ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{-20}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{-5}\right)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^3-\left(\frac{9}{-3}\right)^3$$

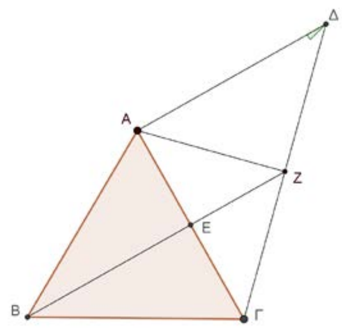
$$=(-4)^2+(-3)^3+(-4)^3-(-3)^3=(-4)^2+(-4)^3=16-64=-48.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

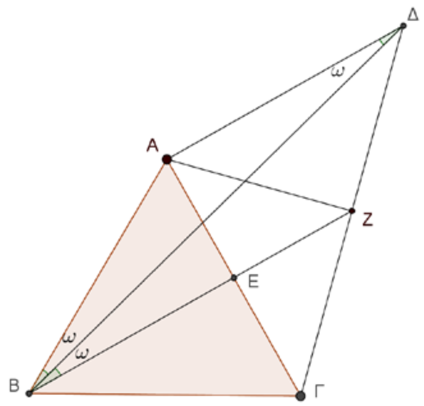
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$.



Λύση

(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $ΑΔ = α$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Β}Δ \qquad (1)$$

Όμως έχουμε

$$Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Δ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \qquad (2)$$

Επομένως από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Β}Δ = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Εναλλακτικά, μετά τη σχέση (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής: Η διάμεσος ΒΕ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά ΑΓ, όπως είναι κάθετη και η ΑΔ, από την υπόθεση. Επομένως είναι $ΒΕ \parallel ΑΔ$, οπότε

$$Α\hat{Δ}Β = Δ\hat{Β}Ε \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$Α\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Ε. \qquad (4)$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Β}Ε$, οπότε θα έχουμε

$$Α\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Ε = \frac{Α\hat{Β}Ε}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η ΒΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, δηλαδή $Α\hat{Β}Ε = \frac{Α\hat{Β}Γ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $Α\hat{Δ}Β = 15^\circ.$

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $α\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $β\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις . Να βρείτε την τιμή του $β$ συναρτήσει της τιμής του $α$.

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540α}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540-\frac{540\alpha}{100}+\left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540-\frac{540\alpha}{100}+\left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100}=540 \Leftrightarrow \left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\beta=540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100}\cdot\beta=540\alpha \Leftrightarrow \beta=\frac{540\alpha\cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta=\frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: $88, 89, 98, 99$. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός Α είναι διψήφιος, τότε πρέπει $A=88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί $8888, 9988$ έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι $8988, 9888$, οπότε η ελάχιστη τιμή του Α είναι 8988.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha=\frac{12^{\nu}}{3^{\nu}}:2^{2\nu-1}$ και $\beta=10^{2\nu+1}:100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\left(\alpha^3-\beta\right)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha}$$

.

Λύση

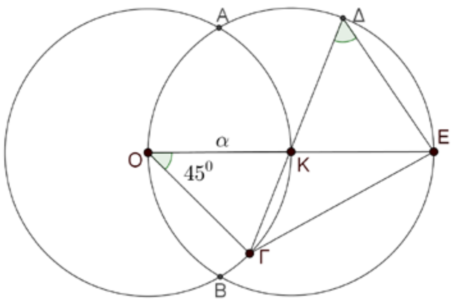
Έχουμε ότι $\alpha = \frac{12^\nu}{3^\nu} : 2^{2\nu-1} = \left(\frac{12}{3}\right)^\nu : 2^{2\nu-1} = 4^\nu : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu} : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu-(2\nu-1)} = 2.$

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4, \alpha^3 = 8$ και

$$\mathrm{A} = \frac{(\alpha^3-\beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha} = \frac{(8-10)^3 + 40 - 20 + 8}{4 + 20 - 20} = \frac{-8 + 40 - 20 + 8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OK} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 45^\circ$, να βρείτε :

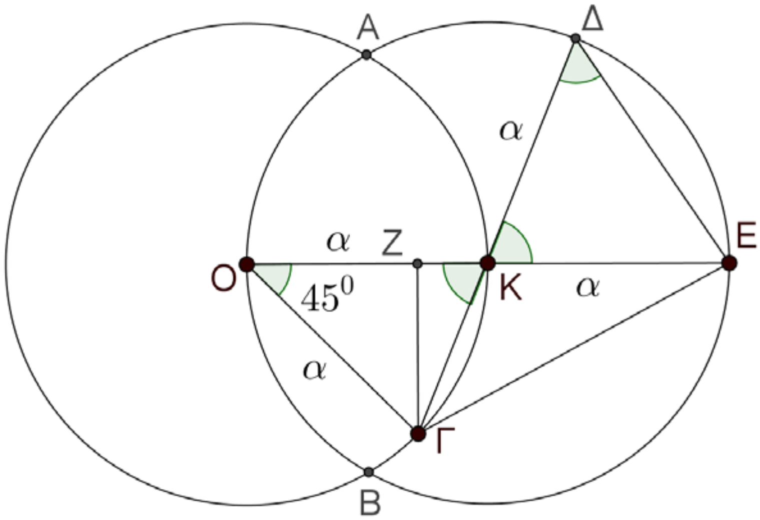


(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{K\hat{\Delta}E}$,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΟΚΓ έχει $\mathrm{OK} = \mathrm{O\Gamma} = \alpha$, οπότε είναι ισοσκελές με βάση ΚΓ. Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\mathrm{O\hat{K}\Gamma} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\mathrm{\Delta\hat{K}E}$ και $\mathrm{O\hat{K}\Gamma}$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\Delta\hat{K}E = O\hat{K}\Gamma = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $K\hat{\Delta}E$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔΚΕ (έχει $K\Delta = KE = \alpha$), οπότε

$$K\hat{\Delta}E = \frac{180^\circ - 67,5^\circ}{2} = \frac{112,5^\circ}{2} = 56,25^\circ \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓΖ το ύψος του τριγώνου ΟΓΕ από την κορυφή Γ. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε

$$\Gamma Z = \alpha \cdot \eta\mu 45^\circ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ είναι

$$E\left(O\Gamma\Delta\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x, .όπου $x \geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{450}{x} = \frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x} + \frac{270}{x} = \frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος , πρέπει:

$$\frac{720}{x} > 120 \Leftrightarrow 120x < 720 \Leftrightarrow x < 6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x = 4$ ή $x = 5$. Όμως η τιμή $x = 4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450:4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x = 5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5} = 144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{A}{36}, \frac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{\text{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<\frac{3959}{36}<\frac{3960}{36}=110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{\text{B}}{45}=\frac{\overline{5c3d}}{45}>\frac{5030}{45}>111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d ισχύει ότι:

$$\frac{\text{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}=\frac{\text{B}}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{\text{A}}{36}<110<111<\frac{\text{B}}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109\le\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}\le 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b}>109\cdot 36\Leftrightarrow\overline{3a5b}>3924$, οπότε πρέπει $a=9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45}\le 112\Leftrightarrow\overline{5c3d}<112\cdot 45\Leftrightarrow\overline{5c3d}<5040,$$

οπότε $c=0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\le x^3+x+19. \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Λύση.

Έχουμε:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\le x^3+x+19\Leftrightarrow x^3-x^2+x^2-x+x-1+5x\le x^3+x+19$$

$$\Leftrightarrow x^3-1+5x\le x^3+x+19\Leftrightarrow 4x\le 20\Leftrightarrow x\le 5.$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9}\Leftrightarrow 6x-3-23>4x-21\Leftrightarrow 2x>5\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{5}{2}<x\le 5$, οπότε οι ακέραιες τιμές του x που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3 , 4 και 5.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $A=\overline{\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}\cdots\alpha_1\alpha_0}=\alpha_\nu\cdot 10^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot 10^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0$, $\nu\geq 2,$ ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Λύση

Επειδή τα ψηφία του αριθμού έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα 8, αυτά πρέπει να είναι διαιρέτες του 8 που έχουν άθροισμα 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι οι θετικοί ακέραιοι 1,2, 4 και 8. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολλαπλάσια του 8 είναι άρτιοι ακέραιοι, οι δυνατές επιλογές ψηφίων είναι:

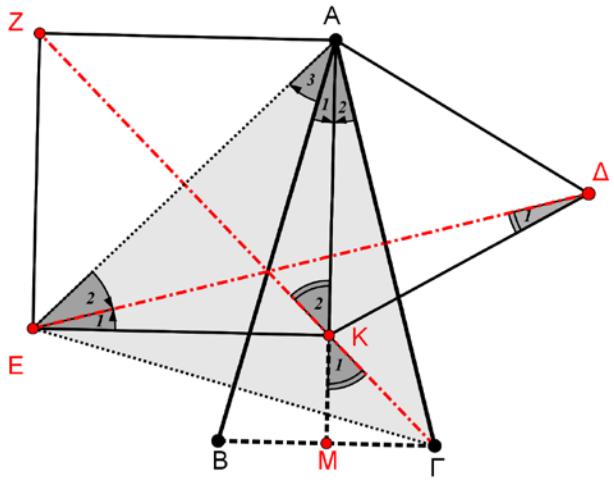
- 1,1,2 και 4, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112.Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός A = 4112 διαιρείται με το 8.
- 1,1,2,2,2, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 11222, 12122, 12212, 21122, 21212 και 22112 Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός A = 22112 διαιρείται με το 8.

Άρα υπάρχουν δύο δυνατές τιμές του A που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος 4112 και ο πενταψήφιος 22112.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A}=30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΜΒ=ΜΓ=ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Λύση



Σχήμα 3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΚ, έχουμε: $\widehat{K}_1=45^\circ$.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΖ, έχουμε: $\widehat{K}_2=45^\circ$.

Άρα τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά, οπότε η ΓΖ είναι μεσοκάθετος της ΑΕ **(*)** και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές (ΓΑ=ΓΕ).

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ισότητες γωνιών:
$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15°$ (διότι $\widehat{A} = 30°$) και $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 45°$ (διότι $E\widehat{A}K = 45°$).
Άρα $E\widehat{A}\Gamma = 60°$ και κατά συνέπεια το ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο.
Επιπλέον $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 30° = \widehat{A}_3$.
Άρα η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{E\widehat{A}\Gamma}$ **(**)**.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΕ ισχύει $\Delta\widehat{K}E = 90° + 60° = 150°$.
Άρα $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{E}_1 = 15°$. Επειδή όμως $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 45°$, καταλήγουμε $\widehat{E}_2 = 30°$,
δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\widehat{E}\Gamma}$ **(***)**.
Από τα συμπεράσματα (*),(**) και (***) καταλήγουμε ότι οι ΔΕ, ΓΖ και ΑΒ συντρέχουν, δηλαδή οι ΔΕ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο
$$\mathrm{A} = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$
να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Λύση
Θέτουμε $n = 2014$ και τότε έχουμε: $\mathrm{A} = (n+3)(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)$ και θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό Α στη μορφή $\mathrm{A} = \varphi(n)^2 - k$, όπου $\varphi(n)$ πολυώνυμο μεταβλητής n με ακέραιους συντελεστές και k θετικός ακέραιος. Με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:
$$\mathrm{A} = (n^2-9)(n^2-4)(n^2-1) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 =$$
$$= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) - 36 = n^2(n^2-7)^2 - 36$$
Επομένως, αν στον αριθμό Α προσθέσουμε θετικό ακέραιο $k = 36$, παίρνουμε ότι $\mathrm{A} + 36 = n^2(n^2-7)^2 = (n^3 - 7n)^2$, που δίνει έναν θετικό ακέραιο υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα μία τιμή για το k είναι η τιμή $k = 36$.

Σημείωση.
Μία σύντομη απάντηση μπορεί να δώσει κάποιος στο πρόβλημα, αν θεωρήσει τον αριθμό $k = \mathrm{B}^2 - \mathrm{A}$, με $\mathrm{B}^2 > \mathrm{A}$, όπου Β θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα, ένας τέτοιος αριθμός είναι ο $k = \mathrm{A}^2 - \mathrm{A}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος
$$\mathrm{A} = \left(\alpha^2 + 18\right)^2 - \left(8\alpha + 1\right)^2$$
είναι πρώτος.

Λύση
Έχουμε

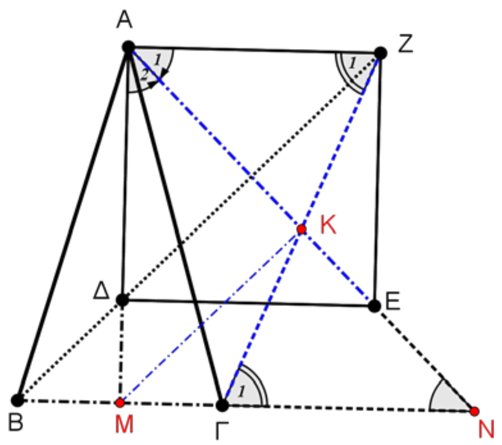
$$A = \left(\alpha^2+18\right)^2-\left(8\alpha+1\right)^2=\left(\alpha^2+18+8\alpha+1\right)\left(\alpha^2+18-8\alpha-1\right)$$
$$=\left(\alpha^2+8\alpha+19\right)\left(\alpha^2-8\alpha+17\right)=\left[\left(\alpha+4\right)^2+3\right]\left[\left(\alpha-4\right)^2+1\right].$$

Επειδή $\left(\alpha+4\right)^2+3\geq 3$, ο ακέραιος Α θα είναι πρώτος, μόνον όταν

$$\left(\alpha-4\right)^2+1=1\Leftrightarrow \alpha=4$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Λύση



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε τις ΑΕ , ΒΓ και έστω Ν το σημείο τομής τους.

Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2=\widehat{N}=45°$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

Επομένως ΜΑ=ΜΝ⇔ΜΔ+ΔΑ=ΜΓ+ΓΝ και με δεδομένη την ισότητα ΜΓ=ΜΔ, καταλήγουμε: ΑΔ=ΓΝ=ΑΖ.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ.

Ισχύουν οι ισότητες: α) ΓΝ=ΑΖ β) $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{Z}_1$ και γ) $\widehat{A}_1=\widehat{N}$.

Άρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ είναι ίσα, οπότε ΚΖ=ΚΓ και ΚΑ=ΚΝ.

Επομένως, η ΜΚ είναι διάμεσος (άρα και ύψος) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΝ. Οπότε οι ΜΚ και ΔΖ είναι παράλληλες (διότι είναι και οι δύο κάθετες στην διαγώνιο ΑΕ.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}>16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)
Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha}>2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \qquad (1)$$

Πράγματι, η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right)^2>\frac{4(\alpha+1)}{\alpha}\Leftrightarrow(2\alpha+1)^2>4\alpha(\alpha+1)\Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha+1>4\alpha^2+4\alpha,$$

που ισχύει.
Αν βάλουμε τώρα στην (1) όπου α το $\alpha+1$, παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}>2\sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \qquad (2)$$

Και ομοίως παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+5}{\alpha+2}>2\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \frac{2\alpha+7}{\alpha+3}>2\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}>16\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\cdot\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}=16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση.
Η ανισότητα (1) θα μπορούσε να προκύψει μέσω της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αφού $\alpha>0$, ως εξής:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha}=1+\frac{\alpha+1}{\alpha}>2\sqrt{1\cdot\frac{\alpha+1}{\alpha}}=2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}},$$

αφού είναι $\frac{\alpha+1}{\alpha}\neq 1$. Ομοίως προκύπτουν και οι ανισότητες (2), (3) και (4), οπότε τελειώνουμε την άσκηση όπως παραπάνω.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x+\frac{1}{x}-w=2,\ y+\frac{1}{y}-w=2,\ z+\frac{1}{x}+w=2,\ y+\frac{1}{z}+w=2\right\}.$$

Λύση
Έστω

$$\textbf{(Σ)}\ \left\{x+\frac{1}{x}=w+2\ \ (1),\ y+\frac{1}{y}=w+2\ \ (2), z+\frac{1}{x}=2-w\ \ (3), y+\frac{1}{z}=2-w\ \ (4)\right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow x=y \ \text{ ή } \ xy=1.$$

Περίπτωση 1: Έστω $x=y.$ Τότε από τις (3) και (4) έχουμε:

$$z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{z} \Leftrightarrow (z-x)\left(1+\frac{1}{zx}\right)=0 \Leftrightarrow x=z \ \text{ ή } \ xz=-1.$$

- Αν $x=z,$ τότε $x=y=z$ και από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

  $w=0$ και $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow w=0$ και $x=1$. Επομένως, σε αυτή την υποπερίπτωση έχουμε τη λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.

- Αν $xz=-1,$ τότε οι x,z θα είναι ετερόσημοι, οπότε ένας θα είναι αρνητικός.

Περίπτωση 2: Έστω $xy=1$. Τότε με αφαίρεση της (4) από την (3) λαμβάνουμε:

$$z-\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow z^2-1=0 \Leftrightarrow z=1, \text{ αφού } z\geq 0.$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) λαμβάνουμε

$$x+\frac{2}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \ \text{ ή } \ x=2.$$

- Για $x=1$, προκύπτει πάλι η λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Για $x=2$, προκύπτει η λύση $(x,y,z,w)=\left(2,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

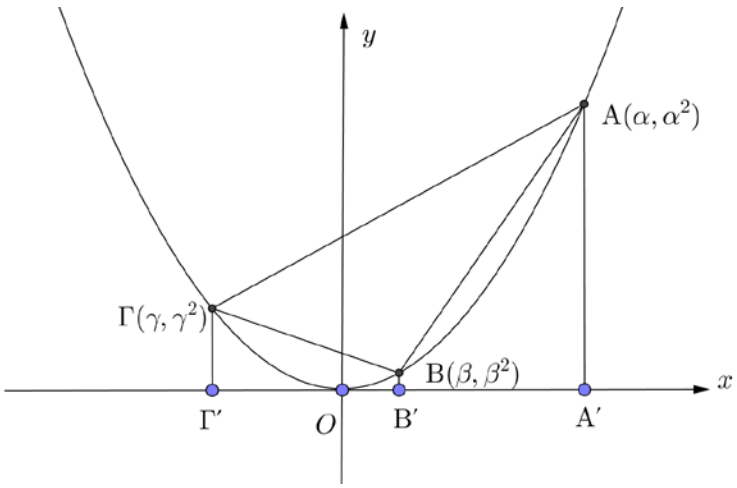
Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y=x^2$ και τα σημεία της A,B και Γ με τετμημένες α,β και $\gamma,$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\omega>0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

Λύση

Αν είναι A',B' και Γ' οι προβολές των σημείων A,B και Γ πάνω στον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(\mathrm{AB}\Gamma) &= E(\mathrm{A}\Gamma\Gamma'\mathrm{A}')-E(\mathrm{ABB}'\mathrm{A}')-E(\mathrm{B}\Gamma\Gamma'\mathrm{B}')\\
&=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}\cdot 2\omega-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\cdot\omega-\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}\cdot=\frac{\omega}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2-\beta^2-\gamma^2\right)\\
&=\frac{\omega}{2}\cdot\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\beta^2\right)=\frac{\omega}{2}\cdot\left[\alpha^2-\beta^2-\left(\beta^2-\gamma^2\right)\right]= \quad ,\\
&=\frac{\omega}{2}\cdot\left[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)\right]=\frac{\omega^2}{2}\cdot(\alpha+\beta-\beta-\gamma)=\frac{\omega^2}{2}\cdot 2\omega=\omega^3
\end{aligned}$$



Σχήμα 5

Σημείωση.
Η άσκηση μπορεί να λυθεί με χρήση του τύπου εμβαδού τριγώνου από την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου της B΄ Λυκείου. Έχουμε

$$E(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\det(\mathbf{BA},\mathbf{B\Gamma})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha-\beta & \alpha^2-\beta^2\\ \gamma-\beta & \gamma^2-\beta^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)(\gamma^2-\beta^2)-(\alpha^2-\beta^2)(\gamma-\beta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma+\beta-\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}\omega\cdot(-\omega)(-2\omega)=\omega^3.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Λύση

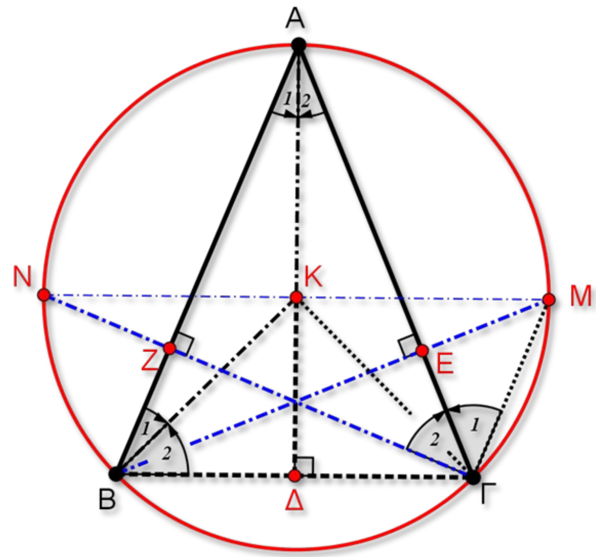
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ (δηλαδή ότι το σημείο Κ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ).

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΚ, έχουμε: $\widehat{\mathrm{B}}_2=45^\circ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (αφού $\widehat{\mathrm{A}}=45^\circ$) έχουμε:

$$\widehat{\mathrm{B}}=90^\circ-\widehat{\mathrm{A}}_1=90^\circ-22{,}5^\circ=67{,}5^\circ.$$

Άρα $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{B}}_2=67{,}5^\circ-45^\circ=22{,}5^\circ=\hat{\mathrm{A}}_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές με ΚΑ=ΚΒ. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ΚΑ=ΚΓ, οπότε το Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 6

Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου που βαίνει στο τόξο ΑΜ.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ).

Ισχύει επίσης $\hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΖ).

Επομένως $\mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{N} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ$, δηλαδή η ΜΝ είναι διάμετρος του κύκλου, άρα θα περνά από το κέντρο Κ του κύκλου.

Πρόβλημα 3

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1)=1,\ P(2)=4, P(3)=9,\ P(4)=16$.

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Λύση

Το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x^2$ είναι τετάρτου βαθμού και λόγω της (α) έχει ρίζες τους αριθμούς 1,2,3 και 4. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Q(x) = P(x) - x^2 = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$\Leftrightarrow P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x^2$$
$$\Leftrightarrow P(x) = ax^4 - 10ax^3 + (35a+1)x^2 - 50ax + 24a$$

Άρα είναι

$$P(5) = 24a + 25.$$

Λόγω της (β) έχουμε:

$$a \le 10,\ -10a \le 10,\ 35a+1 \le 10,\ -50a \le 10,\ 24a \le 10$$

$$\Leftrightarrow a \le 10,\ \ a \ge -1,\ a \le \frac{9}{35},\ a \ge -\frac{1}{5},\ a \le \frac{10}{24} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \le a \le \frac{9}{35}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$-\frac{1}{5} \le a \le \frac{9}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} \le 24a \le \frac{9\cdot 24}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5}+25 \le 24a+25 \le \frac{9\cdot 24}{35}+25$$

$$\Leftrightarrow \frac{101}{5} \le 24a+25 \le \frac{1091}{35} \Leftrightarrow \frac{101}{5} \le P(a) \le \frac{1091}{35},$$

δηλαδή η μικρότερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{101}{5}$ και η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{1091}{35}$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{A} = 14^7 + 14^2 + 1$.

Λύση

Θέτουμε για ευκολία $n = 14$ και θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό $\mathrm{A} = n^7 + n^2 + 1$. Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $n^2 + n + 1$ είναι παράγοντάς του Α ως εξής:

$$\mathrm{A} = n^7 + n^2 + 1 = n^7 - n + n^2 + n + 1 = n(n^6 - 1) + n^2 + n + 1 =$$

$$= n(n^3+1)(n^3-1) + n^2 + n + 1 = n(n^3+1)(n-1)(n^2+n+1) + n^2 + n + 1 =$$

$$= (n^2+n+1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1)$$

Επομένως ο αριθμός $n^2 + n + 1 = 14^2 + 14 + 1 = 211$ διαιρεί τον αριθμό A. Επιπλέον, ο 211 είναι πρώτος και το ζητούμενο έπεται.