θαλής 2008)

29. Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το

μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

(α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

(β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

(Θαλής 2009)

30. Έστω $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y .

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο A του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

(Θαλής 2010)

31. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδεντρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδεντρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδεντρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδεντρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδεντρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδεντρου του κτήματος του αγρότη.

(Θαλής 2010)

32. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5\frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right).$$

(Θαλής 2011)

33. Αν ο v είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{v}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις

δυνατές τιμές της παράστασης: $B = \frac{2}{v - \frac{1}{5}} : \frac{v - \frac{v}{2}}{9}$.

(Θαλής 2011)

34. Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ .

(Θαλής 2011)

35. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right).$$

(Θαλής 2012)

36. Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30

και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης: $B = \frac{2 - \frac{\kappa}{2}}{\kappa - \frac{1}{2}} : \frac{\frac{3 - \kappa}{2}}{\kappa}$

(Θαλής 2012)

37. Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

(Θαλής 2012)

38. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9}.$

(Θαλής 2013)

39. Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσό χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

(Θαλής 2013)

40. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$.

(Θαλής 2014)

41. Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α και Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

(Θαλής 2014)

42. Χωρίς την εκτέλεση των διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}$$

(Θαλής 2014)

43. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων: $A = 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11}$,

$B = (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7}$ και να τις συγκρίνετε.

(Θαλής 2015)

44. Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha=6$ μέτρα και πλάτος $\beta=4$ μέτρα. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, (ii) το εμβαδό του ορθογωνίου.

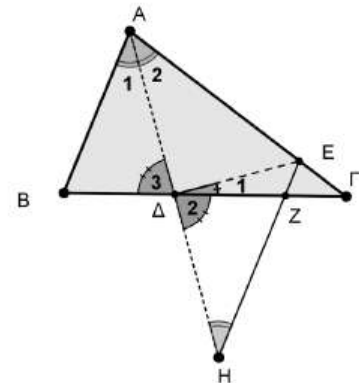
(Θαλής 2015)

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

45. Να χαράξετε κύκλο (Κ,3cm). Με κέντρο το σημείο Λ του κύκλου να χαράξετε δεύτερο κύκλο (Λ,3cm).

Η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τον Κ στο Α και τον Λ στο Β, αν προεκταθεί. Να κατασκευάσετε τις ακτίνες ΚΓ, ΛΔ κάθετες στην ΚΛ και προς το αυτό μέρος της ΚΛ.

- α) Τι είδους είναι τα σχήματα ΚΛΔΓ, ΑΓΛ, ΑΔΒ, ΑΚΔΓ, ΑΓΔΒ;
β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των πέντε αυτών σχημάτων.



(Θαλής 1995)

46. Στην ημιευθεία Οx, θεωρούμε σημεία Α, Β, Γ ώστε (ΟΑ)=2m, (ΟΒ)=6m, (ΟΓ)=12m.

Έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε τα (ΔΖ), (ΕΓ). Τι παρατηρείτε;

(Θαλής 1996)

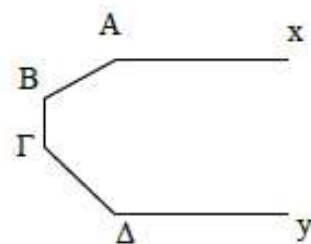
47. Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=10cm και ΓΔ=25cm και Μ τυχαίο

σημείο της βάσης ΑΒ. Να βρεθεί η σχέση του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΜ με το μέρος του τραpezίου που περισσεύει.

(Θαλής 1997)

48. Στο σχήμα είναι Αx//Δy. Να υπολογιστεί το άθροισμα των

γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$.



(Θαλής 1998)

49. Πάνω σε μια ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ. Έστω M είναι το μέσον του AB και N είναι το μέσον του BΓ.

Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος MN, όταν:

α) $AB = 8\text{cm}$, $B\Gamma = 10\text{cm}$,

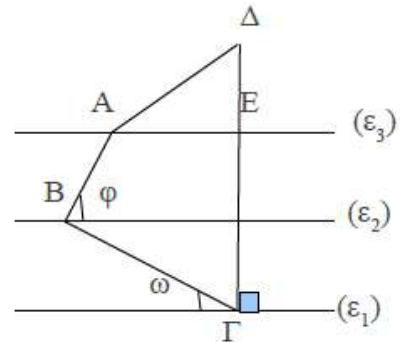
β) $AB = 10\text{cm}$, $A\Gamma = 18\text{cm}$.

50. Στο σχήμα δίνεται ότι:

i) $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ ii) $\Gamma\Delta \perp (\varepsilon_1)$

iii) $AE = ED$ iv) $\omega = 30^\circ$, $\varphi = 50^\circ$

Να βρεθούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ABΓΔ.



(Θαλής 1999)

51. Τον τραπέζιου ABΓΔ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) δίνονται:

(α) $AB = \Gamma\Delta = 12$ μέτρα (β) Η περίμετρός του 54 μέτρα

(γ) Το εμβαδό του E = 120 τ.μ.

Να βρείτε το ύψος του υ.

(Θαλής 2000)

52. Στο σχήμα δίνονται:

(α) $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$

(β) $AB = A\Gamma$ και $\hat{BAG} = 20^\circ$

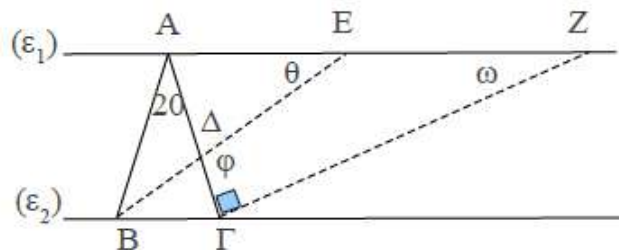
(γ) Η BΔ είναι διχοτόμος της γωνίας

$\hat{ABG}$

(δ) $\Gamma Z \perp A\Gamma$.

Να βρείτε τις γωνίες $\varphi = \hat{GDE}$, $\theta = \hat{AED}$ και ω .

Να εξηγήσετε γιατί οι ευθείες BE και ΓZ δεν είναι παράλληλες.

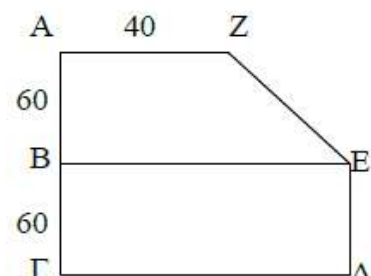


(Θαλής 2000)

53. Ο αγρός ABΓΔΕΖ στο σχήμα αποτελείται από το τραπέζιο

ABEZ με $\hat{A} = 90^\circ$ και το ορθογώνιο BΓΔΕ με $AB = B\Gamma = 60\text{m}$ και $AZ = 40\text{m}$. Το εμβαδό του αγρού είναι 10.200 m^2 .

Μπάμπης Στεργίου – Μαθηματικός



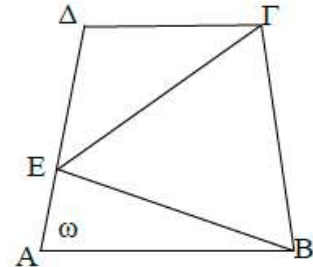
Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ.

(Θαλής 2001)

54. Στο σχήμα το τετράπλευρο είναι τραπέζιο. Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισόπλευρο και τα ΑΒΕ και ΓΔΕ ισοσκελή με $BA = BE$ και $ΓΔ = ΔΕ$.

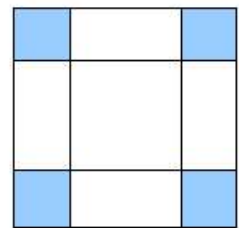
Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B\hat{A}\Delta} = \omega$.

(Θαλής 2001)



55. Ένα τετράγωνο πλευράς 4 διαιρείται με τέσσερις ευθείες παράλληλες ανά δύο προς τις πλευρές του σε σχήματα, έτσι ώστε τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα από αυτά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι τετράγωνα πλευράς 1.

Πόσα είναι τα τετράγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και ποιο είναι το άθροισμα των εμβαδών τους;



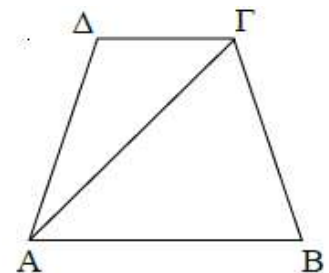
(Θαλής 2002)

56. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel ΓΔ$) του σχήματος δίνονται $\hat{B\hat{A}\Delta} = \hat{A\hat{B}\Gamma}$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή με $AB = ΑΓ$ και $ΑΔ = ΓΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\hat{B\hat{A}\Delta}$.

β) Να υπολογιστεί η γωνία $\omega = B$.

(Θαλής 2003)



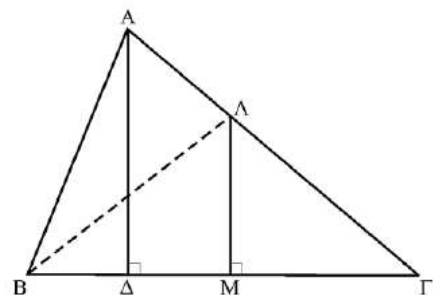
57. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΜΛ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ στο μέσον της Μ. Επιπλέον

δίνονται: $ΜΓ = 5\text{cm}$, $\hat{M\hat{A}\Gamma} = 45^\circ$, $\hat{A\hat{B}\Lambda} = 30^\circ$ και το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ ίσο με 35cm^2 .

Να βρείτε:

(α) τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

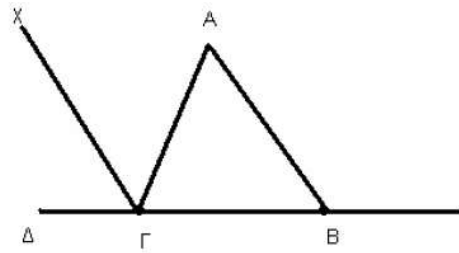


(Θαλής 2004)

58. Έστω $\hat{x}\hat{O}y$ μια γωνία 70° , OA μια ημιευθεία που είναι κάθετη επί της Ox και OB μια ημιευθεία που είναι κάθετη επί της Oy . Να υπολογιστούν τα μέτρα των γωνιών $\hat{AOB}$, $\hat{AOy}$ και $\hat{BOx}$.

(Θαλής 2005)

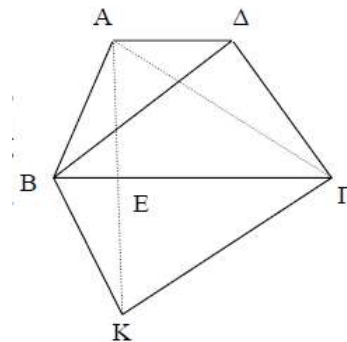
59. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = BG$ και η διχοτόμος Gx της γωνίας $\hat{A}\hat{G}\hat{\Delta}$ είναι παράλληλη στην AB . Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABG .



(Θαλής 2006)

60. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση $B\Gamma$ είναι διπλάσια της μικρής βάσης $A\Delta$. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι 300 cm^2 και το σημείο K είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $B\Gamma$ (δηλαδή η $B\Gamma$ είναι μεσοκάθετος της AK), να υπολογίσετε:

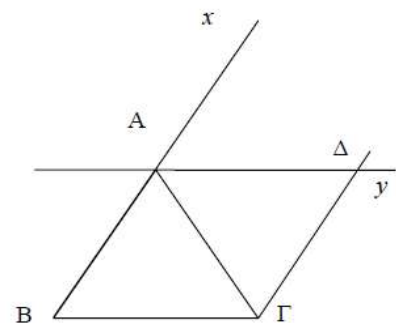
- (α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και
- (β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABK\Gamma$.



(Θαλής 2007)

61. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Ay είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{x}$. Δίνεται ακόμη ότι: $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 62^\circ$ και $AB = A\Delta$.

- (α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- (β) Να εξηγήσετε γιατί η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$.



(Θαλής 2008)

62. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο I . Η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά $A\Gamma$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Αν είναι $\hat{I\Delta\Gamma} = 70^\circ$ και $\hat{I\Xi\Gamma} = 130^\circ$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) οι γωνίες $\hat{B\Gamma\Delta}$ και $\hat{E\Gamma\Gamma}$.

(Θαλής 2010)

63. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140° και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

(α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχούν στην πλευρά του $B\Gamma$.

(Θαλής 2009)

64. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$.

Προεκτείνουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔH έτσι ώστε $A\Delta = \Delta H$.

Από το σημείο H φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z .

α. Να αποδείξετε ότι : $\hat{A\Delta E} = 90^\circ$.

β. Να βρείτε τη γωνία $\hat{E\Delta Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$.

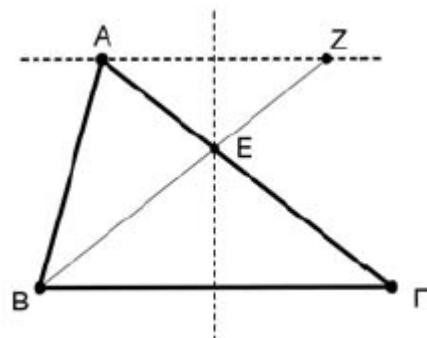
(Θαλής 2011)

65. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 60^\circ$ και $A\Gamma = \frac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο E πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο

ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BE στο σημείο Δ , να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

(Θαλής 2012)

66. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Γ . Η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και η ευθεία BE τέμνει την ευθεία



(ε), που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

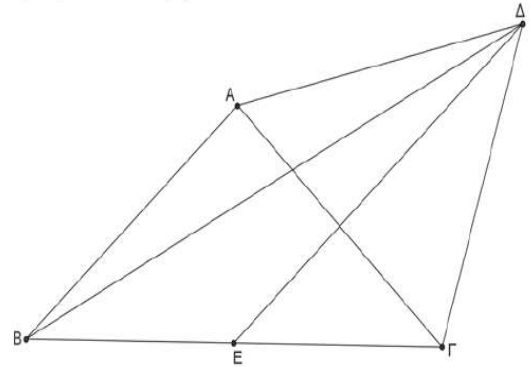
(α) $AZ = AB$, (β) οι γωνίες $AEB = B$.

(Θαλής 2013)

67. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\angle A = 90^\circ$ και $AB = AG$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία ΒΔΕ.



(Θαλής 2014)

68. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και γωνία $\angle BAG = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες ΒΖΔ και ΓΑΖ.

(Θαλής 2015)

Γ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

69. Κάποιος μαθητής έβαλε στο νου του πέντε αριθμούς διαφορετικούς μεταξύ τους ακεραίους, θετικούς και αρνητικούς, που το γινόμενο τους ήταν 20. Να βρεθούν οι διαφορετικοί αυτοί ακέραιοι.

(Θαλής 1996)

70. Γράφουμε συνεχόμενα τους αριθμούς από το 1990 έως το 1997. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος .

(Θαλής 1997)

71. Αν παρατάξουμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου σε τριάδες περισσεύουν 2. Αν τους παρατάξουμε σε τετράδες ή σε πεντάδες επίσης περισσεύουν 2. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των μαθητών, αν γνωρίζουμε ότι είναι τριψήφιος με άθροισμα ψηφίων 5.

(Θαλής 2003)

72. Ένας τετραψήφιος αριθμός K έχει όλα τα ψηφία του ίσα και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 20.

(α) Να βρεθεί ο αριθμός K

(β) Να βρεθεί δεκαδικός αριθμός a και φυσικός αριθμός n τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$K = a \cdot 10^n, \text{ με } 1 \leq a \leq 10.$$

(Θαλής 2004)

73. Για ποια ψηφία a και b διαιρείται δια του 45 ο αριθμός του οποίου η παράσταση στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι $6a12b$;

(Θαλής 2005)

74. Έστω a θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακεραίου a ;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός a , αν είναι περιττός, μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

(Θαλής 2009)

75. Έστω a , b φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον a και διαιρέτη τον b δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός a , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο a είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός b είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

(Θαλής 2010)

76. Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της

διαίρεσης είναι ίσο με 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο

με 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του

μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

77. Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x - 1$, x , $x + 1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Θαλής 2015)

Δ. ΜΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

78. Έχουμε 200 αυγά τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε καλάθια κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε καλάθι να περιέχει διαφορετικό αριθμό αυγών.

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός καλαθιών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη διαδικασία;

(Θαλής 1995)

79. Ένα τετράγωνο λέγεται "μαγικό" όταν το άθροισμα των αριθμών σε κάθε οριζόντια γραμμή είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη και επίσης ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε μια από τις δύο διαγώνιες.

Π.χ.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

εδώ έχουμε $2 + 7 + 6 = 9 + 5 + 1 = \dots = 15$.

Σε κάποιο μαγικό τετράγωνο οι αριθμοί έσβησαν και έμειναν μόνο το 7 και το 13 όπως στο παρακάτω.

		7
13		

Να αποδειχτεί ότι απαραίτητως σε κάποια θέση του μαγικού αυτού τετραγώνου υπάρχει ο αριθμός 1, ανεξάρτητα από τα ποια είναι τα υπόλοιπα νούμερά του.

(Θαλής 1996)

80. Μια ποδοσφαιρική ομάδα έχει 20 ποδοσφαιριστές, από τους οποίους ο μικρότερος είναι 18 χρονών και ο μεγαλύτερος 33. Να εξετάσετε αν υπάρχουν δύο ποδοσφαιριστές με την ίδια ηλικία.

(Θαλής 1997)

81. Στο σχολείο διοργανώνεται ένας διαγωνισμός χορού, στον οποίο θα συμμετέχουν μόνο ζευγάρια (αγόρι - κορίτσι). Δηλώνουν συμμετοχή ζευγάρια που σχηματίστηκαν από τα $\frac{8}{13}$ του συνολικού αριθμού των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των κοριτσιών.

Να προσδιορίσετε το ποσοστό των μαθητών που λαμβάνουν μέρος στο χορό.

(Θαλής 1997)

82. Ένα δοχείο, όταν είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από την περίπτωση που θα ήταν κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα περιέχει το δοχείο όταν είναι πλήρες;

(Θαλής 1998)

83. Στις Δημοτικές εκλογές της πρώτης Κυριακής (13 Οκτωβρίου 2002) σε ένα Δήμο συμμετείχαν οι συνδυασμοί Α, Β και Γ. Ονομάζουμε n τον αριθμό των εγγεγραμμένων στους εκλογικούς καταλόγους ψηφοφόρων. Συνολικά ψήφισε το 75% του αριθμού n και όλα τα ψηφοδέλτια ήταν έγκυρα. Ο συνδυασμός Α ψηφίστηκε από το 39% του αριθμού n , ενώ ο συνδυασμός Β ψηφίστηκε από το 27% του αριθμού n . Λευκά ψηφοδέλτια δεν βρέθηκαν.

α) Να εξετάσετε αν ο αρχηγός του συνδυασμού Α εξελέγη Δήμαρχος από την πρώτη Κυριακή, δηλαδή αν ο συνδυασμός του έλαβε ποσοστό μεγαλύτερο του 50% ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

β) Να βρείτε το ποσοστό των ψήφων του συνδυασμού Δ ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

(Θαλής 2002)

84. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

(Θαλής 2008)

Ευχαριστίες :

Ευχαριστώ το συνάδελφο και φίλο Χρήστο Τσιφάκη για την βοήθειά του στον ηλεκτρονικό σχεδιασμό και στη δημιουργία του αρχείου των θεμάτων.

Διαγωνισμοί της ΕΜΕ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΑΛΗΣ – ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μπάμπης Στεργίου

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

9.1 Στο διπλανό πολλαπλασιασμό έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα ψηφία από το 1 έως και το 9. Να συμπληρώσετε αυτόν τον πολλαπλασιασμό.

$$\begin{array}{r} \boxed{2} \boxed{} \boxed{} \\ \times \boxed{} \boxed{8} \boxed{} \\ \hline \boxed{5} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \end{array}$$

(Ευκλείδης – 2002)

9.2 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2415 - 4 \cdot 10^2 + 2003^0 - 2 \cdot 3^2 + 2.$$

(Θαλής – 2004)

9.3 α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008.$$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$B = \frac{3}{8} \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \text{ και}$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right).$$

(Ευκλείδης – 2010)

9.4 Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = [(-1)^{10} + (-1)^{11}] \cdot (2^4 - 3^2) + 5^{12} : 5^{10} - 20.$$

(Ευκλείδης – 2002)

9.5 Όταν ένα δοχείο είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από όταν είναι κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα χωράει το δοχείο αυτό, όταν είναι γεμάτο;

(Θαλής – 1999)

9.6 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\bullet \quad A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2001}{2000},$$

$$\bullet \quad B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2000}.$$

Να βρείτε τον αριθμό $A - B$.

(Θαλής – 2001)

9.7 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1999},$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \dots + \frac{3994}{3996} + \frac{3996}{3998}.$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $\frac{\alpha + \beta}{2}$, δηλαδή το μέσο όρο των αριθμών α και β .

(Θαλής – 2000)

9.8 Να γράψετε την παράσταση:

$$A = 3 \cdot 2^{18} \cdot [1 - (-1)^3] - 2^6 \cdot (3^2 - 1)(3^3 - 11)(3^4 - 17)$$

ως δύναμη με βάση το 2.

(Ευκλείδης – 2004)

9.9 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1 \text{ και}$$

$$B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1).$$

α) Να βρείτε τις παραστάσεις A , B .

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\frac{A}{20B} \text{ και } \frac{23B}{A}.$$

(Θαλής – 2001)

9.10 α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$A = \frac{1}{8^2} \left(2^3 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \text{ και}$$

$$B = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{3^3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{3^2}{2^7}$$

β) Αν $\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} = \frac{1}{6}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{8-\alpha}{4\alpha} + \frac{12-2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma-3}{12}.$$

(Ευκλείδης – 2011)

9.11 Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499} \text{ και}$$

$$B = 2^v \cdot 3^{v+1},$$

όπου v είναι άρτιος φυσικός αριθμός. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $3A^v$ και B .

(Θαλής – 2000)

9.12 Αν α, β, γ είναι φυσικοί αριθμοί, ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 20$ και $3\alpha + 2\beta + 3\gamma = 67$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (2\alpha + \beta + 2\gamma)(4\alpha + 3\beta + 4\gamma).$$

(Ευκλείδης – 1999)

9.13 Σ' ένα σχολικό διαγωνισμό χορού συμμετέχουν μόνο ζευγάρια (αγόρια - κορίτσια). Δηλώνουν συμμετοχή ζευγάρια που σχηματίστηκαν από τα $\frac{8}{13}$ των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών του σχολείου. Τι ποσοστό των μαθητών του σχολείου παίρνει μέρος στο χορό;

(Θαλής – 1998)

9.14 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.

(Θαλής – 1999)

9.15 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{222223 \cdot 444441 \cdot 222220 + 222216}{222222^2}.$$

(Θαλής – 1999)

9.16 Να βρείτε τον αριθμό x , αν γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} & 2^{1997} - 2^{1996} - 1 + \\ & + \left[(2^{80} : 2^{78}) : 2^2 \right] (x - 1 - 2^2) (x + 3^2) = \\ & = 2^{1995} + 2^{1994} + \dots + 2^2 + 2 + 1. \end{aligned}$$

(Ευκλείδης – 1998)

B. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

9.17 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1, 6 και έχουν άθροισμα 140° .α) Να βρείτε τις γωνίες του $\triangle AB\Gamma$.β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το ύψος και η διχοτόμος του $\triangle AB\Gamma$ που αντιστοιχούν στην πλευρά $B\Gamma$.

(Θαλής – 2010)

9.18 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 36^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την παράλληλη από το A προς τη $B\Gamma$ στο σημείο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $A\Delta E$ και ABE είναι ισοσκελή.

(Ευκλείδης – 2011)

9.19 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma \parallel A\Delta$ και:i) $AB = \Gamma\Delta = 12$ m.

ii) Η περίμετρος είναι 54 m.

iii) Το εμβαδόν είναι $E = 120$ m².Να βρεθεί το ύψος u του τραπεζίου.

(Θαλής – 2001)

9.20 Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2A\Delta$ και ισόπλευρο τρίγωνο ABM προς το μέρος της $\Gamma\Delta$. Αν E είναι το μέσο του BM , να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$.

(Ευκλείδης – 1999)

9.21 Το σημείο M_1 είναι μέσο του AB , το M_2 είναι μέσο του AM_1 , το M_3 είναι μέσο του AM_2 κλπ. Αν το M_{10} είναι μέσο του AM_9 και $AB = 3 \cdot 2^{11}$, να βρείτε το AM_{10} .

(Ευκλείδης – 1999)

9.22 Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ το μήκος είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 25%, σε τι ποσοστό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο;

(Ευκλείδης – 2010)

Γ. ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

9.23 Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς a που είναι περιττοί, μεγαλύτεροι από 39, μικρότεροι από το 50 και διαιρούμενοι με 4 δίνουν υπόλοιπο 1.

(Θαλής – 2010)

9.24 Δίνονται οι αριθμοί:

$$x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5, \quad y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2.$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς x και y .

β) Να βρείτε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A , του οποίου οι αριθμοί x , y είναι πολλαπλάσια.

(Θαλής – 2011)

9.25 Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους $A = \overline{a\beta\gamma}$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{a\gamma\beta}$.

(ii) Ο $\beta + \gamma$ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης:

$$3x + 12 < 5x - 1.$$

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 3.

(Ευκλείδης – 2011)

9.26 Γράφουμε στη σειρά τους αριθμούς από το 1990 έως και το 1997. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος.

(Θαλής – 1998)

9.27 Το άθροισμα των ψηφίων ενός τριψήφιου αριθμού είναι ίσο με 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος αριθμός μικρότερος από τον αρχικό κατά 297. Ποιος μπορεί να είναι ο τριψήφιος αυτός αριθμός;

(Ευκλείδης – 2010)

9.28 Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x , y αν γνωρίζουμε ότι $x^2(y + 2) = 4375$.

(Ευκλείδης – 1999)

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Υποδείξεις – Λύσεις

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

- 9.1** Αφού το γινόμενο είναι $\overline{5\delta\epsilon\zeta}$, πρέπει $\alpha \cdot 2 \leq 5$, οπότε $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$. Το 2 έχει χρησιμοποιηθεί, οπότε $\alpha = 1$.
- Είναι $\overline{5\delta\epsilon\zeta} \geq 5300$, αφού $\delta \geq 3$ (τα ψηφία 1, 2 έχουν χρησιμοποιηθεί).
- Η διαίρεση $5300 : 18$ δίνει πηλίκο 294, οπότε $\beta = 9$.
- Με $\beta = 9$, πρέπει: $\gamma \in \{3, 4, 6, 7\}$.
- Με απλή δοκιμή οι τιμές $\gamma = 4$, $\gamma = 6$ απορρίπτονται, διότι π.χ.:
- $$8 \cdot 4 = 32, \quad 8 \cdot 6 = 48$$
- και οι τιμές 2, 8 έχουν χρησιμοποιηθεί. Άρα $\gamma = 3$ ή $\gamma = 7$. Τελικά $\gamma = 7$ (με δοκιμές) και έτσι $\delta = 3$, $\epsilon = 4$, $\zeta = 6$. Ο ζητούμενος πολλαπλασιασμός είναι ο:
- $$297 \times 18 = 5346.$$

- 9.2** Είναι:
- $$\begin{aligned} A &= 2415 - 4 \cdot 100 + 1 - 2 \cdot 9 + 2 = \\ &= 2415 - 400 + 1 - 18 + 2 = \\ &= 2015 - 15 = 2000. \end{aligned}$$

- 9.3** α) Αν γράψουμε για ευκολία:
- $$2008 = \alpha,$$
- τότε
- $$\begin{aligned} A &= (\alpha + 2) - (\alpha + 1)\alpha + (\alpha + 2)\alpha = \\ &= \alpha + 2 - \alpha^2 - \alpha + \alpha^2 + 2\alpha = \\ &= 2\alpha + 2 = 2 \cdot 2008 + 2 = 4016 + 2 = \\ &= 4018. \end{aligned}$$

β) Θα υπολογίσουμε τις παραστάσεις B και Γ:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{8} \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{4 \cdot 12 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4}{12} = \frac{3}{8} \cdot \frac{31}{12} = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 3 \cdot 4} = \\ &= \frac{31}{32}. \end{aligned}$$

$$\Gamma = \frac{11-2}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$B = \frac{32-1}{32} = 1 - \frac{1}{32}, \quad \Gamma = \frac{22-1}{22} = 1 - \frac{1}{22}.$$

Επειδή $22 < 32$, είναι $\frac{1}{22} > \frac{1}{32}$, οπότε:

$$B > \Gamma.$$

Σχόλιο

Είναι

$$B - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{22 \cdot 32} > 0,$$

οπότε $B > \Gamma$.

9.4 Είναι:

$$\begin{aligned} A &= (+1 + (-1)) \cdot (16 - 9) + 5^{12-10} - 20 = \\ &= 0 + 5^2 - 20 = 25 - 20 = 5. \end{aligned}$$

9.5 Μας βοηθάει το διπλανό διάγραμμα:

Όταν το δοχείο είναι κατά 70% γεμάτο, περιέχει 20lit περισσότερο, από ό-
ταν είναι κατά 30% γεμάτο. Άρα το 40% του δοχείου χωράει 20lit, οπότε όλο το δοχείο χωράει:

$$20 : \frac{40}{100} = 20 \cdot \frac{100}{40} = 50 \text{ lit.}$$

Μπορούμε βέβαια να εργαστούμε και με αναγωγή στη μονάδα:

• Το $\frac{1}{10}$ χωράει 20:40 λίτρα,

• Το 100% χωράει $100 \cdot \frac{20}{40} = 50 \text{ lit.}$

30%	
40%	20lit
30%	30%

Άλλος τρόπος (με εξίσωση)

Αν το δοχείο χωράει x λίτρα, τότε:

$$\frac{70}{100}x - \frac{30}{100}x = 20 \Leftrightarrow \frac{40}{100}x = 20 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x = 200 \Leftrightarrow x = 50 \text{ λίτρα.}$$

9.6 Είναι:

$$A - B = (2 - 1) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) + \\ = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{2001}{2000} - \frac{1}{2000}\right) = \\ = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{2000\text{-όροι}} = 2000.$$

9.7 Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha + \beta = (1 + 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\right) + \dots + \\ + \left(\frac{1}{1999} + \frac{3996}{3998}\right) = \\ = 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1999} + \frac{1998}{1999}\right) = \\ = 2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1998\text{-όροι}} = 2 + 1998 = 2000.$$

Άρα $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2000}{2} = 1000.$

9.8 Είναι:

$$A = 3 \cdot 2^{18} [1 - (-1)] - \\ - 2^6 \cdot (9 - 1)(27 - 11)(81 - 17) = \\ = 3 \cdot 2^{18} (1 + 1) - 2^6 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 64 = \\ = 3 \cdot 2^{18} \cdot 2 - 2^6 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^6 = 3 \cdot 2^{19} - 2^{19} = \\ = 2^{19} (3 - 1) = 2 \cdot 2^{19} = 2^{20}.$$

9.9 α) Είναι:

- $A = 25 - 16 : 8 + 1 = 25 - 2 + 1 = 24,$
- $B = (25 - 16) : (8 + 1) = 9 : 9 = 1.$

β) Έχουμε:

- $\frac{A}{20B} = \frac{24}{20 \cdot 1} = \frac{24}{20} > 1,$
- $\frac{23B}{A} = \frac{23 \cdot 1}{24} = \frac{23}{24} < 1.$

Άρα $\frac{23B}{A} < \frac{A}{20B}.$

9.10 α) Είναι:

- $A = \frac{1}{64} \left(8 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) = \\ = \frac{1}{64} \left(9 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{9}{64}.$
- $B = \frac{9-1}{27} : \frac{10-2 \cdot 3}{27} \cdot \frac{9}{2^7} = \frac{8}{27} \cdot \frac{27}{4} \cdot \frac{9}{2^7} =$

$$= \frac{8 \cdot 9}{4 \cdot 2^7} = \frac{2 \cdot 9}{2^7} = \frac{9}{2^6} = \frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $A = B.$

$$\beta) \quad \Gamma = \frac{8-\alpha}{4\alpha} + \frac{12-2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma-3}{12} = \\ = \frac{8}{4\alpha} - \frac{\alpha}{4\alpha} + \frac{12}{3\beta} - \frac{2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma}{12} - \frac{3}{12} = \\ = \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{4} + \frac{4}{\beta} - \frac{2}{3} + \frac{\gamma}{6} - \frac{1}{4} = \\ = \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} \right) - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \\ = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1-3-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1.$$

9.11 Θα υπολογίσουμε την παράσταση A . Είναι:

$$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499} = \\ = -2^{1000} \cdot \frac{3^{500}}{2^{500}} \cdot \frac{1}{2^{998}} \cdot \frac{2^{499}}{3^{499}} = \\ = -\frac{2^{1000} \cdot 2^{499} \cdot 2^{-500} \cdot 2^{-998}}{3^{-500} \cdot 3^{499}} = \\ = -\frac{2^{1000+499-500-998}}{3^{-500+499}} = -\frac{2}{3^{-1}} = -2 \cdot 3 = -6.$$

Είναι επομένως:

- $3A^v = 3(-6)^v = 3 \cdot 6^v,$
- $B = 2^v \cdot 3^{v+1} = 2^v \cdot 3^v \cdot 3 = (2 \cdot 3)^v \cdot 3 = \\ = 3 \cdot 6^v.$

Άρα $3A^v = B.$

9.12 Παρατηρούμε ότι:

- $2\alpha + \beta + 2\gamma = 3\alpha + 2\beta + 3\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) = \\ = 67 - 20 = 47.$
- $4\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3\alpha + 2\beta + 3\gamma + (\alpha + \beta + \gamma) = \\ = 67 + 20 = 87.$

Άρα $A = 47 \cdot 87 = 4089.$

9.13 Έστω x, y ο συνολικός αριθμός των αγοριών και των κοριτσιών αντίστοιχα. Στο διαγωνισμό συμμετέχουν:

- Τα $\frac{8}{13}$ των αγοριών, δηλαδή $\frac{8x}{13}$ αγόρια.
- Τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών, δηλαδή $\frac{2y}{3}$ κορίτσια.

Συνολικά πήραν μέρος:

$$A = \frac{8x}{13} + \frac{2y}{3} = \frac{24x + 26y}{39} \text{ παιδιά.}$$

- Επειδή στο χορό πήρε μέρος ο ίδιος αριθμός αγοριών – κοριτσιών, είναι:

$$\frac{8x}{13} = \frac{2y}{3} \quad \text{ή} \quad 24x = 26y \Leftrightarrow 12x = 13y$$

Έτσι

$$A = \frac{24x + 26y}{39} = \frac{24x + 24x}{39} = \frac{48x}{39} =$$

$$= \frac{3 \cdot 16x}{3 \cdot 13} = \frac{16x}{13}.$$

- Ο συνολικός αριθμός των παιδιών του σχολείου είναι:

$$B = x + y = x + \frac{6y}{6} = x + \frac{12}{13}x = \frac{25x}{13}$$

διότι:

$$24x = 26y \Leftrightarrow 12x = 13y \Leftrightarrow y = \frac{12x}{13}.$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{16x}{13}}{\frac{25x}{13}} = \frac{16}{25} = \frac{4 \cdot 16}{4 \cdot 25} = \frac{64}{100} = 64\%.$$

- 9.14** Επειδή $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 1998^2 - 1997^2 &= \\ &= (1998 + 1997)(1998 - 1997) = \\ &= 1998 + 1997. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} A &= (1998 + 1997) + (1996 + 1995) + \dots + \\ &+ (2 + 1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 1997 + 1998 = \\ &= (1 + 1998) + (2 + 1997) + \dots + (999 + 1000) = \\ &= \underbrace{1999 + 1999 + \dots + 1999}_{999\text{-όροι}} = \\ &= 999 \cdot 1999 = \text{πολ}1999. \end{aligned}$$

- 9.15** Έστω $222222 = \alpha$. Τότε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\alpha+1)(2\alpha-3)(\alpha-2) + (\alpha-6)}{\alpha^2} = \\ &= \frac{(2\alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha - 3)(\alpha-2) + \alpha - 6}{\alpha^2} = \\ &= \frac{(2\alpha^2 - \alpha - 3)(\alpha-2) + \alpha - 6}{\alpha^2} = \\ &= \frac{2\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha^2 + 2\alpha - 3\alpha + 6 + \alpha - 6}{\alpha^2} = \\ &= \frac{2\alpha^3 - 5\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2(2\alpha-5)}{\alpha^2} = 2\alpha - 5 = \\ &= 2 \cdot 222222 - 5 = 444444 - 5 = 444439. \end{aligned}$$

- 9.16** Ας υπολογίσουμε πρώτα το β' μέλος. Έστω:

$$\alpha = 2^{1995} + 2^{1994} + \dots + 2^2 + 2 + 1 \quad (1).$$

Είναι τότε:

$$2\alpha = 2^{1996} + 2^{1995} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 \quad (2).$$

Αφαιρούμε από τη (2) την (1):

$$2\alpha - \alpha = 2^{1996} - 1 \Leftrightarrow \alpha = 2^{1996} - 1$$

Έτσι η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} 2^{1997} - 2^{1996} - 1 + [(2^2 : 2^2)x - 1 - 4](x + 9) &= \\ &= 2^{1996} - 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

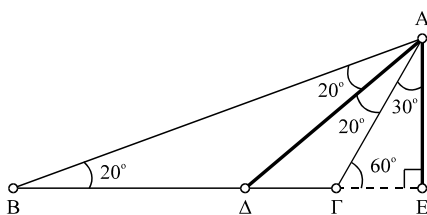
$$\begin{aligned} 2^{1996}(2 - 1) - 1 + (x - 5)(x + 9) &= 2^{1996} - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 5)(x + 9) &= 0 \Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ή} \quad x = 9. \end{aligned}$$

Β' ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- 9.17** α) Έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{1 + 6} = \frac{140^\circ}{7} = 20^\circ.$$

Άρα $\hat{B} = 20^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 6 \cdot 20^\circ = 120^\circ$. Επομένως $\hat{A} = 40^\circ$.

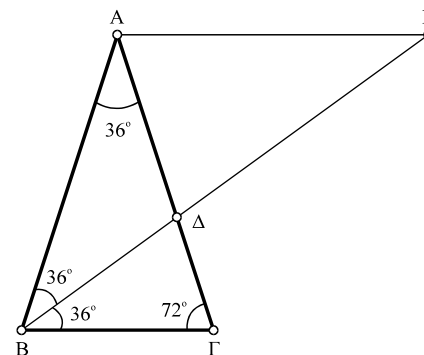


β) Αφού $\hat{A} = 40^\circ$, είναι:

$$\hat{\Delta AB} = \hat{\Delta AG} = 20^\circ$$

Είναι όμως $\hat{\Gamma AE} = 30^\circ$, οπότε $\hat{\Delta AE} = 50^\circ$.

- 9.18** Επειδή $\hat{A} = 36^\circ$, θα είναι:



$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Άρα:

$$\hat{EBA} = \hat{EBG} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

- Είναι $\hat{\Delta BA} = \hat{\Delta AB} = 36^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΔAB είναι ισοσκελές.
- Είναι $\hat{\Delta GB} = 72^\circ$ και $\hat{\Gamma BA} = 36^\circ$, οπότε:

$$\begin{aligned} \hat{BAG} &= 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = \\ &= 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ. \end{aligned}$$

Άρα $\hat{BAG} = \hat{BGA} = 72^\circ$, οπότε το $\hat{BGA}$ είναι ισοσκελές.

- Επειδή $AE \parallel BG$, είναι:

$$\hat{AEB} = \hat{EBG} = 36^\circ = \hat{ABE},$$

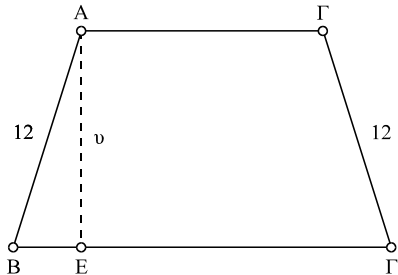
οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

- Στο τρίγωνο AED είναι:

$$\hat{EAD} = \hat{AGB} = 72^\circ.$$

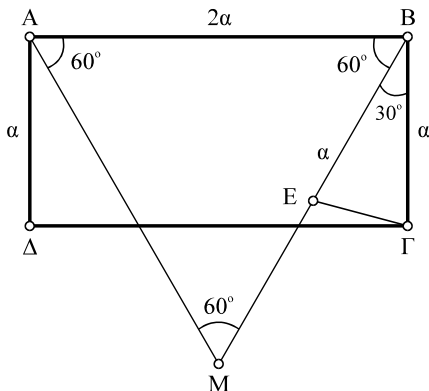
Επίσης $\hat{ADE} = \hat{BAG} = 72^\circ$, οπότε και το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

9.19 Έστω $AE = v$ το ύψος του τραπεζίου. Έχουμε:



- $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 54$ ή
 $12 + (B\Gamma + A\Delta) + 12 = 54$ ή
 $B\Gamma + A\Delta = 54 - 24$ ή $A\Delta + B\Gamma = 30$.
- $E = 120$ ή $\frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \cdot v = 120$ ή
 $\frac{30}{2} \cdot v = 120$ ή $15 \cdot v = 120$ ή
 $v = 120 : 15$ ή $v = 8$ m.

9.20 Αφού $AB = 2A\Delta = 2a$ και το τρίγωνο MAB είναι ισόπλευρο, είναι:

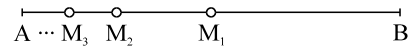


$$BE = \frac{BM}{2} = \frac{2a}{2} = a = B\Gamma.$$

Άρα το τρίγωνο BEΓ είναι ισοσκελές και αφού $\hat{EBG} = 30^\circ$, είναι:

$$\begin{aligned} \hat{BEG} = \hat{BGE} &= \frac{180^\circ - \hat{EBG}}{2} = \\ &= \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ. \end{aligned}$$

9.21 Από την υπόθεση έχουμε:



$$\begin{aligned} AM_{10} &= \frac{1}{2} AM_9 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} AM_8 \right) = \frac{1}{2^3} AM_7 = \\ &= \frac{1}{2^4} AM_6 = \dots = \frac{1}{2^8} AM_2 = \frac{1}{2^9} AM_1 = \\ &= \frac{1}{2^{10}} AB = \frac{1}{2^{10}} \cdot 3 \cdot 2^{11} = 3 \cdot 2^{11-10} = 3 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι στο τυχαίο βήμα $\frac{1}{2^u} AM_p$ είναι $\mu + \rho = 10$.

9.22 Έστω x το πλάτος και $2x$ το μήκος του. Η νέα πλευρά είναι:

$$x + \frac{25}{100}x = x + \frac{1}{4}x = \frac{5x}{4}.$$

Έστω ότι η μείωση είναι $\alpha\%$. Τότε το νέο μήκος είναι:

$$2x - \frac{\alpha}{100} 2x = \left(1 - \frac{\alpha}{100} \right) 2x = \frac{(100 - \alpha)x}{50}.$$

Το εμβαδόν δε μεταβάλλεται, οπότε:

$$\begin{aligned} x \cdot 2x &= \frac{5x}{4} \cdot \frac{(100 - \alpha)x}{50} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= \frac{x^2(100 - \alpha)}{40} \Leftrightarrow 100 - \alpha = 80 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha &= 100 - 80 \Leftrightarrow \alpha = 20. \end{aligned}$$

Άρα το μήκος πρέπει να μειωθεί κατά 20%.

Γ' ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

9.23 Είναι $a = 4\lambda + 1$, $39 < a < 50$, οπότε το a είναι σίγουρα περιττός. Έτσι:

$$39 < 4\lambda + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\lambda < 49 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{19}{2} < \lambda < \frac{49}{4} \Leftrightarrow 9 + \frac{1}{2} < \lambda < 12 + \frac{1}{4}.$$

Αλλά $\lambda \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda = 10$ ή 11 ή 12 , οπότε $a = 41$, ή $a = 45$ ή $a = 49$.

9.24 α) Είναι:

$$\bullet \quad x = 9 - 4 \cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 =$$

$$= 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$\bullet \quad y = 4 \cdot 25 - 64 + 7 \cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

β) Προφανώς $A = \text{MKΔ}(33, 99) = 33$.

9.25 Έχουμε:

$$\bullet \quad A - B = 27 \Leftrightarrow (100a + 10\beta + \gamma) - (100a + 10\gamma + \beta) = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 9(\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3.$$

$$\bullet \quad 3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 5x - 3x > 12 + 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα $x = 7$, οπότε $\beta + \gamma = 7$.

Έχουμε λοιπόν ότι $\beta - \gamma = 3$, δηλαδή:

$$\beta = 3 + \gamma,$$

οπότε:

$$\beta + \gamma = 7 \quad \text{ή} \quad 3 + \gamma + \gamma = 7 \quad \text{ή} \quad 2\gamma = 4 \quad \text{ή} \quad \gamma = 2.$$

Άρα $\gamma = 2$ και $\beta = 3 + \gamma = 3 + 2 = 5$.

Ο a έχει τη μορφή $\overline{a52}$ και το άθροισμα των ψηφίων του είναι $a + 7$. Επειδή ο A διαιρείται με το 3, πρέπει ο $a + 7$ να διαιρείται με το 3, επομένως:

$$a = 2 \quad (\text{οπότε } a + 7 = 9) \quad \text{ή}$$

$$a = 5 \quad (\text{οπότε } a + 7 = 12) \quad \text{ή}$$

$$a = 8 \quad (\text{οπότε } a + 7 = 15).$$

Έτσι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 252, 552, 852.

9.26 Παρατηρούμε ότι στον αριθμό που προκύπτει:
 $a = 19901991 \dots 19961997$

το άθροισμα των ψηφίων είναι:

$$S = 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9 + (0 + 1 + 2 + \dots + 7) = \\ = 8 + 72 + 72 + 28 = 36 + 144 = 180.$$

Όμως $1 + 8 + 0 = 9$, που σημαίνει ότι ο 180, άρα και ο αριθμός a , διαιρείται με το 9 (και με ο 3). Άρα ο A είναι σύνθετος.

9.27 Έστω $x = \overline{a\beta\gamma}$ ο ζητούμενος αριθμός. Τότε:

$$\bullet \quad a + \beta + \gamma = 10.$$

$$\bullet \quad \overline{a\beta\gamma} - \overline{\gamma\beta a} = 297 \Leftrightarrow (100a + 10\beta + \gamma) - \\ - (100\gamma + 10\beta + a) = 297 \Leftrightarrow 99a - 99\gamma = \\ = 297 \Leftrightarrow a - \gamma = 3.$$

Άρα:

$$(a, \gamma) = \{(3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 3), \\ (7, 4), (8, 5), (9, 6)\}.$$

Επειδή $a + \beta + \gamma = 10$, είναι:

$$(a, \gamma) = (3, 0) \quad \text{ή} \quad (4, 1) \quad \text{ή} \quad (5, 2) \quad \text{ή} \quad (6, 3),$$

οπότε:

$$\overline{a\beta\gamma} \in \{370, 451, 532, 613\}.$$

9.28 Είναι:

$$\begin{array}{r|l} 4375 & 5 \\ 875 & 5 \\ 4375 = 5^4 \cdot 7, & 175 & 5 \\ & 35 & 5 \\ \text{δηλαδή:} & 7 & 7 \\ & 1 & 1 \end{array}$$

$$\bullet \quad x^2(y + 2) = 5^2(5 + 2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x^2 = (5^2)^2 \text{ και } y + 2 = 5 + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 25 \text{ και } y = 5).$$

$$\bullet \quad x^2(y + 2) = 5^2(5^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 2) = 5^2(173 + 2) \text{ οπότε } (x^2 = 5^2 \text{ και } y + 2 = 173 + 2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x = 5 \text{ και } y = 173).$$

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**ΘΕΜΑΤΑ ΕΜΕ 1995-2015****ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΘΑΛΗΣ****Α. ΑΛΓΕΒΡΑ**

1. Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq -1$ να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$A = \frac{1}{\alpha^{-1995} + 1} + \frac{1}{\alpha^{-1994} + 1} + \dots + \frac{1}{\alpha^0 + 1} + \frac{1}{\alpha^1 + 1} + \dots + \frac{1}{\alpha^{1994} + 1} + \frac{1}{\alpha^{1995} + 1}$$

(Θαλής 1995)

2. Ποιος από τους αριθμούς A, B είναι μεγαλύτερος;

α) $A = (-1995)^{1996}$, $B = (-1996)^{1995}$.

β) $A = 1 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right)$, $B = 0,0100001$.

γ) $A = -\frac{5555553}{5555557}$, $B = -\frac{6666665}{6666669}$.

(Θαλής 1995)

3. Έστω οι αριθμοί α, β με $\frac{1}{2}\alpha + 2,5\beta + 1,5\alpha - \frac{1}{2}\beta = -6$.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{114 - 3(\alpha - \beta) - 2(\alpha - 2\beta) - 5 + 3[5\alpha - (-\beta + 1)]}{-2(2\alpha - \beta) - 4(3\beta - 1) - 2(-2\alpha - 5\beta)}$

(Θαλής 1996)

4. Ν' αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A = \frac{222223 \cdot 444441 \cdot 222220 + 222216}{222222^2}$ είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

(Θαλής 1998)

5. Ν' αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ είναι

πολλαπλάσιο του 1999.

(Θαλής 1998)

6. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499} \text{ και } B = 2^v \cdot 3^{v+1} \text{ όπου } v\text{-άρτιος φυσικός.}$$

Να συγκριθούν οι αριθμοί $3 \cdot A^v$ και B .

(Θαλής 1999)

7. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1999} \text{ και } B = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \dots + \frac{3994}{3996} + \frac{3996}{3998}.$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $\frac{A+B}{2}$

(Θαλής 1999)

8. Δίνονται οι παραστάσεις $A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1$ και $B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1)$. Να βρεθούν οι A , B και να

συγκριθούν οι αριθμοί $\frac{A}{20B}$, $\frac{22B}{A}$.

(Θαλής 2000)

9. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2001}{2000} \text{ και } B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000}.$$

Να βρείτε τον αριθμό $A - B$.

(Θαλής 2000)

10. Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A = (2^{10} : 2^6)^2 - 3^{12} : (3^9 \cdot 3) + 5 \cdot (2^3 + 3^2), \quad B = 5 \cdot (2^3 - 1) + 8 \cdot (3^3 - 20) - 8 \cdot (5^2 - 15).$$

(Θαλής 2001)

11. Είναι γνωστό ότι το αλεύρι αυξάνει το βάρος του κατά το ζύμωμα κατά 50%, ενώ το

ζυμάρι χάνει στο ψήσιμο το 20% του βάρους του. Να βρείτε πόσα κιλά αλεύρι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την παραγωγή 840 κιλών ψωμιού.

(Θαλής 2001)

12. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 2 \cdot 50 - 40 : 10 + 5 \cdot (100 - 4 \cdot 20)^2 - 92.$$

(Θαλής 2002)

13. Δίνονται οι αριθμοί: $A = 2^{41}$, $B = 8^{13}$, $\Gamma = 4^{21}$ και $\Delta = 32^8$.

- α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς αυτούς είναι ο μεγαλύτερος.
 β) Να εκφράσετε το άθροισμα $A + B + \Gamma + \Delta$ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(Θαλής 2002)

14. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2415 - 4 \cdot 10^2 + 2003^0 - 2 \cdot 3^2 + 2$.

(Θαλής 2003)

15. Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε το 2001 (από 1-1-2001 μέχρι 31-12-2001) κατά 20%.
 Στη συνέχεια το 2002 μειώθηκε κατά 10%, ενώ το 2003 αναμένεται αύξηση κατά 25%.

α) Να προσδιορίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό, της μεταβολής της τιμής του προϊόντος κατά την τριετία από 1-1-2001 μέχρι 31-12-2003.

β) Αν η τιμή του προϊόντος ήταν 1,60 € την 1-1-2001, ποια θα είναι η τιμή του την 31-12-2003;

(Θαλής 2003)

16. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2^3 \cdot 5^3 + 2004 : 4 + (3^2 - 4) \cdot 100 + 3$

(Θαλής 2004)

17. Η τιμή του πετρελαίου στη Ν. Υόρκη ένα χρόνο πριν στις 30-10-2003 ήταν 32 δολάρια το βαρέλι, ενώ σήμερα είναι 54,4 δολάρια το βαρέλι.

(α) Πόσο τις εκατό έχει αυξηθεί η τιμή του βαρελιού σε σχέση με την τιμή που είχε ένα χρόνο πριν;

(β) Πόσα δολάρια πρέπει να μειωθεί η τιμή του βαρελιού μέχρι την 30-11-2004 έτσι ώστε η τιμή που θα έχει τότε να είναι αυξημένη κατά 40% σε σχέση με την τιμή που είχε στις 30-10-2003;

(Θαλής 2004)

18. Να υπολογιστεί το 3,6% του αριθμού $A = \frac{3 + \frac{4,2}{0,1}}{\left(\frac{1}{0,3} - \frac{7}{3}\right) \cdot 0,3125}$.

(Θαλής 2005)

19. Ο Γιώργος πήγε στο βιβλιοπωλείο έχοντας 20€. Στο μαγαζί υπάρχουν δύο είδη μολυβιών. Η εξάδα του πρώτου είδους κόστιζε 1,17€ ενώ η εξάδα του δεύτερου είδους κόστιζε 1,60€.

Πόσες εξάδες κάθε κατηγορίας πρέπει ν' αγοράσει ο Γιώργος έτσι ώστε να πάρει τα λιγότερα ρέστα;

(Θαλής 2005)

20. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \{ 111 - [264 - (15 + \frac{54}{6}) \cdot |-5|] : 12 \} : 11 + 1$

(Θαλής 2006)

21. Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

(Θαλής 2006)

22. Το 6% του αριθμού $\alpha \neq 0$ είναι ίσο με το 4% του αριθμού β . Να βρείτε την τιμή του κλάσματος

$$K = \frac{9\alpha - 3\beta}{6\alpha - \beta}.$$

(Θαλής 2006)

23. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4.$

(Θαλής 2008)

24. Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = (200 : 8 + 12 \cdot 100) + [200 : (8 + 2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^2.$$

(Θαλής 2007)

25. Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α', Β' και Γ' είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

(Θαλής 2007)

26. Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

(Θαλής 2007)

27. Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$A = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

(Θαλής 2009)

28. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \alpha + 5(4 + \alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919.$$

(Θαλής 2008)

29. Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το

μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

(α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

(β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

(Θαλής 2009)

30. Έστω $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y .

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο A του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

(Θαλής 2010)

31. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδεντρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδεντρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδεντρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδεντρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδεντρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδεντρου του κτήματος του αγρότη.

(Θαλής 2010)

32. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5\frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right).$$

(Θαλής 2011)

33. Αν ο v είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{v}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις

δυνατές τιμές της παράστασης: $B = \frac{2}{v - \frac{1}{5}} : \frac{v - \frac{v}{2}}{9}$.

(Θαλής 2011)

34. Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ .

(Θαλής 2011)

35. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right).$$

(Θαλής 2012)

36. Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30

και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης: $B = \frac{2 - \frac{\kappa}{2}}{\kappa - \frac{1}{2}} : \frac{\frac{3 - \kappa}{2}}{\kappa}$

(Θαλής 2012)

37. Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

(Θαλής 2012)

38. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9}.$

(Θαλής 2013)

39. Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσό χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

(Θαλής 2013)

40. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$.

(Θαλής 2014)

41. Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α και Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

(Θαλής 2014)

42. Χωρίς την εκτέλεση των διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}$$

(Θαλής 2014)

43. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων: $A = 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11}$,

$B = (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7}$ και να τις συγκρίνετε.

(Θαλής 2015)

44. Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha=6$ μέτρα και πλάτος $\beta=4$ μέτρα. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, (ii) το εμβαδό του ορθογωνίου.

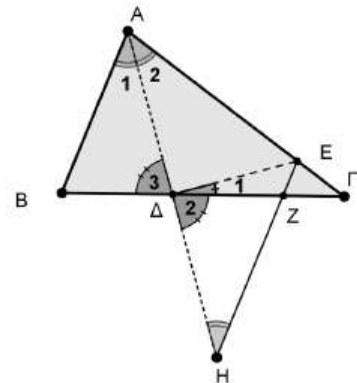
(Θαλής 2015)

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

45. Να χαράξετε κύκλο (Κ,3cm). Με κέντρο το σημείο Λ του κύκλου να χαράξετε δεύτερο κύκλο (Λ,3cm).

Η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τον Κ στο Α και τον Λ στο Β, αν προεκταθεί. Να κατασκευάσετε τις ακτίνες ΚΓ, ΛΔ κάθετες στην ΚΛ και προς το αυτό μέρος της ΚΛ.

- α)** Τι είδους είναι τα σχήματα ΚΛΔΓ, ΑΓΛ, ΑΔΒ, ΑΚΔΓ, ΑΓΔΒ;
β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των πέντε αυτών σχημάτων.



(Θαλής 1995)

46. Στην ημιευθεία Οx, θεωρούμε σημεία Α, Β, Γ ώστε (ΟΑ)=2m, (ΟΒ)=6m, (ΟΓ)=12m.

Έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε τα (ΔΖ), (ΕΓ). Τι παρατηρείτε;

(Θαλής 1996)

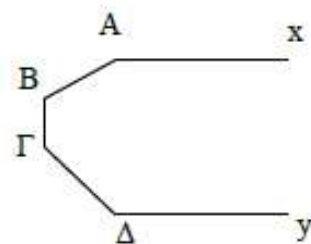
47. Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=10cm και ΓΔ=25cm και Μ τυχαίο

σημείο της βάσης ΑΒ. Να βρεθεί η σχέση του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΜ με το μέρος του τραpezίου που περισσεύει.

(Θαλής 1997)

48. Στο σχήμα είναι Αx//Δy. Να υπολογιστεί το άθροισμα των

γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$.



(Θαλής 1998)

49. Πάνω σε μια ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ. Έστω M είναι το μέσον του AB και N είναι το μέσον του BΓ.

Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος MN, όταν:

α) $AB = 8\text{cm}$, $B\Gamma = 10\text{cm}$,

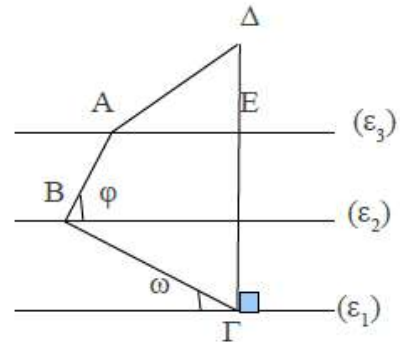
β) $AB = 10\text{cm}$, $A\Gamma = 18\text{cm}$.

50. Στο σχήμα δίνεται ότι:

i) $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ ii) $\Gamma\Delta \perp (\varepsilon_1)$

iii) $AE = ED$ iv) $\omega = 30^\circ$, $\varphi = 50^\circ$

Να βρεθούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ABΓΔ.



(Θαλής 1999)

51. Τον τραπέζιου ABΓΔ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) δίνονται:

(α) $AB = \Gamma\Delta = 12$ μέτρα (β) Η περίμετρός του 54 μέτρα

(γ) Το εμβαδό του E = 120 τ.μ.

Να βρείτε το ύψος του υ.

(Θαλής 2000)

52. Στο σχήμα δίνονται:

(α) $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$

(β) $AB = A\Gamma$ και $\hat{BAG} = 20^\circ$

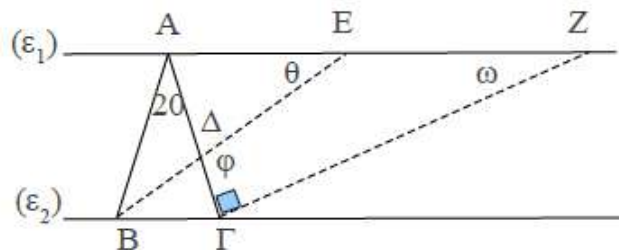
(γ) Η BΔ είναι διχοτόμος της γωνίας

$\hat{ABG}$

(δ) $\Gamma Z \perp A\Gamma$.

Να βρείτε τις γωνίες $\varphi = \hat{GDE}$, $\theta = \hat{AED}$ και ω .

Να εξηγήσετε γιατί οι ευθείες BE και ΓZ δεν είναι παράλληλες.

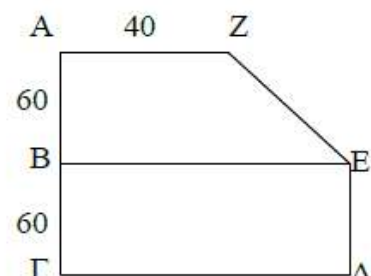


(Θαλής 2000)

53. Ο αγρός ABΓΔEZ στο σχήμα αποτελείται από το τραπέζιο

ABEZ με $\hat{A} = 90^\circ$ και το ορθογώνιο BΓΔE με $AB = B\Gamma = 60\text{m}$ και $AZ = 40\text{m}$. Το εμβαδό του αγρού είναι 10.200 m^2 .

Μπάμπης Στεργίου – Μαθηματικός



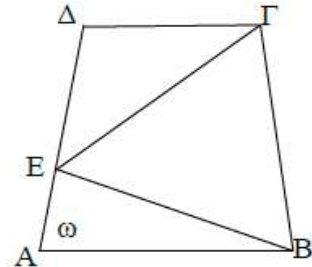
Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ.

(Θαλής 2001)

54. Στο σχήμα το τετράπλευρο είναι τραπέζιο. Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισόπλευρο και τα ΑΒΕ και ΓΔΕ ισοσκελή με $BA = BE$ και $ΓΔ = ΔΕ$.

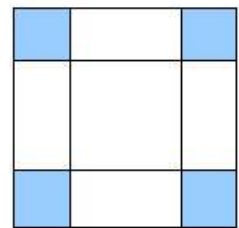
Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B\hat{A}\Delta} = \omega$.

(Θαλής 2001)



55. Ένα τετράγωνο πλευράς 4 διαιρείται με τέσσερις ευθείες παράλληλες ανά δύο προς τις πλευρές του σε σχήματα, έτσι ώστε τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα από αυτά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι τετράγωνα πλευράς 1.

Πόσα είναι τα τετράγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και ποιο είναι το άθροισμα των εμβαδών τους;



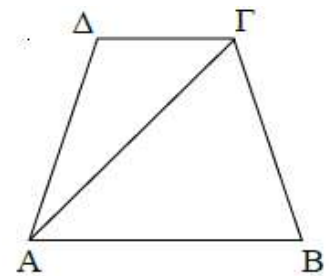
(Θαλής 2002)

56. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel ΓΔ$) του σχήματος δίνονται $\hat{B\hat{A}\Delta} = \hat{A\hat{B}\Gamma}$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή με $AB = ΑΓ$ και $ΑΔ = ΓΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\hat{B\hat{A}\Delta}$.

β) Να υπολογιστεί η γωνία $\omega = B$.

(Θαλής 2003)



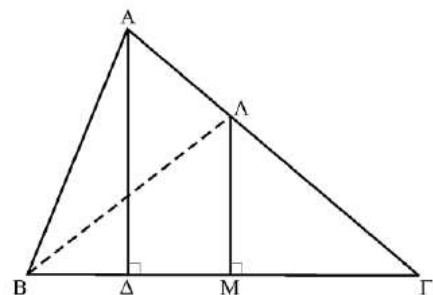
57. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΜΛ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ στο μέσον της Μ. Επιπλέον

δίνονται: $ΜΓ = 5\text{cm}$, $\hat{M\hat{A}\Gamma} = 45^\circ$, $\hat{A\hat{B}\Lambda} = 30^\circ$ και το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ ίσο με 35cm^2 .

Να βρείτε:

(α) τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

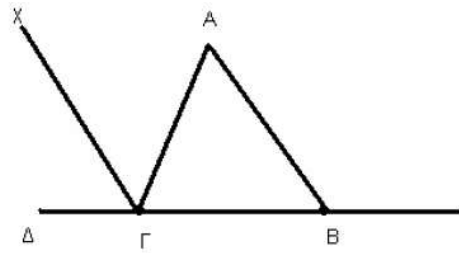


(Θαλής 2004)

58. Έστω $\hat{x}\hat{O}y$ μια γωνία 70° , OA μια ημιευθεία που είναι κάθετη επί της Ox και OB μια ημιευθεία που είναι κάθετη επί της Oy . Να υπολογιστούν τα μέτρα των γωνιών $\hat{AOB}$, $\hat{AOy}$ και $\hat{BOx}$.

(Θαλής 2005)

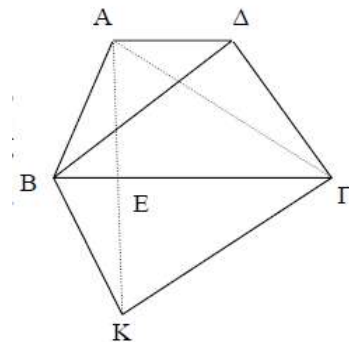
59. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = BG$ και η διχοτόμος Gx της γωνίας $\hat{A}\hat{G}\hat{\Delta}$ είναι παράλληλη στην AB . Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABG .



(Θαλής 2006)

60. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση $B\Gamma$ είναι διπλάσια της μικρής βάσης $A\Delta$. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι 300 cm^2 και το σημείο K είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $B\Gamma$ (δηλαδή η $B\Gamma$ είναι μεσοκάθετος της AK), να υπολογίσετε:

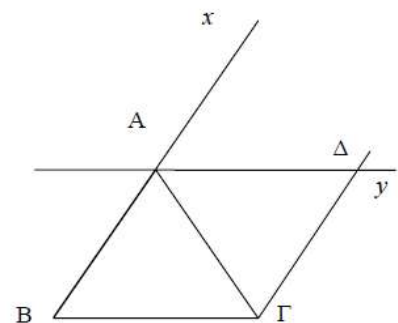
- (α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και
- (β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABK\Gamma$.



(Θαλής 2007)

61. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Ay είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{x}$. Δίνεται ακόμη ότι: $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 62^\circ$ και $AB = A\Delta$.

- (α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- (β) Να εξηγήσετε γιατί η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$.



(Θαλής 2008)

62. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο I . Η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AG τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Αν είναι $\hat{I\Delta\Gamma} = 70^\circ$ και $\hat{IE\Gamma} = 130^\circ$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) οι γωνίες $\hat{B\Gamma\Delta}$ και $\hat{E\Gamma\Gamma}$.

(Θαλής 2010)

63. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140° και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

(α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχούν στην πλευρά του $B\Gamma$.

(Θαλής 2009)

64. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$ και η διχοτόμος του $A\Delta$.

Προεκτείνουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔH έτσι ώστε $A\Delta = \Delta H$.

Από το σημείο H φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB που τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E και την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z .

α. Να αποδείξετε ότι : $\hat{A\Delta E} = 90^\circ$.

β. Να βρείτε τη γωνία $\hat{E\Delta Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$.

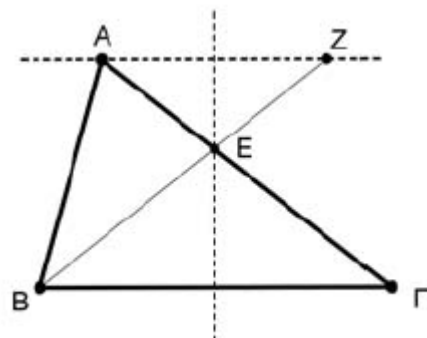
(Θαλής 2011)

65. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 60^\circ$ και $AG = \frac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο E πάνω στην πλευρά AG τέτοιο

ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BE στο σημείο Δ , να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

(Θαλής 2012)

66. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Γ . Η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E και η ευθεία BE τέμνει την ευθεία



(ε), που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

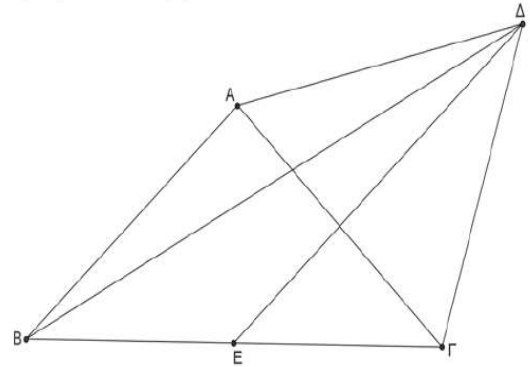
(α) $AZ = AB$, (β) οι γωνίες $AEB = B$.

(Θαλής 2013)

67. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\angle A = 90^\circ$ και $AB = AG$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία ΒΔΕ.



(Θαλής 2014)

68. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και γωνία $BAG = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες ΒΖΔ και ΓΑΖ.

(Θαλής 2015)

Γ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

69. Κάποιος μαθητής έβαλε στο νου του πέντε αριθμούς διαφορετικούς μεταξύ τους ακεραίους, θετικούς και αρνητικούς, που το γινόμενο τους ήταν 20. Να βρεθούν οι διαφορετικοί αυτοί ακέραιοι.

(Θαλής 1996)

70. Γράφουμε συνεχόμενα τους αριθμούς από το 1990 έως το 1997. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος .

(Θαλής 1997)

71. Αν παρατάξουμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου σε τριάδες περισσεύουν 2. Αν τους παρατάξουμε σε τετράδες ή σε πεντάδες επίσης περισσεύουν 2. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των μαθητών, αν γνωρίζουμε ότι είναι τριψήφιος με άθροισμα ψηφίων 5.

(Θαλής 2003)

72. Ένας τετραψήφιος αριθμός K έχει όλα τα ψηφία του ίσα και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 20.

(α) Να βρεθεί ο αριθμός K

(β) Να βρεθεί δεκαδικός αριθμός a και φυσικός αριθμός n τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$K = a \cdot 10^n, \text{ με } 1 \leq a \leq 10.$$

(Θαλής 2004)

73. Για ποια ψηφία a και b διαιρείται δια του 45 ο αριθμός του οποίου η παράσταση στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι $6a12b$;

(Θαλής 2005)

74. Έστω a θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου a ;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός a , αν είναι περιττός, μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

(Θαλής 2009)

75. Έστω a , b φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον a και διαιρέτη τον b δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός a , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο a είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός b είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

(Θαλής 2010)

76. Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της

διαίρεσης είναι ίσο με 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο

με 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του

μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

77. Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x - 1$, x , $x + 1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Θαλής 2015)

Δ. ΜΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

78. Έχουμε 200 αυγά τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε καλάθια κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε καλάθι να περιέχει διαφορετικό αριθμό αυγών.

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός καλαθιών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη διαδικασία;

(Θαλής 1995)

79. Ένα τετράγωνο λέγεται "μαγικό" όταν το άθροισμα των αριθμών σε κάθε οριζόντια γραμμή είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη και επίσης ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε μια από τις δύο διαγώνιες.

Π.χ.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

εδώ έχουμε $2 + 7 + 6 = 9 + 5 + 1 = \dots = 15$.

Σε κάποιο μαγικό τετράγωνο οι αριθμοί έσβησαν και έμειναν μόνο το 7 και το 13 όπως στο παρακάτω.

		7
13		

Να αποδειχτεί ότι απαραίτητως σε κάποια θέση του μαγικού αυτού τετραγώνου υπάρχει ο αριθμός 1, ανεξάρτητα από τα ποια είναι τα υπόλοιπα νούμερά του.

(Θαλής 1996)

80. Μια ποδοσφαιρική ομάδα έχει 20 ποδοσφαιριστές, από τους οποίους ο μικρότερος είναι 18 χρονών και ο μεγαλύτερος 33. Να εξετάσετε αν υπάρχουν δύο ποδοσφαιριστές με την ίδια ηλικία.

(Θαλής 1997)

81. Στο σχολείο διοργανώνεται ένας διαγωνισμός χορού, στον οποίο θα συμμετέχουν μόνο ζευγάρια (αγόρι - κορίτσι). Δηλώνουν συμμετοχή ζευγάρια που σχηματίστηκαν από τα $\frac{8}{13}$ του συνολικού αριθμού των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των κοριτσιών.

Να προσδιορίσετε το ποσοστό των μαθητών που λαμβάνουν μέρος στο χορό.

(Θαλής 1997)

82. Ένα δοχείο, όταν είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από την περίπτωση που θα ήταν κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα περιέχει το δοχείο όταν είναι πλήρες;

(Θαλής 1998)

83. Στις Δημοτικές εκλογές της πρώτης Κυριακής (13 Οκτωβρίου 2002) σε ένα Δήμο συμμετείχαν οι συνδυασμοί Α, Β και Γ. Ονομάζουμε n τον αριθμό των εγγεγραμμένων στους εκλογικούς καταλόγους ψηφοφόρων. Συνολικά ψήφισε το 75% του αριθμού n και όλα τα ψηφοδέλτια ήταν έγκυρα. Ο συνδυασμός Α ψηφίστηκε από το 39% του αριθμού n , ενώ ο συνδυασμός Β ψηφίστηκε από το 27% του αριθμού n . Λευκά ψηφοδέλτια δεν βρέθηκαν.

α) Να εξετάσετε αν ο αρχηγός του συνδυασμού Α εξελέγη Δήμαρχος από την πρώτη Κυριακή, δηλαδή αν ο συνδυασμός του έλαβε ποσοστό μεγαλύτερο του 50% ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

β) Να βρείτε το ποσοστό των ψήφων του συνδυασμού Δ ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

(Θαλής 2002)

84. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

(Θαλής 2008)

Ευχαριστίες :

Ευχαριστώ το συνάδελφο και φίλο Χρήστο Τσιφάκη για την βοήθειά του στον ηλεκτρονικό σχεδιασμό και στη δημιουργία του αρχείου των θεμάτων.