

Επανάληψη στα Μαθηματικά της Γ' Γυμνασίου**Αλγεβρικές Παραστάσεις – Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση****Τι μαθαίνω από Θεωρία:**

- ☺ Αριθμητικές παραστάσεις - αλγεβρικές παραστάσεις – μονώνυμο – συντελεστής - κύριο μέρος – βαθμός - όμοια μονώνυμα – αντίθετα – σταθερά - μηδενικό. [σελίδες 25 και 26]
- ☺ Πολυώνυμο – όρος – βαθμός – σταθερό – μηδενικό - φθίνουσες δυνάμεις του x - ίσα πολυώνυμα - αναγωγή ομοίων όρων [σελίδες 33 και 34]
- ☺ Ορισμός ταυτότητας - να μάθουμε απέξω τις ταυτότητες (α), (β), (γ), και (δ), και να τις αποδεικνύουμε [σελίδες 42, 43 και 44]

Τι μαθαίνω από Ασκήσεις:

- ☺ Να πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμα, όπως οι ασκήσεις 1 και 2 στη σελίδα 41.
- ☺ Να εφαρμόζουμε τις ταυτότητες όπως οι ασκήσεις 1,2,3,4,5,6, 11, 12 στις σελίδες 49 και 50.
- ☺ Τους τρόπους παραγοντοποίησης και να τους εφαρμόζουμε σε ασκήσεις όπως οι 1,2,3,4,8 και 9 σελ. 61.
- ☺ Να βρίσκουμε πότε ορίζεται μια κλασματική παράσταση [σελίδα 71], άσκηση 1 σελίδα 74.
- ☺ Να απλοποιούμε αλγεβρικές παραστάσεις, όπως η άσκηση 3 στη σελίδα 74.
- ☺ Πράξεις με ρητές παραστάσεις, όπως οι ασκήσεις 3 και 4 στη σελίδα 77 και 2 και 4 στη σελίδα 80.

Ενδεικτικές ασκήσεις:

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) -2x(x-y) + 2y(y-x) - 2(y^2 - x^2) \quad \beta) 3\alpha(3-2\alpha) - 6(2-\alpha^2) - 9(\alpha+1) + 20 \quad \gamma) -x^2(x-2) + x(x^2-1) + x(2x+1)$$

$$\delta) \alpha(\alpha-\beta+1) - \beta(\beta-\alpha-1) - \alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1) \quad \epsilon) \alpha x(\alpha-x) - \alpha(1-x^2) + x(1-\alpha^2) - (x-\alpha)$$

$$\sigma\tau) (x+2)(x+3) - x(x+5) - 5 \quad \zeta) (x-1)(x+4) + 6 - x(x+3) \quad \eta) (x-4)(x-5) + x(9-x) - 17$$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα με τη χρήση των ταυτοτήτων:

$$\alpha) (x+3)^2 \quad \beta) (x-4)^2 \quad \gamma) (2x+5)^2 \quad \delta) (1-3x)^2 \quad \epsilon) (x+3)(x-3)$$

$$\sigma\tau) (2x-5)(2x+5) \quad \zeta) (1-3x)(1+3x) \quad \eta) (x+2)^3 \quad \theta) (2\alpha+3)^3 \quad \iota) (3x-2y)^3$$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) 6x+3 \quad \beta) 6\alpha x+3\alpha \quad \gamma) 15x^2+20x \quad \delta) x^2-x \quad \epsilon) 2\alpha+4\alpha\beta+6\beta+3 \quad \sigma\tau) 4x^2\gamma+10x-6x\gamma^2-15\gamma$$

$$\zeta) x^5-4x^4+3x^3-12x^2-x+4 \quad \eta) x^2-36 \quad \theta) 1-4x^2 \quad \iota) \alpha^2\beta^2-4 \quad \kappa\alpha) (x+2)^2-(y+2)^2 \quad \kappa\beta) 3x^2-3y^2$$

$$\iota\gamma) 2x^4-18x^2 \quad \iota\delta) x^2+2x+1 \quad \iota\epsilon) 4\alpha^2-4\alpha+1 \quad \iota\sigma\tau) x^3-4x^2+4x \quad \iota\zeta) 12x^2-3 \quad \iota\eta) 4x^3-9xy^2$$

4. Να βρείτε πότε ορίζονται οι παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε:

$$\alpha) \frac{2x-8}{x^2-4x} \quad \beta) \frac{x^2-1}{x^2-x} \quad \gamma) \frac{2x+4}{x^2+4x+4} \quad \delta) \frac{x^2+x}{x^2+3x} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4} \quad \epsilon) \frac{x^2-x}{3x^2-3x} : \frac{x-1}{x^2-1} \quad \sigma\tau) \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{2x+2} - \frac{1-x}{x+1}$$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{2x-y}{x+2y}\right) \cdot \left(\frac{2xy}{x-y} - y\right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{2x}{x+y}\right) \quad \beta) \left(1 + \frac{x}{y}\right) : \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) + \left(1 + \frac{y}{x}\right) : \left(1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού – Παραγοντοποίηση τριωνύμου – Κλασματικές εξισώσεις**Τι μαθαίνω από Θεωρία:**

- ☺ Ποια είναι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, πόσες λύσεις έχει και ποιες [σελίδα 94]
 ☺ Πως παραγοντοποιώ το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ [σελίδα 96]

Τι μαθαίνω από Ασκήσεις:

- ☺ Να λύνω εξισώσεις της μορφής $ax^2 + bx = 0$ (παραγοντοποίηση) και $ax^2 + \gamma = 0$ (ρίζα) [σελίδα 90 και παραδείγματα στη σελίδα 92]
 ☺ Να λύνω εξισώσεις της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ [με τύπο], όπως οι ασκήσεις 2,3,4 σελίδα 97.
 ☺ Να παραγοντοποιώ το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$, όπως η άσκηση 6 στη σελίδα 97.
 ☺ Να λύνω κλασματικές εξισώσεις όπως οι ασκήσεις 1,2,3,4 στις σελίδες 106 και 107 [η διαδικασία περιγράφεται στις σελίδες 103 και 104]

Ενδεικτικές ασκήσεις:**A. Να λυθούν οι εξισώσεις:**

$$1) x^2 - 49 = 0 \quad 2) x^2 + 14 = 0 \quad 3) 3x^2 - 2 = 0 \quad 4) 9x^2 + 36 = 0 \quad 5) x^2 - x = 0 \quad 6) -5x^2 + 4x = 0 \quad 7) 2x^2 + 8x = 0$$

B. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και να παραγοντοποιήσετε τα αντίστοιχα τριώνυμα:

$$1) x^2 + 5x - 6 = 0 \quad 2) -3x^2 + 5x = 2 \quad 3) x^2 + 6x + 9 = 0 \quad 4) x^2 - 5x + 7 = 0 \quad 5) 4x(2x - 1) + 8x = 9(x^2 - 2) - 14$$

$$6) x(x + 12) + 35 = 0 \quad 7) 3x^2 = 12x - 12 \quad 8) 3x - 4(2 - x^2) + 10 = 0 \quad 9) (x + 1)^2 - (x - 1)(x + 2) = -2x(x - 3)$$

Γ. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$1) \frac{x-3}{x+1} - \frac{3x+7}{3x-1} = 0 \quad 2) \frac{1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x^2+x} \quad 3) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 1 \quad 4) \frac{x}{x-2} + \frac{x}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$5) \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{x}{x-2} \quad 6) \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2+2x} = \frac{2x-1}{x(x+2)} \quad 7) \frac{x+2}{x} + 1 = \frac{x+1}{x+3} \quad 8) \frac{x-3}{x} - \frac{6}{3-x} = \frac{18}{x^2-3x}$$

$$9) 1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4} \quad 10) \frac{2x-3}{x-3} - \frac{2}{x+2} = \frac{15}{x^2-x-6} \quad 11) 1 + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{3-x} = \frac{2x}{x^2-9}$$

$$12) \frac{x-2}{x} - \frac{4}{2-x} = \frac{8}{x^2-2x} \quad 13) 1 + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4} \quad 14) \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$15) \frac{2}{x+5} - \frac{1}{x+2} = \frac{x-3}{x^2+7x+10} \quad 16) \frac{2}{x(x+2)} = \frac{-1}{x^2+5x+6} \quad 17) \frac{5}{x+3} - \frac{2x+1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2}$$

$$18) \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x^2-x-2} \quad 19) \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \right) : \frac{x}{x-2} = 2 \quad 20) \left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \right) : \frac{x}{x+3} = 3$$

Δ. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{4x^3 + 8x^2}{4x^3 - 16x}$ και $B = \frac{9x^2 - 36}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$ **α) να παραγοντοποιήσετε τα: $4x^3 + 8x^2$, $9x^2 - 36$, $4x^3 - 16x$ και $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$** **β) να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B****γ) να λύσετε την εξίσωση $A - B = \frac{8}{x^2 - 4}$**

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

☺ Μαθαίνω να λύνω ένα σύστημα με την μέθοδο της αντικατάστασης και με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών [σελίδες 133, 134 και ασκήσεις 1,2,3 σελίδα 137 και 10 σελίδα 138]

Ενδεικτικές ασκήσεις:

1. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 4x - 5y = 3 \\ 5x - 4y = 6 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2x = 5y + 1 \\ 24 - 7x = 3y \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{6} = 2 \end{cases} \quad \epsilon) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x+4y}{6} = x \\ 2 \frac{x-1}{3} + \frac{x-y}{4} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

2. Δίνετε η εξίσωση $x^2 + 2x - 8 = 0$ και το σύστημα $\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ \beta x - \alpha y = -2 \end{cases}$

α) να λύσετε τη εξίσωση

β) αν α είναι η μικρότερη και β η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης, να λύσετε το σύστημα με όποια μέθοδο θέλετε.

3. Δίνετε το σύστημα $\begin{cases} \beta + 3\gamma = 11 \\ 3\beta - 4\gamma = 7 \end{cases}$ και η εξίσωση 2^{ου} βαθμού $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

α) Να λύσετε το σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο θέλετε και να αποδείξετε ότι $\beta = 5$ και $\gamma = 2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση για τα β και γ που βρήκατε στο ερώτημα (α).

Ισότητα τριγώνων**Τι μαθαίνω από Θεωρία:**

☺ Πότε 2 τρίγωνα είναι ίσα [σελίδα 187]

☺ Τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων μαζί με τα αντίστοιχα σχήματα [χωρίς τις αποδείξεις] στις σελ. 188 και 189

☺ Τα δύο κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων στη σελίδα 190

☺ Τα συμπεράσματα στις σελίδες 191 και 192

Τι μαθαίνω από Ασκήσεις:

☺ Να εφαρμόζω τα παραπάνω κριτήρια, όπως οι ασκήσεις στις σελίδες 194,195 και 196

Ενδεικτικές ασκήσεις:

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ίσων πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε ΜΚ και ΝΛ κάθετα στην ΒΓ.

α) Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΝΛΓ

β) Να αποδείξετε ότι ΜΚ = ΝΛ.

2. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή την γωνία Α, φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και τις κάθετες από τα Β και Γ προς την ευθεία ΑΜ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΒΕΜ και ΓΖΜ

β) Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

3. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM και πάνω σε αυτήν παίρνουμε τμήμα $M\Delta=AM$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα AMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα
- β) $AB=\Delta\Gamma$

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AK . Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ προς το μέρος των B και Γ και παίρνουμε ίσα τμήματα $B\Delta=AB$ και $\Gamma E=A\Gamma$ αντίστοιχα. Από τα σημεία Δ και E φέρνουμε κάθετες στην προέκταση της $B\Gamma$ που την τέμνουν στα σημεία Z και H .

- α) να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔZB και AKB καθώς και τα $AK\Gamma$ και $E\Gamma H$
- β) να αποδείξετε ότι $\Delta Z=EH$.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$. Να πάρετε ένα τυχαίο σημείο K πάνω στη διχοτόμο $A\Delta$ και να φέρετε τις KB και $K\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AKB και $AK\Gamma$ είναι ίσα.
- β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$. Αν $B\Delta$ και ΓE είναι τα ύψη του τριγώνου και K το σημείο τομής τους, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
- β) Τα τρίγωνα KEB και $K\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
- γ) Το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Όμοια τρίγωνα

Μαθαίνω :

☺ Πότε 2 τρίγωνα είναι όμοια και να γράφω τις αναλογίες [σελίδα 220], άσκηση 1 και ερωτήσεις Σ-Λ σελίδα 222.

Τριγωνομετρία

Τι μαθαίνω από Θεωρία:

- ☺ Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας τυχαίας γωνίας ω [σελίδα 233 και σχήμα].
- ☺ Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των παραπληρωματικών γωνιών [σελίδα 237].
- ☺ Να αποδεικνύω τις 2 τριγωνομετρικές ταυτότητες στη σελίδα 240.

Τι μαθαίνω από Ασκήσεις:

- ☺ Να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω , αν δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου M της γωνίας xOM . [παραδείγματα σελίδας 234 και άσκηση 1 σελίδα 235]
- ☺ Ασκήσεις με παραπληρωματικές γωνίες, όπως παράδειγμα 1 σελίδα 238 και ασκήσεις 1,2,3 σελίδα 239]
- ☺ Ασκήσεις με τριγωνομετρικές ταυτότητες, όπως το παράδειγμα 3 στη σελίδα 241 και ασκήσεις 5,6,7,8,9,10 στη σελίδα 243.
- ☺ Αν δοθεί ένας τριγωνομετρικός αριθμός μιας γωνίας ω , να υπολογίζω τους άλλους, όπως το παράδειγμα 1 σελίδα 241 και ασκήσεις 1,2,3,4 στη σελίδα 242.