ΕΚΔΗΛΩΣΗ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΕΡΓΑΣΤΗΚΑΝ :

- **ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΜΕ ΕΒΡΟΥ**
- **ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΜΕ ΚΑΣΤΟΡΙΑΣ**
- **ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΜΕ ΦΛΩΡΙΝΑΣ**

ΜΠΑΜΠΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥ

ΟΔΗΓΙΕΣ

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ - ΘΕΜΑΤΑ

ΤΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΤΗΣ ΣΥΝΑΝΤΗΣΗΣ

Καλή Επιτυχία !!!

Την εκδήλωση οργάνωσαν τα παραρτήματα Έβρου-Καστοριάς-Φλώρινας

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Παράρτημα Φλώρινας

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΑΣΤΟΡΙΑΣ

«ΑΦΟΙ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ»

Μάιος 2021

Αφιερώνεται:

Στους εκλεκτούς συναδέλφους και τους υποψήφιους.

Μπάμπης Στεργίου – Μαθηματικός

ΟΔΗΓΟΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η Θεωρία συγκεντρωτικά

Μπάμπης Στεργίου – Απρίλιος 2021

Α. Οι Ορισμοί

Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι πιο σημαντικοί ορισμοί που μπορούν να ζητηθούν στις εξετάσεις ως υποερώτημα στο ΘΕΜΑ Α. Οι απαντήσεις υπάρχουν στο σχολικό ή στο παρόν βιβλίο. Η συγκεντρωτική μορφή που παρουσιάζουμε στοχεύει, εκτός των άλλων, στο να δώσει στο μαθητή τη δυνατότητα για έλεγχο και καλύτερη εκμάθησή τους, χωρίς την οπτική βοήθεια του σχολικού βιβλίου ή άλλου μέσου.

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο Α του $\mathbb{R}$;

2. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$;

3. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

4. Αν f, g είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της $g \circ f$;

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

6. **α)** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο;

β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

7. **α)** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται 1–1;

β) Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται και τι λέμε αντίστροφη της f;

*****8.** **α)** Τι ονομάζεται ακολουθία;

β) Πότε λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$;

9. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και πότε συνεχής;

10. **α)** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε στο κλειστό διάστημα [α, β];

β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται:

i) Παραγωγίσιμη στο σύνολο A;

ii) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β);

iii) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [α, β];

11. **α)** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική το ερμηνεία.

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής.

12. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

13. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

14. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός, τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A;

15. **α)** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

β) Τι λέμε παράγωγο μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$;

16. Αν τα μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τι λέμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0;

17. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

18. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

19. **α)** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

β) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

γ) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

δ) Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

20. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ;

21. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f;

22. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f;

23. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

24. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

25. Να διατυπώσετε τον κανόνα του de L'Hospital για τις μορφές $\left(\frac{0}{0}\right)$ και $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Β. Τα Θεωρήματα με απόδειξη

Ακολουθούν οι διατυπώσεις των θεωρημάτων που μπορούν να σου ζητήσουν να αποδείξεις στις εξετάσεις. Στα θεωρήματα αυτά είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζεις όχι μόνο την απόδειξη αλλά και την λεπτομερή διατύπωσή τους.

Ανά τακτά διαστήματα, να επιλέγεις δύο από αυτά, να σημειώνεις στο πλάι την ημερομηνία, να γράφεις την απόδειξη όπως θα την έγραφες στις εξετάσεις και να ελέγχεις την απάντηση με βάση το σχολικό σου βιβλίο. Να γράφεις πάντα την ίδια απόδειξη, χωρίς αλλαγές στη διατύπωση.
Να προτιμάς την απόδειξη του βιβλίου σου και μόνο αν ο καθηγητής σου έδωσε μια πιο απλή (δυο-τρεις περιπτώσεις), να μάθεις την νέα απόδειξη.

Θεώρημα 1ο

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$, όπου $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1 συνάρτηση.

Θεώρημα 2ο

α) Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu\text{-}1} x^{\nu\text{-}1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι πολυώνυμο και $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

β) Αν $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, είναι ρητή συνάρτηση όπου P(x), Q(x) πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Θεώρημα 3ο

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, β], $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η ένας αριθμός ανάμεσα στα f(α), f(β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Θεώρημα 4ο

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Ισχύει το αντίστροφο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θεώρημα 5ο

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Θεώρημα 6ο

Να αποδείξετε ότι:

i) $c'=0$, **ii)** $x'=1$, **iii)** $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$.

Θεώρημα 7ο

Να αποδείξετε ότι:

i) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x>0$, **ii)** $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, **iii)** $(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

Θεώρημα 8ο

Να αποδείξετε ότι:

α) i) $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, με $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ii) $(x^{\kappa})'=\kappa x^{\kappa-1}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}-\{0,1\}$.

β) i) $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ για κάθε $x>0$, με $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

ii) $\left(\alpha^{x}\right)'=\alpha^{x}\ln\alpha$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $\alpha>0$.

iii) $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\neq 0$.

Θεώρημα 9ο

α) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ με $f'(x)=0$, για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

β) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα Δ με $f'(x)=g'(x)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x)=g(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Θεώρημα 10ο

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ με $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Θεώρημα 11ο

Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ, παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$. Ισχύει το αντίστροφο;

Θεώρημα 12ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α, x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Καλή Επιτυχία !!!

Γενικές οδηγίες και συμβουλές για τις Πανελλαδικές 2021 !

♥ ♥ ♥

Μπάμπης Στεργίου - Μαθηματικός

Φίλε μαθητή/φίλη μαθήτρια !

Διάβασε καλά αυτές τις οδηγίες δυο και τρεις φορές, αν έχεις το χρόνο ! Αποτελούν στην ουσία τις δικές σου σκέψεις και την εμπειρία των προηγούμενων υποψήφιων. Ο καθηγητής σου θα σχολιάσει υπεύθυνα μαζί σου τις πιο πολλές από αυτές τις οδηγίες. Αν συγκρατήσεις ένα μέρος τους , θα έχεις κάνει ένα μεγάλο βήμα για την επιτυχία σου!

1. Ποτέ δεν βιαζόμαστε να ξεκινήσουμε την λύση ενός ερωτήματος, αν δεν βεβαιωθούμε ότι έχουμε καταλάβει απόλυτα τόσο τα δεδομένα όσο και τα ζητούμενα. Ακόμα και τα σημεία στίξης έχουν τη σημασία τους πολλές φορές, ειδικά στα προβλήματα. Για αυτό διαβάζουμε αργά και σχολαστικά την άσκηση, τουλάχιστον δύο φορές. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να ρίξουμε μια ματιά σε όλο το θέμα, γιατί από τα επόμενα ερωτήματα γίνονται καλύτερα αντιληπτά τα προηγούμενα. **Συνήθως η λύση βρίσκεται στην εκφώνηση !**

2. Πριν αρχίσουμε να γράφουμε σκεφτόμαστε ψύχραιμα και φέρνουμε στο μυαλό μας αντίστοιχες ασκήσεις :

- Μήπως πρέπει να αναφέρω κάποιες προϋποθέσεις ; Κρίμα να χάσω μονάδες από έλλειψη αιτιολογήσεων .
- Έγραψα το πεδίο ορισμού ; Έβαλα διπλή γραμμή στα πινακάκια που ίσως φτιάξω για μονοτονία ή για πρόσημο, όπου δεν ορίζεται η συνάρτηση ;
- Εξέτασα δεύτερη φορά τα πρόσημα σε κάποιον πίνακα που αφορά στην f ή στην f' ;
- Μήπως μπορώ να φτιάξω **ένα διάγραμμα** , ώστε και την εκφώνηση να καταλάβω καλύτερα, αλλά και την πορεία λύσης να αντιληφθώ γρηγορότερα ; Αυτό ενδείκνυται σε προβλήματα με εφαπτομένες, στο ρυθμό μεταβολής , σε ανισότητες πάνω σε κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις αλλά και σε κάθε περίπτωση με γραφικές παραστάσεις , όπως πχ στις αντίστροφες.

3. Κάνουμε με πάρα πολύ προσοχή , χωρίς όμως πίεση και αγωνία, τις πράξεις. Σε κάθε βήμα *ελέγχουμε* τις απαντήσεις και μετά προχωράμε. Κοιτάζουμε για αντίθετους όρους, για κοινούς παράγοντες, για απλοποιήσεις κλπ, βάζοντας πάντα και παντού τυχόν περιορισμούς. Όταν λύνουμε εξισώσεις ή καταλήγουμε σε αριθμητικές απαντήσεις, κάνουμε όπου είναι δυνατόν μια σύντομη επαλήθευση. Οι πιο πολλοί μαθητές χάνουν τουλάχιστον 1-3 μονάδες από επιπόλαια αριθμητικά λάθη.

Η απώλεια μονάδων από λάθος πράξεις είναι ό,τι χειρότερο μπορεί να σου συμβεί στις εξετάσεις ! Πρέπει με κάθε τρόπο οι πράξεις μας να είναι σωστές !

4. Αν ένα ερώτημα δεν μπορέσεις να το απαντήσεις, πάρε το συμπέρασμα έτοιμο, ως να το είχες αποδείξει, και χρησιμοποίησέ το έτοιμο για να λύσεις όχι μόνο το αμέσως επόμενο αλλά και τα επόμενα. Μπορεί μάλιστα το ερώτημα αυτό να είναι απαραίτητο για το τελευταίο υποερώτημα !

5. Αν δεις ότι στη λύση μιας άσκησης οδηγείσαι σε υπερβολικά πολλές πράξεις, εξισώσεις μεγάλου βαθμού ή πολύ σύνθετες και μακροσκελείς σχέσεις, τότε ένα είναι σίγουρο : ή έχεις κάνει κάποιο αριθμητικό λάθος ή προσπέρασες κάποια απλοποίηση ή βασικό αλγεβρικό τέχνασμα ή πήρες τελείως λανθασμένο τρόπο. Πάρε την ερώτηση από την αρχή, διάβασέ την καλά, βεβαιώσου εκ νέου ότι κατάλαβες τι σου ζητάνε και ξεκίνα από άλλο μονοπάτι αν μπορείς. Πάντα να σκέφτεσαι που πρέπει να φτάσεις.

6. Όπου μπορούμε , χαράσσουμε ένα πρόχειρο διάγραμμα ή έναν βοηθητικό πίνακα για να καταλάβουμε την ερώτηση ή να αξιοποιήσουμε τα δεδομένα(ειδικά αν μας δίνεται θέμα με διάγραμμα της παραγώγου). Χωρίς αυτό, μερικές φορές είναι αδύνατο να μπούμε στο σκεπτικό της άσκησης.

7. Σε κάθε μας λύση κάνουμε τουλάχιστον μια αναφορά στις προϋποθέσεις των προτάσεων που χρησιμοποιούμε. Αν οι αναφορές αυτές δεν είναι προφανείς, θέλουν λεπτομερή αιτιολόγηση, όπως πχ στο θεώρημα Bolzano η συνθήκη $f(\alpha)f(\beta)<0$. Αντίθετα, είναι αρκετό να γράψουμε ότι : η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών), είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο …κλπ

8. Το λάθος, λογικό ή αριθμητικό, συνήθως γίνεται πιο συχνά σε ασκήσεις που ξέρουμε τη λύση τους παρά σε άλλες, τελείως άγνωστες. Για αυτό εκεί που βλέπουμε ότι ξέρουμε τον τρόπο, πρέπει να είμαστε δυο φορές συγκεντρωμένοι και να προχωράμε μεθοδικά και νηφάλια. Δεν βιαζόμαστε. Χρόνος υπάρχει αρκετός. Όμως αυτός ο χρόνος ροκανίζεται από τυχόν λάθη και ανόητες όπως τις λέμε αστοχίες : (α) άλλα ζητάει το πρόβλημα και άλλα ψάχνουμε εμείς (β) Άλλα δεδομένα έδωσε και άλλα νομίζουμε εμείς κλπ.

9. Μη βιάζεσαι ποτέ να πας να κάνεις τεχνάσματα που έμαθες στη λύση κάποιων ασκήσεων.

<< Ποτέ μην προσπερνάς το προφανές !!! >> ,

έλεγα παλιά σε έναν μαθητή μου και όταν τον συναντώ μετά από δέκα χρόνια, αντί για καλημέρα μου λέει αυτή τη φράση. Τόσο πολύ του άρεσε ! Αυτή εδώ είναι ίσως η πιο σημαντική φιλική συμβουλή που σου δίνω .Να ξεκινάς και να σκέφτεσαι όσο πιο απλά και σταθερά μπορείς. Βήμα – βήμα. Κάνε πρώτα αυτά που λένε ο ορισμός και τα θεωρήματα (πχ στο 1-1 ή στην μονοτονία ή στο θεώρημα Rolle).Προσπάθησε πχ να λύσεις την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικό τρόπο. Ψάξε μήπως έχει κάποια προφανή ρίζα. Αν δεν λύνεται η εξίσωση αλγεβρικά, έχεις όμως βρει ρίζα με παρατήρηση , τότε ή προχώρα στην $2^{η}$ παράγωγο για να φτιάξεις το γνωστό καθοδικό πίνακα ή πάρε τον αριθμητή της παραγώγου ως βοηθητική συνάρτηση και βρες το πρόσημό της. Έχεις κάνει πολλά τέτοια παραδείγματα και θα βρεις εύκολα τη σωστή λύση. Προσοχή : αν πάρεις ως βοηθητική συνάρτηση το 1^{o} μέλος της εξίσωσης $f'(x)=0$, τότε η μελέτη της θα σου λύσει μεν την εξίσωση, αλλά το πρόσημό της δεν είναι πάντα ίδιο με το πρόσημο της παραγώγου. Για την παράγωγο, αφού ξέρεις πια τις ρίζες, θα κάνεις άλλον πίνακα των f', f για να βάλεις πρόσημο και να βρεις τη μονοτονία της f.

10. Σε ερωτήσεις : << Να αποδείξετε ότι υπάρχει …>> ή << να αποδείξετε ότι η εξίσωση …έχει μία τουλάχιστον(ή ακριβώς μία) ρίζα σε ένα διάστημα >> φέρνουμε αμέσως στο μυαλό μας τα υπαρξιακά θεωρήματα : Bolzano, Rolle, ΘΕΤ, ΘΜΤ, ΘΜΕΤ.

Πρώτη σου σκέψη είναι να κάνεις έναν γρήγορο έλεγχο μήπως μια ρίζα βρίσκεται και μετά να αποδείξεις τη μοναδικότητα, αν ζητείται.

Λοιπόν, σε τέτοια ερωτήματα, μπορεί να πρέπει να θεωρήσουμε βοηθητική συνάρτηση. Όχι μόνο βάζουμε x στη θέση του γράμματος x_0,του οποίου θέλουμε την ύπαρξη , όχι μόνο τα φέρνουμε όλα στο 1^{o} μέλος, αλλά μερικές φορές διώχνουμε τους παρανομαστές που μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος που μας δίνουν. Έχετε κάνει δεκάδες τέτοιες ασκήσεις και με λίγη προσοχή θα τα καταφέρετε.

Το νου μας στο ΘΜΤ. Αν κάπου δούμε μέσα στο ζητούμενο δύο τιμές τις συνάρτησης , πχ $f(x+2)$ και $f(x-1)$, τότε αυτό …φωνάζει για ΘΜΤ στο διάστημα $[x-1, x+2]$(Να κάνετε το αντίστοιχο ερώτημα στο ΘΕΜΑ 4 – 2019)

Αν δεν δίνεται διάστημα, τότε η ύπαρξη συνήθως προκύπτει από το σύνολο τιμών.Βρίσκουμε λοιπόν το σύνολο και από εκεί γίνεται άμεση η ύπαρξη. Μένει ίσως η μοναδικότητα, αλλά αυτή γίνεται κατακόρον με την μονοτονία ή το 1-1.

11. Όταν λύνουμε εξισώσεις ή ανισώσεις, βάζουμε από την αρχή τους απαραίτητους περιορισμούς και στο τέλος **επαληθεύουμ**ε (ή συναληθεύουμε) τις λύσεις μας.

12. Όλες τις προτάσεις που θα χρησιμοποιήσεις στη λύση μιας άσκησης, να θυμάσαι ότι τις έχεις ήδη χρησιμοποιήσει δεκάδες φορές. Μην …. ανακαλύψεις δικό σου θεώρημα, όσο προφανές και να φαίνεται. Στηρίξου στα γνωστά. **Ναι στη φαντασία, όχι στην αυθαιρεσία** !!!

13. Να κοιτάς συνεχώς τα συμπεράσματα από τα προηγούμενα ερωτήματα, όλα όμως τα προηγούμενα ερωτήματα. Μπορεί πχ το Γ4 να βασίζεται στο Γ1 και το Γ1 θα έχει ξεχαστεί όσο εσύ μελετάς τα ενδιάμεσα ερωτήματα.

14. Αν το συμπέρασμα κάποιου ερωτήματος το αποδείξεις σε άλλο ερώτημα, να το αναφέρεις. Μπορεί πχ να μην λύσεις το Δ1, αλλά μέσα στο Δ3 να το λύσεις ακολουθώντας άλλη πορεία. Μπορείς στο γραπτό σου αυτό να το αναφέρεις βάζοντας έναν αστερίσκο.

15. Δεν εγκαταλείπουμε κανένα απολύτως ερώτημα. Ακόμα και εκεί που όλα δείχνουν σκοτεινά, κάνε στον εαυτό σου την ερώτηση : << Τι μπορώ να γράψω για να πάρω μια μονάδα ; >>. Θα διαπιστώσεις ότι ερμηνεύοντας τα δεδομένα και τα ζητούμενα μπορείς να φτάσεις να πάρεις ακόμα και τις μισές μονάδες, χωρίς να έχεις λύσει το δύσκολο σημείο της άσκησης. Είναι προφανές ότι στο καθαρό αφήνουμε όλη μας την προσπάθεια. Μην βάζεις Χ(διαγραφή) σε αυτά που έχεις γράψει, αν δεν βρεις κάτι καλύτερο. Μπορεί σε αυτά που έχεις γράψει να έχεις κάνει μεγάλο βήμα για τη λύση της άσκησης και να μην το έχεις καταλάβει. Ο βαθμολογητής όμως θα το δει και θα σε ανταμείψει !

16. Αν δεις ΘΕΜΑ με διάγραμμα ή πρόβλημα(ακροτάτων ή ρυθμού μεταβολής) κάνε ακριβώς ό,τι έχεις μάθει στο μάθημα. Μη βιάζεσαι. Διάβασε πολλές φορές την εκφώνηση. Φτιάξε καλό σχήμα, αν δεις ότι βοηθάει. Βάλε σωστές μεταβλητές(αν και θα τις λέει ίσως το πρόβλημα). Αυτά τα θέματα, αν δεν τα φοβηθείς και έχεις λύσει πέντε από το καθένα, δεν τα χάνεις σχεδόν ποτέ ! Πάρε το σχολικό βιβλίο σου με το βοήθημα και λύσε μόνος σου αυτά που έχεις κάνει στο μάθημα. Δες και τα ερωτήματα από παλιότερες εξετάσεις. Το μόνο δύσκολο για όλα αυτά είναι να βρεις 3 δίωρα για μελέτη . Μπορείς όμως να τα βρεις και σίγουρα αξίζει τον κόπο !

Γενικές παρατηρήσεις

1. Μοίρασε σωστά το χρόνο σου ! Αφιέρωσε για κάθε ερώτημα τουλάχιστον 5 λεπτά, όσο δύσκολο ή απροσπέλαστο και να σου φαίνεται. Προσπάθησε και από αυτό να πάρεις μία τουλάχιστον μονάδα. Αν διαπιστώσεις ότι το ερώτημα δεν προχωράει άλλο και περάσουν 15 λεπτά, προχώρα στο επόμενο και γυρίζεις σε αυτό στο τέλος, αφού πρώτα προσπαθήσεις όλα τα άλλα ερωτήματα.

2. Ελέγχουμε αν έχουμε περάσει όλες μας τις λύσεις στο καθαρό. Α! Να τονίσουμε ξανά ότι γράφουμε απευθείας στο καθαρό και στο τέλος του τετραδίου (είναι το πρόχειρο) κάνουμε ίσως κάποιον έλεγχο για δεύτερη φορά τις πράξεις κλπ. Τις χρήσιμες πράξεις να τις κάνεις στο καθαρό.

3. Αν νομίζεις ότι στο πρόχειρο έχεις αφήσει σωστές προσπάθειες που δεν προλαβαίνεις να τις περάσεις μπροστά, γράψε πάνω σε αυτές τις προσπάθειες σε ποιο ερώτημα αναφέρονται, σβήσε τα τελείως περιττά μέρη και πες στον επιτηρητή ότι τελειώνεις στο τέλος του τετραδίου. Εκεί να υπογράψει. Ο βαθμολογητής θα βρει κάθε σου σωστή προσπάθεια και θα την αξιολογήσει.

4. Κάθε είκοσι λεπτά και όπου δίνεται ευκαιρία, να σηκώνεις το κεφάλι από το τετράδιο, να ξεκουράζεις λίγο τα μάτια σου, να πίνεις λίγο νερό, να πας στην τουαλέτα, αν χρειαστεί ή να πάρεις ένα παυσίπονο, αν αισθανθείς πονοκέφαλο.

5. Την προηγούμενη των εξετάσεων να έχεις κοιμηθεί σχετικά νωρίς. Να πάρεις καλό πρωινό και να βάλεις τα σωστά ρούχα. Να έχεις μαζί σου ένα μπουκάλι νερό και ένα ήπιο επιτρεπτό παυσίπονο.

6. Πάρε μαζί σου δύο στυλό ίδιου χρώματος, ένα καλό μολύβι και έναν χάρακα αλλά και διαβήτη για τα σχήματα.

7. Το κινητό ίσως δεν είναι απαραίτητο. Αν ξεχάσεις να το παραδώσεις και χτυπήσει την ώρα της εξέτασης, το γραπτό σου μηδενίζεται. Κανένα ηλεκτρονικό εξάρτημα να μην έχεις πάνω σου.

8. Στο χρόνο αναμονής για τα θέματα, μέσα ή έξω από την τάξη , και μέχρι να πάρεις τη φωτοτυπία με τις ερωτήσεις , να είσαι ήρεμος. Μην ανοίγεις το βιβλίο ούτε να ακούς τους άλλους να κάνουν προφητείες τι θα πέσει και αγχωθείς. Μην ακούς τίποτα σχετικά με τις εξετάσεις και πιάσε κουβέντα με φίλους σου για άλλα ζητήματα, ευχάριστα και αισιόδοξα. Όμως , *…να κρατάς την απόσταση !*

9. Την ώρα της εξέτασης να γράψεις τα στοιχεία σου σωστά, χωρίς λάθη. Να ακούς τις οδηγίες των επιτηρητών. Αν έρθει διόρθωση, να την περάσεις πάνω στα θέματά σου, ώστε να μην την ξεχάσεις.

10. Αν την ώρα που γράφεις αισθανθείς ότι κάτι σε ενοχλεί, ο ανεμιστήρας ή το ανοικτό παράθυρο ή κάποιος θόρυβος, να το πεις με ευγένεια στον επιτηρητή και αυτός θα το τακτοποιήσει .

11. Μπορεί σε κάποιο μάθημα να μην τα πας τόσο καλά όσο θα ήθελες ή όσο θα περίμενες. Δεν πειράζει, μην το σκέφτεσαι καθόλου. Επικεντρώσου με πείσμα στο επόμενο μάθημα και μην κοιτάζεις πίσω. Μόνο αν τελειώσει και το τελευταίο μάθημα κερδίζεται ο πόλεμος !

Ειδικές παρατηρήσεις στα Μαθηματικά

Σημειώσεις ενός Υποψηφίου.

Τι θα συναντήσω στα μαθηματικά !

Παρακάτω υπάρχουν τα πιο βασικά είδη ασκήσεων που πρέπει να γνωρίζω, αλλά και ειδικές παρατηρήσεις. Τις συγκέντρωσα στη διάρκεια της χρονιάς, για να τις μελετήσω στην επανάληψη και κυρίως τις τελευταίες μέρες. Σε κάθε μου απορία πρέπει να ανατρέχω στο τετράδιο, στο βοήθημα ή στον καθηγητή μου. Είναι αδύνατο να περιγράψω ή να συγκεντρώσω εδώ τα τόσα πολλά και σημαντικά σημεία που έχω μάθει στο μάθημα μέσα σε μια ολόκληρη χρονιά, αλλά αυτά είναι, ανάμεσα στα άλλα, μερικά πράγματα που σίγουρα μπορώ να κάνω στις εξετάσεις ή που πρέπει να προσέξω λίγο πιο πολύ. Να λοιπόν τι ξέρω και τι μπορώ να κάνω με σιγουριά. Ελπίζω εσείς να ξέρετε πολύ περισσότερα :

1. Να ορίζω τη σύνθεση , το πηλίκο , το γινόμενο δύο συναρτήσεων καθώς και την αντίστροφη μιας συνάρτησης.
2. Να εξετάζω αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες.
3. Να γράφω μια συνάρτηση ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων. Αυτό είναι λίγο δύσκολο, αλλά έχω στο τετράδιο των έξυπνων ερωτημάτων παράδειγμα και θα το μελετήσω και δυο μέρες πριν τις πανελλαδικές.
4. Να βρίσκω τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων και τη σχετική τους θέση.
5. Να βρω το πρόσημο μιας συνάρτησης. Πέραν των γνωστών μεθόδων (με πίνακα) από προηγούμενες τάξεις , το πρόσημο το βρίσκω εύκολα αν γνωρίζω τη μονοτονία και τη ρίζα της συνάρτησης σε ένα διάστημα. Τη ρίζα πολλές φορές την εντοπίζω με παρατήρηση.
6. Να υπολογίζω όρια της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{k \neq 0}{0}$ ή $\infty - \infty$ κλπ (Να ξέρω όλες τις κατηγορίες και ειδικά την ***μηδενική (επί) φραγμένη*** ή **την άπειρο +(-) φραγμένη** , όπου εφαρμόζω κριτήριο παρεμβολής)
7. Να βρω παραμέτρους ώστε ένα όριο να είναι πραγματικός αριθμός ή να έχει μια δεδομένη τιμή. Αν το x τείνει σε αριθμό, λύνω ως προς τον αριθμητή. Αν όμως τείνει σε άπειρο, τότε παίρνω χωριστά τις περιπτώσεις που μηδενίζονται οι φαινόμενοι ως μεγιστοβάθμιοι όροι.
8. Να χρησιμοποιώ ένα όριο για να βρω ένα άλλο (η συνάρτηση κρύβεται, οπότε θέτω…).

9. Να βρω την τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα σημείο , βρίσκοντας το όριό της ή το αντίστροφο. Μερικές φορές διαιρώ μια ανισότητα με θετικό ή αρνητικό παράγοντα, παίρνω όρια και βρίσκω δύο σχέσεις $f(\alpha)\geq\beta, f(\alpha)\leq\beta$ και έτσι $f(\alpha)=\beta$

10. Να χρησιμοποιώ τον ορισμό της συνέχειας και της παραγώγου για να υπολογίσω ένα όριο (Συνήθως θέτουμε. Το περιμένω ως θέμα και να το προσέξω).

11. Να εφαρμόζω υπαρξιακό θεώρημα (Bolzano, Rolle, ΘΜΤ,ΘΕΤ, ΘΜΕΤ) για την απόδειξη ύπαρξης αριθμού ή λύσης μιας εξίσωσης(Να ξέρω όλες τις περιπτώσεις).

12. Να λύνω άσκηση με εφαπτομένες. Θυμάμαι ότι πρέπει να χρησιμοποιήσω την τετμημένη του σημείου επαφής, είτε την ξέρω είτε όχι, τη ζητάνε ή δεν την ζητάνε !

13. Να γράφω, αν χρειαστεί, τις δύο συνθήκες για να έχω κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο ή μια ευθεία να εφάπτεται σε γραφική παράσταση γνωστής συνάρτησης. Για παράδειγμα για να εφάπτεται η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M\left(x_0, f(x_0)\right)$,πρέπει και αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις :

$$f'(x_0)=\alpha \text{ και } f(x_0)=\alpha x_0+\beta$$

14. Να παραγωγίζω μία ή δύο φορές συνάρτηση, να βρω τις ρίζες της παραγώγου και το πρόσημό της. Είναι ερώτημα που θα το έχω με απόλυτη βεβαιότητα. Ο μεγάλος κίνδυνος είναι να κάνω επιπόλαιο λάθος στις πράξεις. Στη δεύτερη παράγωγο συνάρτησης πηλίκο, πριν κάνω πράξεις, να βγάλω κοινό παράγοντα τον παρονομαστή. Θα γλυτώσω πολλές πράξεις.

15. Να βρίσκω μονοτονία , ακρότατα, σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\beta$. Αν δεν είμαι βέβαιος πώς θα λύσω τέτοιο ερώτημα, μάλλον δεν πάω στις εξετάσεις !!!

16. Να αναγνωρίζω, να καταλάβω δηλαδή , ότι πρέπει να εφαρμόσω το θεώρημα Fermat σε άσκηση εύρεσης παραμέτρου.

17. Να λύνω προβλήματα στο ρυθμό μεταβολής και στα ακρότατα. Είναι ερωτήματα που έχουν συγκεκριμένη τεχνική .Αν ξέρω τρία από το κάθε είδος, θα λύσω και οποιοδήποτε άλλο.

18. Να λύνω εξίσωση ή ανίσωση. Δεν ξεχνάω ότι πιθανόν πρέπει να τη φέρω στη μορφή $f(g(x))=f(h(x))$ με γνησίως μονότονη συνάρτηση f. Να προσέξω αν έχω εξίσωση της μορφής $f(g(x))=\beta$ και το β είναι το ακρότατο της f που παρουσιάζεται μόνο στη θέση α. Η εξίσωση τότε γίνεται : $f(g(x))=\beta \Leftrightarrow g(x)=\alpha$.Να θυμηθώ επίσης ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ γίνεται ισοδύναμα $f(x)=x$.Λύνω εκείνη από τις δύο που είναι η ευκολότερη.

19. Να αποδεικνύω ανισότητα. Θα χρησιμοποιήσω ή το ακρότατο της συνάρτησης ή θα κάνω μελέτη τη συνάρτηση της διαφοράς ή θα κάνω ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα, που θα καταλάβω από τη μορφή της ανίσωσης. Αν δω διπλή ανισότητα μάλλον είναι για ΘΜΤ, ειδικά αν την γράψω στη μορφή $A < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < B$.

20. Να βρίσκω τον τύπο συνεχούς ή παραγωγίσιμης συνάρτησης που έχει κάποια ιδιότητα. Να θυμηθώ ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δεν μηδενίζεται, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό το διάστημα. Αν μηδενίζεται σε ένα σημείο, περιμένω τέσσερις συναρτήσεις.

21. Να χρησιμοποιώ **βοηθητική συνάρτηση**. Θα το κάνω σίγουρα για εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano ή Rolle, αφού φέρω όλους τους όρους στο 1^o μέλος (και διώξω ίσως ανεπιθύμητους παρανομαστές). Θα χρησιμοποιήσω βοηθητική συνάρτηση επίσης , αν δεν μπορώ να βρω τις ρίζες της παραγώγου f' και έχω κλάσμα(αλλιώς προχωράω στην f'').Αν πάρω πχ βοηθητική τον αριθμητή $g(x)$ της f', τότε μελετάω την g και βρίσκω το πρόσημό της. Να κάνω ξανά ένα παράδειγμα τρεις μέρες πριν πάω στις εξετάσεις.

22. Να εξάγω συμπεράσματα από διάγραμμα και να βρω μονοτονία, ρίζες, πλήθος ριζών, σύνολο τιμών, όρια κλπ.Το περιμένω θέμα και για αυτό θα λύσω όσα ερωτήματα έχουν πέσει μέχρι τώρα στις εξετάσεις αλλά και τα άλλα από το βοήθημά μου.

23. Στη θεωρία ξέρω καλά όλες τις διατυπώσεις και τις περιπτώσεις που θέλουν αντιπαραδείγματα.

24. Αν η συνάρτηση έχει παράμετρο και τα ακρότατα εκφράζονται συναρτήσει της παραμέτρου, μπορεί να ζητηθούν οι τιμές της παραμέτρου , ώστε το ακρότατο να είναι μέγιστο ή ελάχιστο . Αρκεί να μελετήσω τη συνάρτηση του ακροτάτου με μεταβλητή την παράμετρο !

25. Αν χρειαστώ το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, είναι προτιμότερο τις περισσότερες φορές να το βρω από τη μονοτονία, τη συνέχεια και τα όρια, παρά απαιτώντας η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει λύση ως προς x στο πεδίο ορισμού A της f.

26. Συνήθως το ΘΜΤ το εφαρμόζω στη δοσμένη συνάρτηση f που ξέρω από τα δεδομένα του προβλήματος (μένει σε μένα να βρω το διάστημα!), ενώ το θεώρημα Bolzano και Rolle θέλουν συχνά βοηθητική συνάρτηση, που τη βρίσκω με τον γνωστό τρόπο(Να τον θυμηθώ από τις εφαρμογές που έχω στο τετράδιό μου ή στο βοήθημα).

27. Όλες οι ασκήσεις με εφαπτομένες, για να λυθούν σωστά, πρέπει να εμπλέξουν το σημείο επαφής, είτε είναι γνωστό, είτε άγνωστο, είτε μας το ζητάνε είτε όχι ! Να θυμάσαι ότι για να έχουν δύο συναρτήσεις f, g κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0 , πρέπει και αρκεί να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$f(x_0) = g(x_0) \text{ και } f'(x_0) = g'(x_0)$$

Αν αντί για την g έχω την ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$, τότε για να εφάπτεται η ευθεία (ε) με την γραφική παράσταση της f, πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις :

$$f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \quad \text{και} \quad f'(x_0) = \alpha$$

Στην ουσία οι τελευταίες σχέσεις προκύπτουν από τις πρώτες και αυτό μου το έχει εξηγήσει ο καθηγητής μου πολλές φορές.

28. Είναι φανερό ότι άσκηση με διερεύνηση ορίου δεν πρέπει να με δυσκολέψει. Έχω λύσει αρκετές τέτοιες . Ακόμα και στο σχολικό βιβλίο μια ματιά θα βοηθήσει. Αν πχ $x \to x_0$, τότε θέτω τη συνάρτηση του ορίου $g(x)$, λύνω ως προς τον αριθμητή και παίρνω(ποτέ με ισοδύναμο) όρια και στα δύο μέλη. Αν όμως $x \to \pm\infty$, τότε κάνω τη διερεύνηση στους συντελεστές των *φαινομενικά* μεγιστοβάθμιων όρων του κλάσματος.

29. Αν σε μια συνάρτηση βρω ότι έχει παράγωγο ίση με μηδέν, δεν πρέπει να βιαστώ να πω ότι είναι σταθερή. Αν το πεδίο ορισμού δεν είναι διάστημα, τότε θα είναι σταθερή στο κάθε διάστημα (βάζω αρχικά διαφορετικές σταθερές για το κάθε διάστημα και μετά τις υπολογίζω).

30. Αν μου ζητήσουν να βρω τη μονοτονία της f', θα βρω την f'' , το πρόσημό της και θα κατασκευάσω πίνακα προσήμου της f'' και μονοτονίας της f'. Προσέχω στον πίνακα να βάλω με διπλή γραμμή και τα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f . Το ίδιο θα κάνω αν μου ζητήσουν να βρω τα διαστήματα, στα οποία ο ρυθμός μεταβολής της f αυξάνει ή μειώνεται ή ακόμα το σημείο της C_f με την μεγαλύτερη ή τη μικρότερη κλίση .

Η πιο δύσκολη περίπτωση είναι να μου ζητήσουν να αποδείξω ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με παράλληλες εφαπτομένες. Τι θα κάνω ; Θα βρω την f'' και θα αποδείξω ότι αυτή διατηρεί πρόσημο στο εν λόγω διάστημα. Έτσι η f' είναι γνησίως μονότονη, και συνεπώς 1-1. Αλλιώς, αν δεν έχω διάστημα, πρέπει να αποδείξω ότι η f' είναι 1-1. Επομένως, σε κάθε περίπτωση , δεν θα υπάρχουν τέτοια σημεία.

31. Αν μου δοθεί κάποιο όριο και ζητηθούν άλλα, τότε θα θέσω τη συνάρτηση του ορίου g(x) και θα πάρω από αυτήν όποιο μέρος χρειάζομαι , θα το αντικαταστήσω και θα βρω έτσι τα ζητούμενα όρια. Δεν ξεχνάω ποτέ τον ορισμό της συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης, αφού από αυτά βρίσκω χρήσιμα όρια ή τιμές. Αυτή η εναλλακτική μορφή με το $h \to 0$ είναι πολύ ιδιόμορφη και την προσέχω. Για παράδειγμα, η f είναι συνεχής στο x_0 , αν και μόνο αν

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

32. Να ξέρω ένα καλό παράδειγμα που να δείχνει πώς μια σύνθετη συνάρτηση τη γράφουμε ως σύνθεση άλλων συναρτήσεων. Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και αυτό μπορεί να είναι μια καλή αιτιολόγηση σε κάποιο ερώτημα που αφορά στη συνέχεια.

33. Όταν βρίσκω όριο και κάνω αλλαγή μεταβλητής(πχ όταν θέτω), τότε να προσέχω πχ το εξής: Αν $\frac{1}{x}=u$ και $x\to+\infty$, τότε $u\to0^{+}$, ενώ αν $x\to-\infty$, τότε $u\to0^{-}$.Με άλλα λόγια το νέο όριο είναι πλευρικό και αυτό μπορεί να βοηθήσει σημαντικά.

Αντί του x μπορεί να είναι μια συνάρτηση με άπειρο όριο.

34. Ενώ μπορώ να παραγωγίσω μια ισότητα με (παραγωγίσιμες) συναρτήσεις , δεν παραγωγίζω ποτέ ανισότητα. Επίσης, μπορώ να αντιπαραγωγίσω μια ισότητα(και δεν ξεχνώ να βάλω στο 2^{o} μέλος τη σταθερά : +c) , δεν μπορώ όμως να αντιπαραγωγίσω ανισότητα. Σε ανισότητα με παραγώγους φέρνω όλους τους όρους στο α΄ μέλος , θεωρώ την συνάρτηση που έχει παράγωγο το 1^{o} μέλος , βρίσκω τη μονοτονία της(από την ανισότητα που έχω) και εφαρμόζω σε αυτή τη συνάρτηση τον ορισμό της μονοτονίας.

35. Να θυμάμαι ποιες βοηθητικές προτάσεις έχω ως θεωρία που δεν τις έχει το σχολικό, αλλά οι οδηγίες για το μάθημα. Πχ : $e^{x}\geq x+1$ με την ισότητα μόνο για $x=0$ κλπ. Επίσης ξέρω τις ανισότητες $\ln x\leq x-1$ με ισότητα για $x=1$ και την $|ημx|\leq|x|$ με ισότητα μόνο για $x=0$.

36. Αν για μια συνάρτηση μου δοθεί ο περιορισμός $f(x)\neq0$ σε ένα διάστημα , τότε πιθανόν να χρειαστεί να πω ότι διατηρεί πρόσημο (αν επιπλέον είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό) ή να διαιρέσω κάποια ισότητα με $f(x)\neq0$ κλπ. Ο περιορισμός $f(x)>0$ μπορεί να με βοηθήσει να πάρω λογάριθμο($\ln f(x)$) ή να δημιουργήσω το κλάσμα $\frac{f'(x)}{f(x)}$ και να γράψω $\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln|f(x)|)'=(\ln f(x))'$.Αν μου δοθεί ότι $f'(x)\neq0$ σε ένα διάστημα και η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση αυτή έχει αντίστροφη (το αποδεικνύω με άτοπο : αν όχι, τότε υπάρχουν $x_1<x_2$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Εφαρμόζω το θεώρημα Rolle και καταλήγω σε άτοπο, αφού $f'(x)\neq0$).

37. Να διαβάζω τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις που κάποιες παραστάσεις είναι οι παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων ή παράγωγος γινομένου ή πηλίκου. Πχ είναι

$$f(x)f'(x)=(\frac{f^{2}(x)}{2})'\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln|f(x)|)',\ \frac{f'(x)}{f^{2}(x)}=(-\frac{1}{f(x)})',\ e^{f(x)}f'(x)=(e^{f(x)})'\ \text{κλπ}$$

38. Αν έχω όριο πηλίκου και παρουσιάζονται δύο ή περισσότεροι απειριζόμενοι όροι(με ή χωρίς απροσδιοριστία), βγάζουμε σε κάθε όρο του κλάσματος μπροστά τον πιο δυνατό απειριζόμενο όρο, ώστε αυτοί οι όροι που μείνουν ή δημιουργούνται μέσα στην παρένθεση να έχουν όριο μηδέν. Ανάλογα εργαζόμαστε συχνά και όταν δεν έχουμε πηλίκο αλλά εμφανίζεται απροσδιοριστία ή τριγωνομετρικός όρος. Επειδή θα έχω μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ σε πολλά κλάσματα, δεν παραλείπω να αξιοποιήσω τον κανόνα DLH όπου εφαρμόζεται.

39. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f, ορισμένη σε ανοικτό διάστημα Δ, έχει σύνολο τιμών της μορφής $[k,+\infty)$, τότε αυτό δηλώνει ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο (το k) και έτσι θα συμπεράνω από το θεώρημα Fermat ότι υπάρχει x_0 στο διάστημα Δ, ώστε $f'(x_0)=0$. Η συνάρτηση f έχει λοιπόν κρίσιμο σημείο.

Αν η παράγωγος τώρα είναι γνησίως μονότονη στο Δ , τότε το x_0 (που είναι ρίζα της παραγώγου)είναι μοναδικό και επιπλέον θα είναι $f(x_0)=k$.Μπορώ τώρα, αφού η παράγωγος είναι γνησίως μονότονη, να βρω και τη μονοτονία της f. Αριστερά από το x_0 θα είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά γνησίως αύξουσα. Μα θα φτιάξω έναν πίνακα και όλα αυτά θα είναι προφανή ! Επιπλέον η εξίσωση $f(x)=k$ θα έχει στο Δ μοναδική ρίζα την x_0. Σε ανάλογα συμπεράσματα για την ύπαρξη κρίσιμων σημείων, καταλήγω αν έχω κλειστό διάστημα και τα ολικά ακρότατα δεν παρουσιάζονται στα άκρα.

Να τονίσω όμως ότι γενικά δεξιά –αριστερά από μια θέση ακροτάτου δεν είναι απαραίτητο να αλλάζει η μονοτονία. Είναι εκείνο το περίεργο σχήμα που μας έδειξε ο καθηγητής μας.

40.Είναι ύπουλο, αλλά το έχω καταλάβει. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα Δ έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Για αυτό όταν μου ζητάνε, ακόμα και σε πρόβλημα μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, δεν πρέπει να παραλείψω να εξετάσω και τις τιμές στα άκρα, αν το διάστημα είναι κλειστό.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση παραγωγίζεται στο εσωτερικό του Δ. Αν ένα από τα ολικά ακρότατα δεν παρουσιάζεται σε άκρο του διαστήματος Δ ,τότε από το θεώρημα Fermat η παράγωγος μηδενίζεται σε αυτό το σημείο. Επομένως η συνάρτηση μπορεί να έχει και άλλο τοπικό ακρότατο, σε κάποιο άκρο του διαστήματος Δ ***ίσως***. Αυτό όμως θα το δω από τον πίνακα μονοτονίας .

41.Αν θέλω να βρω το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής $f(x)=0$, τότε - με μελέτη – θα βρω τα διαστήματα μονοτονίας της f , τις εικόνες τους μέσω της f και θα εξετάσω σε πόσες από αυτές τις εικόνες ανήκει το 0(ή το β, αν έχω εξίσωση της μορφής $f(x)=\beta$).Προσέχω όμως να μην μετρήσω κάποια ρίζα δύο φορές κάτι που συμβαίνει ίσως μόνο αν κάποιο άκρο μιας εικόνας $f(\Delta)$ είναι το 0.Αν θέλω να βρω πόσα τοπικά ακρότατα έχει η f κάνω το ίδιο με το παραπάνω, αλλά για την f',βρίσκοντας δηλαδή το πρόσημο της f''. Στην τελευταία γραμμή του πίνακα μπορώ να έχω την f'. Προφανώς η f' θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών της (ως γνησίως μονότονη στο κάθε διάστημα) και έτσι στις ρίζες της f' θα έχω τοπικά ακρότατα για την f.

42. Αν για μια συνάρτηση ξέρω τη μονοτονία σε ένα διάστημα και τη ρίζα της, τότε μπορώ να βρω το πρόσημό της . Πρόκειται για σπουδαία παρατήρηση με πολλές εφαρμογές.

43. Η μονοτονία μιας συνάρτησης είναι μεγάλη πληροφορία. Με βάση λοιπόν τη μονοτονία μπορώ να λύσω εξισώσεις ή ανισώσεις (αρκεί τις φέρω στη μορφή $f(g(x))=f(h(x))$ ή $f(g(x))<f(h(x))$) αλλά και να εφαρμόσω τον ορισμό της μονοτονίας για να αποδείξω ανισότητες. Προσέχω πιο πολύ όταν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, μια και η φορά αλλάζει στην εφαρμογή του ορισμού της μονοτονίας ή στο αντίστροφο.

44. Θυμάμαι πολύ καλά ότι ανισότητες αποδεικνύω ή με τον ορισμό της μονοτονίας ξεκινώντας από γνωστή ανισότητα ή με μελέτη και εύρεση του ολικού ακροτάτου μιας κατάλληλης συνάρτησης ή με ΘΜΤ, ειδικά αν η ανισότητα είναι διπλή ή συνθετικά(πιο δύσκολη περίπτωση). Μερικές φορές, αν η ανισότητα έχει δυνάμεις και γινόμενα , μετασχηματίζεται σε σχέση της μορφής $f(x)\le f(\alpha)$ ή $f(x)\ge f(\alpha)$ και έτσι μελετάω την f ως προς τα ολικά ακρότατα.

45. Καλά, αν στα δεδομένα έχω ανισότητα και ζητάω ισότητα, τότε το Fermat είναι το θεώρημα που με τίποτα δεν θα ξεχάσω. Για παράδειγμα, αν για την f ξέρω ότι (α) είναι γνησίως φθίνουσα και (β) $f(a^x)\le f(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (όπου $\alpha>0$), τότε μπορώ να αποδείξω ότι $a=e$. Προφανώς θα πάρω τη συνάρτηση $g(x)=a^x-x-1$ και με βάση το θεώρημα του Fermat(η g πληροί τις προϋποθέσεις στο 0) θα πάρω ότι $g'(0)=0$ κλπ. Δεν ξεχνάω ότι η θέση ακροτάτου πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος και όχι άκρο ή κάτι άλλο.

46. Δεν ξεχνάω ότι σε ασκήσεις εύρεσης παραμέτρων , ειδικά σε ακρότατα , χρειάζεται επαλήθευση , διότι το Fermat –συνήθως αυτό χρησιμοποιούμε- εξασφαλίζει αναγκαία συνθήκη, όχι όμως και ικανή. Το ίδιο χρειάζεται μερικές φορές και σε παραμετρικά όρια , όταν θέλουμε αυτά να είναι πραγματικοί αριθμοί ή να έχουν μια συγκεκριμένη τιμή.Α! Και σε ασκήσεις που μου ζητάνε παράμετρο για να έχω δοσμένο σημείο καμπής, πάλι πρέπει να κάνω επαλήθευση, διότι το αντίστροφο του σχετικού θεωρήματος δεν ισχύει.

47. Οι ασκήσεις στην ανάλυση γενικά χωρίζονται σε μεγάλες κατηγορίες με παρόμοιο περίπου τρόπο αντιμετώπισης :

(α) Υπαρξιακά θέματα **(β)** Εξισώσεις –ανισώσεις **(γ)** Ανισότητες **(δ)** Προβλήματα σε ρυθμό μεταβολής ή σε ακρότατα **(δ)** Διαγράμματα **(ε)** Πλήθος ριζών , πλήθος ακροτάτων **(στ)** Εφαπτομένες σε σημείο, από σημείο, σε κοινό σημείο , σε μη κοινά σημεία. **(ζ)** Όρια.

(η) Θέματα εύρεσης στο γενικό μέρος, στη συνέχεια και στην παράγωγο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση που θα βλέπω μια άσκηση, θα προσπαθώ να την εντάξω, αν χρειαστεί , σε κάποια από αυτές τις ομάδες, ώστε να κάνω πρώτα όλες τις βασικές ενέργειες που κάνουμε στις ασκήσεις της ίδιας ομάδας και μόνο μετά θα προχωρήσω σε τεχνάσματα ή στην ανάκληση άλλων μεθόδων από τη λύση παρόμοιων ασκήσεων.

48. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ έχει ελάχιστο(ή μέγιστο) στο $x_0 \in \Delta$ και ένα από τα όρια της f είναι άπειρο, τότε δεν χρειάζεται να βρω και το όριο στο άλλο, αφού το σύνολο τιμών θα είναι το $f(\Delta)=[f(x_0),+\infty)$ (αντίστοιχα το $f(\Delta)=(-\infty,f(x_0)]$.

49. Ξέρω επίσης ότι εξισώσεις της μορφής $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες με την εξίσωση $f(x)=x$. Όμως σε ανισώσεις τέτοιας μορφής χρειάζεται ειδική διερεύνηση και δεν ισχύει το ίδιο. Δεν συνθέτουμε δηλαδή στα δύο μέλη την f, αλλά θέλει και άλλες παρατηρήσεις. Το έχω κάνει στο μάθημα σε μια άσκηση. Θυμάμαι ότι όλοι μας το είχαμε λύσει λάθος μέχρι να μας το πει ο καθηγητής μας.

50. Μια ιδιαίτερη μορφή εξισώσεων της μορφής $f(x)=g(x)$ λύνονται ως εξής : Βρίσκω πχ ότι $f(x)\le k$ με την ισότητα να ισχύει **μόνο** για $x=\alpha$ και $g(x)\ge k$ με την ισότητα να ισχύει (τουλάχιστον) για $x=\alpha$. Τότε η εξίσωση αυτή έχει μοναδική ρίζα την $x=\alpha$, αφού για όλες τις άλλες τιμές του χ θα ισχύει ότι $f(x)<g(x)$. Φυσικά , το ίδιο θα ισχύει αν αποδείξω ότι $f(x)\ge k\ge g(x)$ και το ίσον ισχύει συγχρόνως μόνο για μία τιμή του x , την $x=\alpha$.

51. (α) Η εύρεση των ασυμπτώτων είναι υπόθεση εύρεσης ορίων. Το πεδίο ορισμού συχνά μου δείχνει τις πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες. Είναι στα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού και στα σημεία ασυνέχειας. Αν το πεδίο ορισμού έχει είναι ένωση διαστημάτων με πραγματικά άκρα, δεν έχει νόημα να ψάξω για ασύμπτωτες στα άπειρα, δηλαδή για οριζόντιες ή για πλάγια ασύμπτωτη.

(β) Αν μου ζητήσουν τον ορισμό της ασύμπτωτης της μορφής $y=\alpha x+\beta$ στο $+\infty$, δεν γράφω τους τύπους που βρίσκουμε τα α και β ,αλλά τον ορισμό με το όριο.(…).

(γ) Όταν ξέρω τις ασύμπτωτες , μπορώ να τις μεταφράσω σε όρια. Με άλλα λόγια , από την γνώση των ασύμπτωτων μπορώ να υπολογίζω μερικά χρήσιμα όρια, τόσο σε σημείο όσο και στα άπειρα, ανάλογα με την ασύμπτωτη.

52. Όταν εφαρμόζω τον κανόνα του DLH προσέχω να έχω τις προϋποθέσεις. Σε θεωρητικές ασκήσεις δεν πρέπει να υπερβώ τις υποθέσεις μου, γιατί μετά θα οδηγηθώ σε αδιέξοδο. Έχω σχετικό παράδειγμα στο τετράδιό μου.

53. Μερικές ακόμα προτάσεις που δεν έχει το βιβλίο και μπορώ να χρησιμοποιήσω για τη λύση των ασκήσεων είναι οι παρακάτω. Είναι χρήσιμες και μπορεί να τις ρωτήσουν και σε Σωστό-Λάθος (Σ-Λ).

1. i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2 .$$

2. Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και **β)** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και **β)** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \ge x + 1$ και το ίσον $(=)$ ισχύει μόνο για $x = 0$.

Πρόκειται για πολύ χρήσιμη πρόταση που βρίσκει εφαρμογή σε μεγάλο εύρος ασκήσεων, όχι μόνο ανισοτήτων αλλά και εξισώσεων.

4. Την ανισότητα $\ln x \le x - 1$ την έχει το σχολικό, τη βάζω όμως και αυτή εδώ για να είναι όλες μαζί.

5. Το γινόμενο δύο συναρτήσεων μπορεί να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με τη συνάρτηση μηδέν.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x + |x|$ και $g(x) = x - |x|$ έχουν γινόμενο μηδέν, αλλά καμία από τις δύο δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Συνιστάται να γίνει η γραφική τους παράσταση.

6. Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty \;(\text{ή } \lim_{x \to \sigma_1} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \to \sigma_2} f(x) = -\infty),$$

τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

54. Αν σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = f(x)$, τότε $f(x) = ce^x$. Αυτή τη σχέση μπορώ να τη χρησιμοποιήσω αν θέλω να βρω τον τύπο κάποιας συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν $2xf(x) = (x^2 + 1)(f(x) - f'(x))$ και $f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε για βρω τον τύπο της f θα γράψω:

$$2xf(x)=(x^2+1)(f(x)-f'(x))\Leftrightarrow(x^2+1)'f(x)+(x^2+1)f'(x)=(x^2+1)f(x)\Leftrightarrow$$
$$((x^2+1)f(x))'=(x^2+1)f(x)\Leftrightarrow(x^2+1)f(x)=ce^x\Leftrightarrow f(x)=\frac{ce^x}{x^2+1}$$

Αλλά $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$ και έτσι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.Βρείτε τώρα μόνοι σας τη μονοτονία, αν θέλετε.

55. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ. Την πρόταση αυτή χρησιμοποιώ για να βρω τον τύπο συνεχούς συνάρτησης , ειδικά αν δημιουργήσω τετράγωνο ή απόλυτο τιμή. Εδώ θυμάμαι πχ ότι αν για τη συνάρτηση f έχω $f^2(x)=\ln^2 x$ και η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, τότε θα βρω τέσσερις συναρτήσεις, αφού $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$, και όχι μόνο δύο. Ένας πίνακας με τις τέσσερις περιπτώσεις μου δίνει εύκολα όλες τις συναρτήσεις(έχει μπει και θέμα στις εξετάσεις).

56. Όσο για το **ΘΕΜΑ Α** πρέπει να ξέρω τέλεια :

(α) Τους ορισμούς.

(β) Τις διατυπώσεις όλων των θεωρημάτων και τις γεωμετρικές ερμηνείες όσων από αυτά έχουν.

(γ) Τα θεωρήματα που δεν ισχύει το αντίστροφο και το κατάλληλο αντιπαράδειγμα , υπολογιστικό ή με διάγραμμα.

(δ) Τις αποδείξεις όσων θεωρημάτων έχω κάνει στο μάθημα. Η απόδειξη του Θεωρήματος Fermat είναι η πιο δύσκολη και την χωρίζω σε τρία μέρη για να τη θυμάμαι.

(ε) Τα σχόλια και τις παρατηρήσεις του βιβλίου που έχουν θέση προτάσεων και είναι χρήσιμα για τη λύση των ασκήσεων.

(στ) Τις διατυπώσεις και τις γεωμετρικές ερμηνείες των επώνυμων θεωρημάτων. Τα θεωρήματα αυτά είναι :

- Το θεώρημα Bolzano
- Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (ΘΕΤ)
- Το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής.
- Το θεώρημα Rolle.
- Το θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ)
- Το θεώρημα Fermat.

(ζ) Για την περίπτωση της αιτιολόγησης κάποιου ισχυρισμού ξέρω και μερικά βασικά σχήματα που περιέχει το σχολικό βιβλίο, κυρίως στην ενότητα των συνεχών συναρτήσεων. Θα τα μάθω και ελπίζω να μην χρειαστούν.

57. Έλεγε ο καθηγητής μας στο μάθημα ότι το ΘΜΤ είναι για τους μαθηματικούς ο Από Μηχανής Θεός σε ορισμένες περιπτώσεις ! Αυτό δεν το κατάλαβα και τόσο, αλλά αν όλα μου τα εργαλεία τελειώσουν θα προσπαθήσω να το εφαρμόσω και ό,τι βγει !

Εδώ πρέπει να σταματήσω όμως. Σας κούρασα. Δεν τελειώνουν όλα όσα έχω μάθει , όσα ξέρω και όσα έχω σημειώσει στο ειδικό τετράδιο που έχω για αυτή τη δουλειά ! Είμαι σίγουρος ότι και κάθε άλλος υποψήφιος, καθένας από σας , τα ξέρει όλα αυτά και θα έχει και πολλά άλλα να συμπληρώσει.

Θυμάμαι όμως και σας μεταφέρω, για να μην το ξεχάσω, τα λόγια του καθηγητή μου :
Στις εξετάσεις δεν πάμε να εφαρμόσουμε δύσκολα τεχνάσματα και σπάνιες τεχνικές, αλλά να αξιοποιήσουμε σε κάθε ερώτημα πρώτα τις βασικές και σημαντικές γνώσεις μας, κάνοντας νηφάλια ήρεμους συλλογισμούς και μετά τις υπόλοιπες ειδικές ενέργειες (όπως θέτω κλπ). Πάντα ξεκινάμε με τους πιο απλούς συλλογισμούς και συνεχίζουμε , ανάλογα με την άσκηση , σε πιο σύνθετους, σπάνια όμως σε πολύπλοκες και δαιδαλώδεις περιπέτειες.

Αυτά ! Για οτιδήποτε άλλο συναντήσω θα σκεφτώ ήρεμα, ψύχραιμα και θα εργαστώ μεθοδικά , ώστε να συλλέξω όσες πιο πολλές μονάδες μπορέσω , ακόμα κι αν δεν λύσω το ερώτημα μέχρι τέλος. << Αν κάνω τα λιγότερα επιπόλαια λάθη, τότε είμαι από τώρα φοιτητής. Αν δεν κάνω κανένα , τότε περνάω στην πρώτη μου προτίμηση >>. Αυτά λέει ο μαθηματικός μου , μάλλον για να μου δίνει κουράγιο, αλλά αυτός το πιστεύει γιατί μας το λέει συχνά με έμφαση και βεβαιότητα ! Καλό μου ακούγεται αυτό , πολύ αισιόδοξο και θα προσπαθήσω να το τηρήσω αλλά και να το αποδείξω στην πράξη, στις εξετάσεις δηλαδή.
Καλή επιτυχία !

Φίλοι μαθητές και φίλες μαθήτριες, σας εύχομαι ολόψυχα ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

* Ευχαριστώ την καλή φίλη και συνάδελφο **Μυρτώ Λιάπη** για την επιμέλεια του κειμένου.

Πανελλαδικές 2021

Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Μπάμπης Στεργίου – Μαθηματικός

Επιλογές από το βιβλίο :

ΣΤΕΡΓΙΟΥ-ΝΑΚΗΣ: Μεθοδική Επανάληψη

Στην παρούσα ενότητα επιχειρούμε να συστηματοποιήσουμε την εξεταστέα ύλη, θέτοντας ως πρώτο κριτήριο το είδος και τη μορφή των ασκήσεων. Για παράδειγμα, ασκήσεις που αναφέρονται στην εύρεση συνάρτησης συναντάμε σε πολλά κεφάλαια. Ανάλογα με το κεφάλαιο αυτό, η αντιμετώπιση των ασκήσεων γίνεται με διαφορετικό τρόπο. Στις σελίδες λοιπόν που ακολουθούν παρουσιάζονται οι πιο σημαντικές κατηγορίες θεμάτων και οι βασικότεροι τρόποι που χρησιμοποιούνται για τη λύση τους. Με την ταξινόμηση αυτή των ασκήσεων και τις εφαρμογές που τις συνοδεύουν ο μαθητής μπορεί εύκολα να συνοψίσει όλα όσα έχει συναντήσει στις επιμέρους ενότητες και να δει με ενιαίο τρόπο όσα πρέπει να εφαρμόσει στην πρώτη του επαφή με την άσκηση.

Α. ΘΕΜΑΤΑ ΕΥΡΕΣΗΣ

Αν συναντήσουμε ερώτημα, στο οποίο ζητείται η εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης, τότε πρέπει να μην παραλείψουμε να αξιοποιήσουμε τις παρακάτω πολύ βασικές περιπτώσεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Εφαρμόζουμε όλες τις μεθόδους που παρουσιάζονται στο γενικό μέρος των συναρτήσεων. Έτσι, αν π.χ. έχουμε συναρτησιακή σχέση που περιέχει δύο μεταβλητές, επιλέγουμε για αυτές συγκεκριμένες τιμές, ώστε να συλλέξουμε πληροφορίες για τη συμπεριφορά της συνάρτησης. Μπορούμε π.χ. να θέσουμε όπου y το x ή $x = y = 0$ ή $x = y = 1$ κλπ, ανάλογα με το πεδίο ορισμού, τη συνθήκη που έχει δοθεί αλλά και το ζητούμενο.

♦ Μετά την εύρεση της συνάρτησης και εφόσον η εκφώνηση είναι: "να βρεθεί η συνάρτηση …", είναι απαραίτητη η επαλήθευση (αυτό ισχύει σε όλα τα θέματα εύρεσης, αν οι ενέργειες δεν είναι ισοδύναμες. Αν όμως η εκφώνηση είναι: "Να αποδείξετε ότι …", τότε δεν απαιτείται επαλήθευση.

♦ Ορισμένες φορές τη συνάρτηση την βρίσκουμε από μια σχέση της μορφής $g(f(x)) = g(h(x))$, όπου g είναι μια $1-1$ συνάρτηση. Πρόκειται για την πιο απλή και έξυπνη συγχρόνως περίπτωση.

♦ Αξίζει επίσης να υπενθυμίσουμε ότι αν έχουμε μια σχέση της μορφής $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Για παράδειγμα, για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - |x|$ και $g(x) = x + |x|$ είναι:

$$f(x)g(x) = x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0$$

χωρίς όμως κάποια από τις δύο συναρτήσεις να είναι παντού ίση με μηδέν. Για ένα όμως τυχαίο $x \in A$ ισχύει προφανώς η γνωστή μας ισοδυναμία:

$$f(x)g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \text{ ή } g(x)=0$$

Παράδειγμα 1ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(0)=0$ και:

$$2f(x)+f(1-y)+g(x)-g(y)=3(x+1)^2-6y \text{ για κάθε } x,\ y\in\mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) $2f(x)+f(1-x)=3x^2+3,\ x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=x^2+2x,\ x\in\mathbb{R}$

γ) $f=g$.

Λύση

α) Είναι: $$2f(x)+f(1-y)+g(x)-g(y)=3(x+1)^2-6y \text{ για κάθε } x,\ y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Η σχέση (1) με $y=x$ δίνει:

$$2f(x)+f(1-x)=3(x+1)^2-6x=3x^2+3 \qquad (2)$$

β) Η σχέση (2), θέτοντας όπου x το $1-x$, δίνει:

$$2f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2+3=3x^2-6x+6 \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη (2) με –2 και προσθέτουμε στην (3). Έτσι παίρνουμε:

$$-3f(x)=-6x^2-6+3x^2-6x+6 \Leftrightarrow -3f(x)=-3x^2-6x \Leftrightarrow f(x)=x^2+2x,\ ..$$

γ) Με $y=0$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$2f(x)+f(1)+g(x)-g(0)=3(x+1)^2 \Leftrightarrow 2(x^2+2x)+3+g(x)=3(x^2+2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=x^2+2x,\quad x\in\mathbb{R}$$

Είναι επομένως $f(x)=x^2+2x$ και $g(x)=x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $f=g$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

Για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα Δ προσπαθούμε να συμπληρώσουμε τετράγωνα και να βασιστούμε στην πρόταση:

"Συνεχείς συναρτήσεις που δεν μηδενίζονται σε ένα διάστημα, διατηρούν πρόσημο σε αυτό το διάστημα".

Αν λείπει μόνο μία τιμή της συνάρτησης, αυτή την βρίσκουμε από το όριο, δηλαδή με χρήση του ορισμού.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η περίπτωση που η βοηθητική συνάρτηση έχει ρίζα. Σε αυτή την περίπτωση το πρόσημο διατηρείται στο κάθε διάστημα και μπορεί να προκύψουν μέχρι 4 συναρτήσεις.

Παράδειγμα 2ο

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f με την ιδιότητα $f^2(x)=1+2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Λύση

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο προσθέτοντας στα δύο μέλη το x^2 και παίρνουμε:

$$f^2(x)=1+2xf(x)\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+1\Leftrightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2+1}$$

Αν θέσουμε $g(x)=f(x)-x$, παίρνουμε $|g(x)|=\sqrt{x^2+1}$ (1).

Έτσι η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δε μηδενίζεται, αφού $\sqrt{x^2+1}\neq 0$. Επομένως η g διατηρεί πρόσημο και αφού $g(0)=f(0)=1>0$, η g είναι θετική. Άρα η σχέση (1) δίνει:

$$|g(x)|=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1},\ \ x\in\mathbb{R}$$

Σχόλιο

Αν έλειπε η συνθήκη $f(0)=1$, τότε θα παίρνουμε δύο συναρτήσεις:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1},\ \ x\in\mathbb{R}\quad \text{ή}\quad f(x)=x-\sqrt{x^2+1},\ \ x\in\mathbb{R}$$

Παράδειγμα 3ο

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Προκύπτει αμέσως ότι για $x=0$ είναι $f(0)=0$. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}=1\Leftrightarrow (e^{f(x)}-x)^2=1+x^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |e^{f(x)}-x|=\sqrt{1+x^2}$$

Αλλά η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δε μηδενίζεται, διότι $\sqrt{1+x^2}\neq 0$, οπότε διατηρεί πρόσημο. Επιπλέον είναι $g(0)=1>0$, οπότε η g είναι θετική. Άρα:

$$|e^{f(x)}-x|=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow |g(x)|=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

Τονίζουμε ότι είναι $x+\sqrt{1+x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού:

$$x+\sqrt{1+x^2}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$$

Παράδειγμα 4ο

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)(f(x)-2e^x)=0$ και $f(0)=2$

Λύση

Όπως αναφέρεται στο σχετικό σχόλιο στην αρχή δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι θα είναι $: f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=2e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής :

Η δοσμένη σχέση παίρνει τη μορφή

$$f(x)(f(x)-2e^x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)-2e^x f(x)+e^{2x}=e^{2x} \Leftrightarrow |f(x)-e^x|=e^x$$

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, αφού $|g(x)|=e^x\neq 0$. Όμως $g(0)=2-1=1>0$, οπότε η g είναι θετική. Συνεπώς :

$$|g(x)|=e^x \Leftrightarrow g(x)=e^x \Leftrightarrow f(x)-e^x=e^x \Leftrightarrow f(x)=2e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 3η

Αν η δοσμένη σχέση περιέχει παράγωγο, τότε:

- Αντιπαραγωγίζουμε, βάζοντας πάντα (π.χ. στο δεύτερο μέλος) τη σταθερά. Η αντιπαραγώγιση γίνεται προσπαθώντας να δημιουργήσουμε όρους ή ομάδες όρων που είναι παράγωγοι γνωστών συναρτήσεων, σύνθετων συναρτήσεων, γινομένου ή πηλίκου. Τονίζουμε ότι οι ενέργειες αυτές αφορούν μόνο τις περιπτώσεις που το πεδίο ορισμού είναι **διάστημα.** Για παράδειγμα είναι:

$$f^k(x)f'(x)=\left(\frac{f^{k+1}(x)}{k+1}\right)',\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln|f(x)|)',\quad e^{f(x)}f'(x)=\left(e^{f(x)}\right)',$$

$$f(x)+xf'(x)=(xf(x))',\quad f(x)f'(x)=\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)',$$

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\frac{1}{f(x)}\right)',\quad e^{\lambda x}(\lambda f(x)+f'(x))=(e^{\lambda x}f(x))',\ f(x)=\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'$$

- Φέρνουμε τη σχέση στη μορφή $H'(x)+g(x)H(x)=k(x)$ και πολλαπλασιάζουμε με $e^{G(x)}$, όπου G είναι αρχική της g. Το πρώτο μέλος είναι η παράγωγος του $H(x)e^{G(x)}$, οπότε αρκεί να βρούμε και μια αρχική του δεύτερου μέλους.

- Σε περιπτώσεις που έχουμε συναρτησιακή σχέση με δύο μεταβλητές και παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε κρατάμε τη μία μεταβλητή σταθερή και παραγωγίζουμε ως προς την άλλη. Κάνοντας το ίδιο και για την άλλη μεταβλητή και δίνοντας ειδικές τιμές στις μεταβλητές, φτάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

  Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, τότε γίνεται διερεύνηση ως προς τον βαθμό των πολυωνύμων των δύο μελών. Σημειώνουμε ότι η παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης έχει βαθμό κατά ένα μικρότερο από τον βαθμό του αρχικού πολυωνύμου. Βρίσκουμε επομένως το βαθμό της ζητούμενης συνάρτησης, γράφουμε τη γενική μορφή της συνάρτησης αφού έχει πολυωνυμική μορφή, αντικαθιστούμε, εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές και βρίσκουμε τη συνάρτηση πολυώνυμο.

Παράδειγμα 5ο

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Λύση

Η δοσμένη γράφεται:

$$(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \Leftrightarrow 2(f(x)+x)(f(x)+x)'=2x \Leftrightarrow \left((f(x)+x)^2\right)'=(x^2)' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f(x)+x)^2=x^2+c$$

Επειδή $f(0)=2$, είναι $c=4$, οπότε παίρνουμε:

$$(f(x)+x)^2=x^2+4 \Leftrightarrow |f(x)+x|=\sqrt{x^2+4} \qquad (1).$$

Είναι όμως $\sqrt{x^2+4}\neq 0$, οπότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι $f(x)+x\neq 0,\ x\in\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x,\ \ x\in\mathbb{R}$ ως συνεχής και χωρίς ρίζες διατηρεί πρόσημο και αφού $g(0)=f(0)=2>0$, είναι θετική.

Από την σχέση (1) παίρνουμε λοιπόν:

$$|f(x)+x|=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+4}-x,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 6ο

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x)+\ln f'(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Λύση

Αρχικά πρέπει . $f'(x)>0$ ..

$$f(x)+\ln f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)}+\ln f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \ln(e^{f(x)}f'(x))=x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^{x+1} \Leftrightarrow (e^{f(x)})'=(e^{x+1})'$$

Άρα $e^{f(x)}=e^{x+1}+c,\ \ c\in\mathbb{R}$. Όμως για $x=0$ είναι $c=0$.

Τελικά βρίσκουμε $f(x)=x+1,\ \ x\in\mathbb{R}$ αφού είναι $f'(x)=1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οι συνθήκες ικανοποιούνται όλες και έτσι η συνάρτηση που βρήκαμε είναι δεκτή.

Σημειώνουμε ότι αν έχουμε ανισοτική σχέση με παραγώγους, δεν επιτρέπεται να αντιπαραγωγίσουμε, επιτρέπεται όμως να πάρουμε ορισμένο ολοκλήρωμα, έχοντας πρώτα διατάξει τα άκρα ολοκλήρωσης, με την προϋπόθεση ότι και τα δύο μέλη είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Παράδειγμα 7ο

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=2f(x)\text{, για κάθε } x,\ y>0$$

Αν $f(1)=0$ και $f'(1)=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, για κάθε $x>0$.

β) $f'\left(x\right)+\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}$, για κάθε $x>0$. **γ)** $f\left(x\right)=\ln x,\ x>0$.

Λύση

α) Για $x=1$ παίρνουμε ότι $f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=2f(1)=0,\ y>0$. Άρα $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0,\ x>0$.

β) Για $y=c>0$ (δηλαδή θεωρώντας το y σταθερό) παίρνουμε ότι:

$$f(xc)+f\left(\frac{x}{c}\right)=2f(x),\ x>0$$

Παραγωγίζουμε ως προς x, οπότε $cf'(xc)+\frac{1}{c}f'\left(\frac{x}{c}\right)=2f'(x),\ x>0$. Αυτή για $x=1$ δίνει $cf'(c)+\frac{1}{c}f'\left(\frac{1}{c}\right)=2f'(1)=2$. Άρα ισχύει ότι $xf'(x)+\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)=2,\ x>0$, οπότε και:

$$x^2f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)=2x,\ x>0$$

Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ και παίρνουμε $\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+f'(x)=2\frac{1}{x},\ x>0$.

γ) Από τη σχέση $\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+f'(x)=2\frac{1}{x},\ x>0$ παίρνουμε ότι:

$$\left(-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'+f'(x)=(2\ln x)',\ x>0$$

Άρα $-f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=2\ln x+c,\ x>0$, που λόγω του ερωτήματος (α), προκύπτει ότι:

$$2f(x)=2\ln x+c,\ x>0$$

Επειδή $f(1)=0$, προκύπτει $c=0$, οπότε τελικά είναι $f(x)=\ln x,\ x>0$.

Β. ΘΕΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

Θέματα ύπαρξης μπορούμε συνήθως να αντιμετωπίσουμε:

α) Με το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση της διαφοράς, αφού γίνει πρώτα η απαλοιφή τυχόν ανεπιθύμητων παρονομαστών ή αλλάξουμε ενδεχομένως τελείως τη μορφή της ζητούμενης σχέσης με λογαρίθμιση, αν δούμε π.χ. δυνάμεις ή εκθετική μορφή.

β) Με το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

γ) Με το θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής.

δ) Με εύρεση του συνόλου τιμών.

Για παράδειγμα, αν για μια συνεχή συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ *βρούμε ότι* $f(A) = B$ *και* $\beta \in B$*, τότε υπάρχει* $\alpha \in A$ *τέτοιο, ώστε* $f(\alpha) = \beta$*. Αν μάλιστα η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε αυτό το α είναι μοναδικό.*

Την παραπάνω διαδικασία την εφαρμόζουμε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και στην απόδειξη για την ύπαρξη ρίζας μια εξίσωσης, αφού αν $\beta \in B = f(A)$*, τότε η εξίσωση* $f(x) = \beta$ *έχει ρίζα στο Α. Η ρίζα αυτή, σε περίπτωση γνησίως μονότονης συνάρτησης, είναι μοναδική.*

ε) Με απαγωγή σε άτοπο, χρησιμοποιώντας την πρόταση:

"Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο".

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε πως αν μια συνάρτηση δε μηδενίζεται, τότε μπορεί να γίνει ο παρονομαστής μιας άλλης συνάρτησης.

στ) Με το θεώρημα Rolle σε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση, που συνήθως βρίσκεται με αντιπαραγώγιση ή δοκιμές.

ζ) Με το Θ.Μ.Τ. στη δοσμένη ή σε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση.

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με . $f(0) = 1$. και $f(2) = 5$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

Υπόδειξη

Η σχέση $f'(\xi) = 2\xi$ οδηγεί στην $f'(x) = 2x$ και αυτή με τη σειρά της στη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, γιατί $g'(x) = f'(x) - 2x$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$. Επιπλέον:

$$g(0) = f(0) = 1 \quad \text{και} \quad g(2) = f(2) - 4 = 5 - 4 = 1$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0,\, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2\xi$$

Παράδειγμα 2ο

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β), $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$.

β) Υπάρχουν $\lambda,\ \mu \in (\alpha,\, \beta)$, με $\lambda \neq \mu$ και $f'(\lambda) f'(\mu) = 1$.

Υπόδειξη

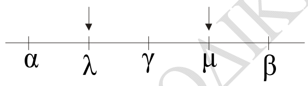
α) Έστω $g(x) = f(x) - \alpha - \beta + x,\ x \in [\alpha, \beta]$. Εφαρμόζουμε για την g το Θεώρημα Bolzano. Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha - \beta + \alpha = \alpha - \beta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \alpha - \beta + \beta = \beta - \alpha > 0$,

δηλαδή $g(\alpha) g(\beta) < 0$.

Υπάρχει επομένως $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$.

β) Θα χρησιμοποιήσουμε το Θ.Μ.Τ.



Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα (α, γ), (γ, β). Σύμφωνα λοιπόν με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\lambda \in (\alpha,\, \gamma)$ και $\mu \in (\gamma,\, \beta)$ τέτοια, ώστε:

- $f'(\lambda) = \dfrac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \dfrac{\alpha + \beta - \gamma - \alpha}{\gamma - \alpha} = \dfrac{\beta - \gamma}{\gamma - \alpha}$
- $f'(\mu) = \dfrac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \dfrac{\beta - (\alpha + \beta - \gamma)}{\beta - \gamma} = \dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma}$

Άρα, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε $f'(\lambda) f'(\mu) = \dfrac{\beta - \gamma}{\gamma - \alpha} \cdot \dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma} = 1$.

Παράδειγμα 3ο

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-2,\, 2]$ και $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-2,\, 2)$. Αν $f(-2) = -2$ και $f(2) = 2$, να αποδειχθεί ότι:

α) Υπάρχουν $\xi_1 \in (-2,\, 0)$ και $\xi_2 \in (0,\, 2)$ τέτοια, ώστε:

$$2 + f(0) = 2f'(\xi_1) \quad \text{και} \quad 2 - f(0) = 2f'(\xi_2)$$

β) $f(0) = 0$.

Υπόδειξη

α) Για την f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[-2,\, 0]$ και $[0,\, 2]$. Υπάρχουν δηλαδή:

- $\xi_1 \in (-2,0)$: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \dfrac{f(0)+2}{2}$, οπότε $f(0)+2 = 2f'(\xi_1)$

- $\xi_2 \in (0,2)$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2} = \dfrac{2-f(0)}{2}$, οπότε $2-f(0) = 2f'(\xi_2)$.

β) Είναι $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-2,2)$, οπότε:

- $f'(\xi_1) \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(0)+2}{2} \le 1 \Leftrightarrow f(0)+2 \le 2 \Leftrightarrow f(0) \le 0 \quad (1)$

- $f'(\xi_2) \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2-f(0)}{2} \le 1 \Leftrightarrow 2-f(0) \le 2 \Leftrightarrow f(0) \ge 0 \quad (2)$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $f(0) = 0$.

Γ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ –ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Γ1. Εξισώσεις

Στη συνέχεια προσπαθούμε να επισημάνουμε και να περιγράψουμε τις πιο χαρακτηριστικές εξισώσεις που μπορεί να συναντήσει ο μαθητής στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου. Για την κάθε περίπτωση δίνουμε μερικά βασικά θεωρητικά στοιχεία που δηλώνουν τη μορφή και υποδεικνύουν στην ουσία τον τρόπο λύσης των ασκήσεων αυτών. Ακολουθούν μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα για την κάθε περίπτωση, ώστε να φανεί πιο συγκεκριμένα ο τρόπος ή οι τρόποι επίλυσης των εξισώσεων αυτών.

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Κάθε εξίσωση, μετά από πιθανή εκτέλεση πράξεων ή κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς (π.χ. λογαριθμίζουμε ή πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με κατάλληλη μη μηδενιζόμενη παράσταση), έχει ή παίρνει τη μορφή $f(x)=0$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, που είναι και το πεδίο ορισμού της εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με αλγεβρικές μεθόδους.

Α. Έστω ότι για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε ή μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι $1-1$. Προσπαθούμε τότε να βρούμε με παρατήρηση έναν αριθμό $\alpha \in A$, ώστε $f(\alpha)=0$. Φέρνουμε λοιπόν την εξίσωση στη μορφή $f(x)=f(\alpha)$, οπότε λόγω του $1-1$ παίρνουμε:

$$f(x)=f(\alpha) \Leftrightarrow x=\alpha$$

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=\alpha$.

Β. Είναι συνήθως πιο εύκολο να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια προσπαθούμε να εντοπίσουμε με παρατήρηση μια ρίζα της εξίσωσης, δηλαδή αριθμό $\alpha \in A$, ώστε $f(\alpha)=0$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι και η μοναδική.

Εφαρμογή 1η

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)=-f(2-x) \quad \text{και} \quad f'(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$, με τα δεδομένα ότι η f είναι παραγωγίσιμη, ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x)=-f(2-x) \quad \text{και} \quad f'(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε } x\in R.$$

(Εξετάσεις 2003)

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, αυτή θα διατηρεί πρόσημο. Έτσι, η f είναι γνησίως μονότονη και συγκεκριμένα:

- είναι γνησίως αύξουσα, αν η f' είναι θετική.
- είναι γνησίως φθίνουσα, αν η f' είναι αρνητική.

β) Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$f(1) = -f(2-1) \Leftrightarrow f(1) + f(1) = 0 \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Επομένως η τιμή $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

γ) Με τις νέες προϋποθέσεις δεν έχουμε εξασφαλισμένη τη μονοτονία της f, αφού δεν γνωρίζουμε τη συνέχεια της f'. Μας αρκεί όμως η f να είναι $1-1$ και αυτό το πετυχαίνουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι η f δεν είναι 1–1. Υπάρχουν τότε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.

Για την f πληρούνται στο $[\alpha, \beta]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, άτοπο. Έτσι η f είναι 1–1, οπότε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1 \blacksquare$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(x) = 0$ και εντοπίζουμε με παρατήρηση μια ρίζα. Κατά τη μελέτη όμως της βοηθητικής συνάρτησης f μπορεί να προκύψουν προβλήματα τόσο με την πρώτη όσο και με τη δεύτερη παράγωγο της f. Σε αυτή την περίπτωση αλλάζουμε μορφή στην αρχική εξίσωση, είτε απαλείφοντας παρονομαστές, είτε λογαριθμίζοντας (αν έχουμε εκθετικές μορφές) ή μεταφέρουμε παράγοντες, κυρίως εκθετικής μορφής, από το ένα μέλος στο άλλο. Με τον τρόπο αυτό η νέα συνάρτηση που θα θεωρήσουμε μελετάται πιο εύκολα και έτσι η μοναδικότητα προκύπτει με πιο φυσιολογικό τρόπο.

Εφαρμογή 2η

Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x^2 + 1$.

Λύση

Σύμφωνα με τα σχόλια και την ανάλυση της μεθόδου, πρώτα εξετάζουμε αν μπορούμε να εντοπίσουμε ρίζα. Πράγματι, η τιμή $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης.

Φέρνουμε όλους τους όρους στο α΄ μέλος και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = e^{-x} - x^2 - 1$$

Είναι $f'(x) = (e^{-x} - x^2 - 1)' = -e^{-x} - 2x$ και $f''(x) = (-e^{-x} - 2x)' = e^{-x} - 2$.

Φαίνεται όμως με την πρώτη ματιά ότι αφού η πρώτη παράγωγος δεν δίνει αμέσως ρίζα και πρόσημο, ενώ η δεύτερη παράγωγος δεν διατηρεί πρόσημο, δεν είναι κακή σκέψη να αλλάξουμε τη μορφή της εξίσωσης και αν χρειαστεί, επανερχόμαστε. Είναι λοιπόν:

$$. e^{-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow (x^2+1)e^x = 1 \Leftrightarrow (x^2+1)e^x - 1 = 0 .$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = (x^2+1)e^x - 1, \ x \in \mathbb{R}$. Είναι:

- $f(0) = 0$,
- $f'(x) = ((x^2+1)e^x - 1)' = e^x (x+1)^2 > 0, \ x \neq -1$.

Η συνάρτηση λοιπόν f είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι συνεχής και η παράγωγος μηδενίζεται μόνο σε ένα σημείο, χωρίς να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Έτσι η τιμή $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, συνεπώς και της αρχικής εξίσωσης. ■

Να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε την πρώτη μας προσπάθεια, η διαδικασία όμως θα ήταν πιο πολύπλοκη διότι θα έπρεπε να βρούμε το πρόσημο της f'', τη μονοτονία και το πρόσημο της f' και τελικά τη μονοτονία της $f(x) = e^{-x} - x^2 - 1$. Ας το επιχειρήσει μόνος του ο απαιτητικός μαθητής. Ωστόσο, μια πολύ εύκολη ενέργεια κατέστησε την λύση της άσκησης πολύ πιο απλή. Υπάρχουν περιπτώσεις που χωρίς τον κατάλληλο μετασχηματισμό της εξίσωσης η επίλυσή της είναι δυσχερής ή αδύνατη.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3η

Αν η εξίσωση έχει σχετικά πολύπλοκη μορφή, προσπαθούμε να τη φέρουμε στη μορφή:

$$f((g(x)) = f(h(x))$$

όπου f είναι μια κατάλληλη $1-1$ συνάρτηση. Επομένως θα είναι:

$$f((g(x)) = f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$$

Η νέα εξίσωση είτε λύνεται αλγεβρικά, είτε λύνεται όπως στις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Εφαρμογή 3η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$e^{x+3} - e^{x^2-x} = x^2 - 2x - 3$$

Λύση

Βλέπουμε ότι στους δύο εκθετικούς όρους παρουσιάζονται οι παραστάσεις $x^2 - x$ και $x + 3$. Διατάσσουμε ξανά τη δοσμένη σχέση, ώστε οι όροι αυτοί να βρίσκονται στο ίδιο μέλος:

$$e^{x+3} - e^{x^2-x} = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow e^{x+3} + (x+3) = e^{x^2-x} + (x^2 - x) \quad (1)$$

Η σχέση αυτή μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$. Έτσι η σχέση (1) γράφεται:

$$f(x+3)=f(x^2-x) \qquad (2)$$

Τι χρειαζόμαστε ακόμα, ώστε να απαλλαχθούμε από την εμφάνιση της f στην παραπάνω ισότητα; Μα προφανώς το $1-1$. Πώς θα το εξασφαλίσουμε αυτό; Η απάντηση είναι:

Ή με τον ορισμό ή μέσω της μονοτονίας!

Επειδή $f'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς και $1-1$. Επομένως η σχέση (2) δίνει ισοδύναμα:

$$f(x+3)=f(x^2-x)\Leftrightarrow x^2-x=x+3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow (x=-1 \text{ ή } x=3)$$

Η δυσκολία των εξισώσεων αυτών βρίσκεται στο να δημιουργήσουμε στο κάθε μέλος την κατάλληλη παράσταση, ώστε να οδηγηθούμε στην δέουσα συνάρτηση.

Εφαρμογή 4η

Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2-3x+2)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$.

Εξετάσεις 2010

Λύση

Βλέπουμε αρχικά ότι η εξίσωση έχει νόημα (ορίζεται) σε όλο το $\mathbb{R}$.

Είναι φανερό ότι μάλλον πρέπει να εξετάσουμε μήπως η εξίσωση παίρνει μια πιο καλή μορφή και όχι να θεωρήσουμε για μελέτη τη συνάρτηση της διαφοράς. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow \ln\left((3x-2)^2+1\right)+2(3x-2)=\ln(x^4+1)+2x^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((3x-2)^2+1\right)+2(3x-2)=\ln\left((x^2)^2+1\right)+2x^2$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+1)+2x$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\ln\left((3x-2)^2+1\right)+2(3x-2)=\ln\left((x^2)^2+1\right)+2x^2\Leftrightarrow f(3x-2)=f(x^2)$$

Θα μελετήσουμε επομένως την f ως προς τη μονοτονία. Είναι

$$f'(x)=\left(\ln(x^2+1)+2x\right)'=\frac{2x}{x^2+1}+2=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>0$$

Αφού λοιπόν η παράγωγος της f είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι επομένως και $1-1$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(3x-2)=f(x^2)\Leftrightarrow 3x-2=x^2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=1)$$

Και οι δύο αυτές τιμές είναι δεκτές, μια και δεν έχουμε περιορισμούς. ■

Εφαρμογή 5η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(xe^x)$. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x^4+3)+f(x^2+1)=f(x^4+1)+f(x^2+3)$$

Λύση

Η εξίσωση, αλλάζοντας τη θέση των όρων, παίρνει τη μορφή:

$$f(x^4+3)-f(x^4+1)=f(x^2+3)-f(x^2+1)$$

Σύνολο αναφοράς είναι το $\mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν:

- $f(x)=e^x-\ln(xe^x)=e^x-x-\ln x$, με $x>0$
- $f'(x)=(e^x-x-\ln x)'=e^x-\dfrac{1}{x}-1$ και $f''(x)=\left(e^x-\dfrac{1}{x}-1\right)'=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0,\ \ x>0$.

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η μορφή της εξίσωσης μας οδηγεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x+2)-f(x)$$

αφού έτσι η εξίσωση παίρνει τη μορφή $g(x^4+1)=g(x^2+1)$, με $x\in\mathbb{R}$. Είναι όμως:

$$g'(x)=f'(x+2)-f'(x)>0$$

διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και $x+2>x$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς είναι και $1-1$. Έτσι, τελικά παίρνουμε:

$$g(x^4+1)=g(x^2+1)\Leftrightarrow x^4+1=x^2+1\Leftrightarrow x^4-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x^2-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0\ \text{ ή }\ x=1\ \text{ ή }\ x=-1)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 4η

Α. Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(x)=f(\alpha)$ και αποδεικνύουμε ότι το α είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο. Αυτό συνήθως το πετυχαίνουμε με το να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο στο $x=\alpha$. Για το λόγο αυτό μελετάμε αρχικά την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, αν το α είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο, τότε με τη βοήθεια του ορισμού της μονοτονίας προκύπτει ότι $f(x)\neq f(\alpha)$ για κάθε $x\neq\alpha$. Έτσι το $x=\alpha$ είναι η μοναδική ρίζα.

Β. Σε εξισώσεις που έχουν ή παίρνουν την μορφή $f(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$, όπου f είναι μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση μπορούμε, εκτός από τη μέθοδο της διαφοράς, εργαστούμε και ως εξής:

- Παρατηρούμε το $x=\alpha$ είναι ρίζα της εξίσωσης.
- Βλέπουμε ότι το β΄ μέλος είναι το y στην ευθεία της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$.
- Από την ιδιότητα της εφαπτομένης σε κυρτή ή κοίλη συνάρτηση παίρνουμε η τιμή $x=\alpha$ είναι η μοναδική.

Εφαρμογή 6η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2+1)+f(x^4+1)=4$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=(0,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

Από το πρόσημο της f' προκύπτει ότι η f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$.
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

β) Από τη μονοτονία της f προκύπτει ότι το $f(1)=2$ είναι ολικό ελάχιστο της f και μάλιστα αυτό παρουσιάζεται μόνο στη θέση $x_0=1$. Αυτό σημαίνει ότι είναι $f(x)>2$ για κάθε $x\neq 1$. Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2$ είναι η $x=1$.

Σχόλιο

Μπορούμε να εργαστούμε πιο αναλυτικά ως εξής:

- Αν $x<1$, τότε $f(x)>f(1)=2$, δηλαδή $f(x)>2$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\neq 2$ για $x<1$.
- Αν $x>1$, τότε $f(x)>f(1)=2$, δηλαδή $f(x)>2$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\neq 2$ για $x>1$.

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$.

γ) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f(x^2+1)+f(x^4+1)=4$ αληθεύει για $x=0$. Αυτή η ρίζα είναι η μοναδική, αφού για κάθε άλλη τιμή του x είναι $x^2+1\neq 1$ και $x^4+1\neq 1$, οπότε $f(x^2+1)>2$ και $f(x^4+1)>2$, δηλαδή $f(x^2+1)+f(x^4+1)>2+2=4$. Άρα:

$$f(x^2+1)+f(x^4+1)=4\Leftrightarrow x=0 \ ■$$

Εφαρμογή 7η

Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Εξετάσεις 2016

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $e^x\geq x+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Επομένως είναι $e^{x^2}\geq x^2+1$ με την ισότητα να ισχύει όταν:

$$e^{x^2}-x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

Η εξίσωση έχει επομένως τη μοναδική λύση $x=0$.

Εφαρμογή 8η

Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f\left(x+3\right)-f\left(x\right)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Εξετάσεις 2016

Λύση

Είναι $f'(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)'=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x(e^{x^2}-1)$.

Η μονοτονία αλλάζει στο 0, αφού $e^{x^2}-1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δεν μπορούμε όμως να διαπιστώσουμε με την πρώτη ματιά αν αυτό θα βοηθήσει. Ας συλλέξουμε μερικές ακόμα πληροφορίες για την f και ας πάμε στη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x)=(e^{x^2}\cdot 2x-2x)'=e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x+e^{x^2}\cdot 2-2=4x^2e^{x^2}+2(e^{x^2}-1)>0 \text{ για κάθε } x\neq 0$$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Με αυτές τις πληροφορίες ας δούμε τι μπορούμε να κάνουμε στην εξίσωση, που έχει τη μορφή:

$$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f\left(x+3\right)-f\left(x\right) \qquad (1)$$

Το να μελετήσουμε τη συνάρτηση της διαφοράς είναι κακή επιλογή για πολλούς λόγους.

Θα καταφύγουμε επομένως σε βοηθητική συνάρτηση άλλης μορφής. Η συνάρτηση αυτή είναι η $g(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\geq 0$, διότι τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$g(|\eta\mu x|)=g(x)$$

Μένει να αποδείξουμε ότι η g είναι $1-1$. Είναι:

$$g'(x)=f'(x+3)-f'(x)$$

Αλλά η f' είναι γνησίως αύξουσα και έτσι:

$$x+3>x\Rightarrow f'(x+3)>f'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x+3)-f'(x)>0\Rightarrow g'(x)>0$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς και 1–1. Άρα:

$$g(|\eta\mu x|)=g(x)\Leftrightarrow |\eta\mu x|=x\Leftrightarrow x=0$$

διότι ξέρουμε ότι $|\eta\mu x|\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 5η

Εντοπίζουμε με παρατήρηση μια ρίζα x_0 και με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $x < x_0$, $x > x_0$, εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της συνάρτησης και καταλήγουμε σε άτοπο.

Εφαρμογή 9η

Να λύσετε την εξίσωση $(2^x + 3^x)^{2018} = (2^{2018} + 3^{2018})^x$.

Λύση

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της δοσμένης εξίσωσης με 3^{2018x} και ισοδύναμα παίρνουμε την εξίσωση:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1\right]^{2018} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2018} + 1\right]^x$$

Προφανής ρίζα είναι η τιμή $x = 2018$. Διακρίνουμε στη συνέχεια τις περιπτώσεις $x < 2018$, $x > 2018$.

Στην πρώτη π.χ. περίπτωση, όπου $x < 2018$, λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση $g(x) = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2018} + 1\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα, παίρνουμε:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1\right]^{2018} > \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2018} + 1\right]^{2018} > \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2018} + 1\right]^x$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ρίζες μικρότερες του 2018. Όμοια εργαζόμαστε και για $x > 2018$. Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x = 2018$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 6η

Σε ορισμένες, πιο σπάνιες περιπτώσεις, πιθανόν να χρειαστεί να εντοπίσουμε με παρατήρηση δύο ή περισσότερες ρίζες και να αποδείξουμε ότι οι ρίζες αυτές είναι οι μοναδικές. Αυτό μπορεί να γίνει και ως εξής:

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (που παίρνει ή έχει τη μορφή $f(x) = 0$) έχει π.χ. τουλάχιστον τρεις ρίζες, οπότε με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τις f, f', f'' προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο.

Εφαρμογή 10η

Να λύσετε την εξίσωση $2^x + 3^{2x} = 9x + 2$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $x = 0$, $x = 1$ επαληθεύουν την εξίσωση, οπότε είναι ρίζες. Θα αποδείξουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο ότι αυτές οι λύσεις είναι οι μοναδικές. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει και άλλη λύση και ας ονομάσουμε α, β, γ τις τρεις (τουλάχιστον) από τις ρίζες της εξίσωσης, με $\alpha < \beta < \gamma$. Είναι προφανές ότι δύο από τους αριθμούς α, β, γ είναι οι 0 και 1.

Η εξίσωση μάς οδηγεί στη συνάρτηση:

$$f(x) = 2^x + 3^{2x} - 9x - 2$$

Είναι τότε $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$. Από το θεώρημα Rolle για την f υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, \beta)$ και $x_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1) = 0 \text{ και } f'(x_2) = 0$$

Επίσης, πάλι από το θεώρημα του, Rolle αλλά για την f', υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, με $f''(\xi) = 0$. Είναι όμως:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 - 9 \quad \text{και}$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 4 \cdot 3^{2x} \ln^2 3 > 0$$

Αλλά η τελευταία σχέση με την $f''(\xi) = 0$ οδηγούν σε άτοπο. Η εξίσωση λοιπόν δεν μπορεί να έχει τρεις ή περισσότερες ρίζες, οπότε οι λύσεις της είναι αναγκαστικά οι $x = 0$, $x = 1$. ■

Εφαρμογή 11η

Να λύσετε την εξίσωση $2^x + 3^x + 6^x = 3x^2 + 5x + 3$.

Υπόδειξη

Προφανείς ρίζες είναι οι $x = 0, x = 1, x = -1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερις τουλάχιστον ρίζες, τις α, β, γ, δ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$. Όπως στην προηγούμενη εφαρμογή, πάλι με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - 3x^2 - 5x - 3$$

θα πρέπει να υπάρχει ξ με $f^{(3)}(x) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι:

$$f^{(3)}(x) = 2^x \ln^3 2 + 3^x \ln^3 3 + 6^x \ln^3 6 > 0$$

Εφαρμογή 12η

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = \alpha$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη μία ρίζα x της εξίσωσης με $x \neq \alpha$, π.χ. $x < \alpha$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi \in (x, \alpha)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\Leftrightarrow f(x)=f(\alpha)+f'(\xi)(x-\alpha)$$

Επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)+f'(\xi)(x-\alpha)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(x-\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\overset{x\neq\alpha}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=f'(\alpha)\Leftrightarrow \xi=\alpha$$

διότι η f είναι κυρτή, οπότε η f', ως γνησίως αύξουσα, είναι $1-1$. Αλλά η σχέση $\xi=\alpha$ οδηγεί σε άτοπο, διότι $\xi\in(x,\alpha)$ που σημαίνει ότι $\xi\neq\alpha$.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο, αν δεχθούμε ότι υπάρχει ρίζα x της εξίσωσης με $x>\alpha$. Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x=\alpha$.

Άλλος τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(\alpha,f(\alpha))$ είναι η εξής:

$$(\varepsilon):\ y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Αλλά η f είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη (ε), με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(\alpha,f(\alpha))$. Έτσι, για $x\neq\alpha$ ισχύει ότι:

$$f(x)>y\Leftrightarrow f(x)>f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Αφού το $x=\alpha$ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης, από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική. ■

ΜΕΘΟΔΟΣ 7η

Υπάρχει μια ειδική κατηγορία εξισώσεων, που έχουν τη γενική μορφή:

$$f(\alpha(x))+f(\beta(x))=f(\gamma(x))+f(\delta(x))$$

Στις εξισώσεις αυτές προσπαθούμε αρχικά να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια, αφού εντοπίσουμε μια ρίζα ρ της δοσμένης εξίσωσης, προσπαθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο να αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα. Αυτό το πετυχαίνουμε διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x<\rho$ ή $x>\rho$, συγκρίνοντας τις ποσότητες $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ κατάλληλα ανά δύο και χρησιμοποιώντας το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f.

Εφαρμογή 13η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$2^x\ln(2^x+1)+4^x\ln(4^x+1)=3^x\ln(3^x+1)+5^x\ln(5^x+1)\,,\ x\in\mathbb{R}$$

Λύση

Μια προφανής ρίζα είναι η $x=0$. Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=x\ln(x+1)$, με $x>-1$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(2^x)+f(4^x)=f(3^x)+f(5^x)$$

Είναι όμως:

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}=\ln(x+1)+1-\frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

Είναι $f'(0)=0$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η f' είναι αρνητική στο διάστημα $(-1,0)$ και θετική στο $(0,+\infty)$. Η συνάρτηση f είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- Για $x<0$ είναι $2^x>3^x$ και $4^x>5^x$, οπότε $f(2^x)>f(3^x)$ και $f(4^x)>f(5^x)$, διότι οι αριθμοί 2^x, 3^x, 4^x, 5^x ανήκουν στο διάστημα $(0,+\infty)$. Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$f(2^x)+f(4^x)>f(3^x)+f(5^x)$$

- Για $x>0$ είναι $2^x<3^x$ και $4^x<5^x$, οπότε $f(2^x)<f(4^x)$ και $f(4^x)<f(5^x)$, διότι οι αριθμοί 2^x, 3^x, 4^x, 5^x ανήκουν επίσης στο διάστημα $(0,+\infty)$. Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$f(2^x)+f(4^x)<f(3^x)+f(5^x)$$

Επομένως η εξίσωση $f(2^x)+f(4^x)=f(3^x)+f(5^x)$ δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$ ■

ΜΕΘΟΔΟΣ 8η

Σε ορισμένες περιπτώσεις εντοπίζουμε ρίζες με παρατήρηση, αλλά η μοναδικότητα αυτών των ριζών εξασφαλίζεται μόνο με την εύρεση των διαστημάτων της μονοτονίας. Έτσι, αν η βοηθητική συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο μια φορά και στο καθένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται έχουμε ρίζα, τότε η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες και η διαδικασία επίλυσης έχει ολοκληρωθεί.

Εφαρμογή 14η

Να λυθεί η εξίσωση $4^x=x^4,\ \ x>0$.

Λύση

Δύο προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x=2,\ \ x=4$. Θα αποδείξουμε ότι αυτές είναι και οι μοναδικές. Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ότι εξίσωση παίρνει την ισοδύναμη μορφή $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}$.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ και βρίσκουμε ότι:

- $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ \ x>0$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Έτσι, αφού $2<e$ και $4>e$, βλέπουμε ότι:

- Στο διάστημα $(0,e]$ είναι $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$.

- Στο διάστημα $[e,+\infty)$ είναι $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow f(x)=f(4) \Leftrightarrow x=4$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x=2$ και $x=4$. ■

ΜΕΘΟΔΟΣ 9η

Για τις εξισώσεις με κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις ιδιαίτερα σημαντικές είναι και οι παρακάτω περιπτώσεις. Οι περιπτώσεις αυτές έχουν τη βάση τους στο γεγονός ότι μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση μπορεί να τέμνει μια ευθεία το πολύ σε δύο σημεία. Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε μπορούμε να εργαστούμε τόσο με τη μέθοδο της μελέτης της συνάρτησης της διαφοράς, αφού η f' θα έχει από το θεώρημα Rolle ρίζα ανάμεσα στις δύο ρίζες της f που θα εντοπίσουμε με παρατήρηση, όσο και με απαγωγή σε άτοπο, αφού αν η εξίσωση έχει τρεις ρίζες, τότε η f'' θα έχει τουλάχιστον μία, κάτι που συνήθως οδηγεί σε άτοπο.

Εφαρμογή 15η

α) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu x-(2x-\pi)\sigma\upsilon\nu x=\pi,\ x\in[0,\pi]$.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$ που άγονται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x-(2x-\pi)\sigma\upsilon\nu x-\pi,\ x\in[0,\pi]$. Είναι:

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu x+(2x-\pi)\eta\mu x=(2x-\pi)\eta\mu x$$

Μοναδική ρίζα της παραγώγου στο $(0,\pi)$ είναι η $x=\frac{\pi}{2}$. Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Επομένως:

- Για $0<x\le\frac{\pi}{2}$ είναι $f(x)<f(0)=0$.
- Για $\frac{\pi}{2}\le x<\pi$ είναι $f(x)<f(\pi)=0$.

Είναι λοιπόν $f(0)=f(\pi)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$. Επομένως οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x=0,\ x=\pi$.

Άλλος τρόπος

Είναι $f(0)=f(\pi)=0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη ρίζα ρ της εξίσωσης στο $(0,\pi)$. Επειδή $f(0)=f(\rho)=f(\pi)=0$, από το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_1 της f' στο $(0,\rho)$ και μία τουλάχιστον ρίζα x_2 της f' στο διάστημα (ρ,π), δηλαδή $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. Αλλά:

$$f'(x)=2συνx-2συνx+(2x-π)ημx=(2x-π)ημx$$

η οποία έχει μόνο μία ρίζα στο $(0,π)$, την $x=\frac{π}{2}$. Καταλήξαμε επομένως σε άτοπο. Συνεπώς η δοσμένη εξίσωση έχει μόνο τις ρίζες $x=0,\ \ x=π$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

η οποία γράφεται και στη μορφή:

$$y-ημx_0=συνx_0\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y-ημx_0=(x-x_0)συνx_0 \qquad (2)$$

Αυτή περνάει όμως από το σημείο $A\left(\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right)$, οπότε πρέπει:

$$\frac{π}{2}-f(x_0)=f'(x_0)\left(\frac{π}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow π-2f(x_0)=f'(x_0)(π-2x_0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)(π-2x_0)-π+2f(x_0)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2f(x_0)+f'(x_0)(π-2x_0)-π=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2ημx_0-(2x_0-π)συνx_0-π=0\Leftrightarrow g(x_0)=0$$

όπου $g(x)=2ημx-(2x-π)συνx-π,\ x\in[0,π]$.

Σύμφωνα με το ερώτημα (α) αυτή η εξίσωση έχει ρίζες $x=0,\ \ x=π$ και έτσι από την (2) προκύπτει ότι οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι:

♦ $(ε_1): y=x$ και ♦ $(ε_2): y=π-x$

ΜΕΘΟΔΟΣ 10η

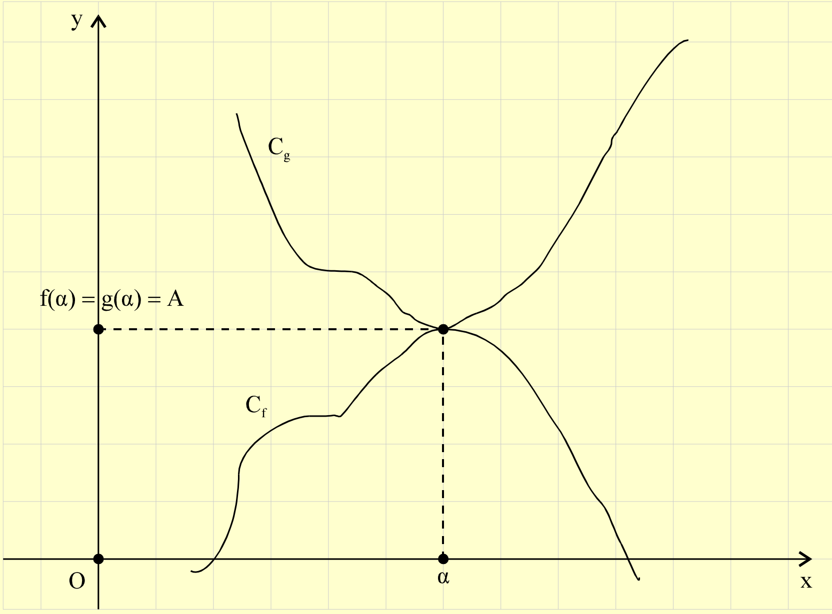
Έστω ότι έχουμε δύο συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού Δ, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $α\inΔ$ και η g ολικό ελάχιστο **μόνο** στο σημείο $α\inΔ$ και επιπλέον $f(α)=g(α)$. Είναι τότε φανερό ότι η εξίσωση:

$$f(x)=g(x)$$

έχει στο Δ μοναδική ρίζα την $x=α$. Η αιτιολόγηση γίνεται ως εξής:

- Το $x=α$ είναι προφανής ρίζα.
- Ισχύει ότι $f(x)\le f(α)=g(α)\le g(x)$ για κάθε $x\inΔ$ και οι ισότητες ισχύουν συγχρόνως μόνο αν $x=α$.

Επομένως το $x=α$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.



Ανάλογα εργαζόμαστε όταν η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $\alpha \in \Delta$, η συνάρτηση g μηδενίζεται μόνο στο $\alpha \in \Delta$ και θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$f(x) = A + g^{2\nu}(x),\ x \in \Delta,\ \nu \in \mathbb{N}^* \text{ και } A = f(\alpha)$$

Πραγματικά, το $x = \alpha$ επαληθεύει την εξίσωση, ενώ για κάθε $x \neq \alpha$ είναι $f(x) < A + g^{2\nu}(x)$. Γενικά, με παρόμοιο τρόπο λύνονται εξισώσεις της μορφής:

$$f(x) = g(x)$$

με $A = f(\alpha) = g(\alpha)$, το A είναι μέγιστο της f και $g(x) \geq g(\alpha)$ (1) ή $A = f(\alpha) = g(\alpha)$, το A είναι ελάχιστο της f και $g(x) \leq g(\alpha)$ (2), $x \in \Delta$, αρκεί το ίσον στις (1), (2) να ισχύει μόνο για $x = \alpha$.

Εφαρμογή 16η

Να λύσετε την εξίσωση $e^x - x = 1 - (x^2 - x)^{2018}$.

Υπόδειξη

Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 0$. Θα αποδείξουμε ότι είναι και η μοναδική.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x$, βρίσκουμε ότι αυτή έχει ελάχιστο το $f(0) = 1$, δηλαδή $f\left(x\right) \geq f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$e^x - x = 1 - (x^2 - x)^{2018} \Leftrightarrow f(x) = 1 - (x^2 - x)^{2018}$$

Αν $x \neq 0$, είναι $f(x) > 1 \geq 1 - (x^2 - x)^{2018}$, που σημαίνει ότι $f(x) \neq 1 - (x^2 - x)^{2018}$. Επομένως το $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα.

ΜΕΘΟΔΟΣ 11η (Εξισώσεις με αντίστροφη συνάρτηση).

**** Να μην διδαχθούν οι προτάσεις Β, Ε για το σχολικό έτος 2020-2021***

Α. Συχνά συναντάμε εξισώσεις της μορφής $f^{-1}(x)=x$. Από τη συμμετρία όμως των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} συμπεραίνουμε ότι οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=x$ και $f(x)=x$ είναι ισοδύναμες. Αν λοιπόν δοθεί η μία από τις δύο, τότε επιλέγουμε την άλλη. Συνήθως δίνεται η πρώτη και επιλέγουμε τη δεύτερη, διότι η εύρεση της αντίστροφης είναι συχνά δυσχερής ή αδύνατη.

Β. Έστω ότι κατά την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης καταλήξουμε στην εξίσωση $f(f(x))=x$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. Εφαρμόζουμε τότε την εξής βοηθητική πρόταση:

Αν η συνάρτηση η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=x$$

Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο, ως εξής:

Έστω α μια ρίζα της εξίσωσης $f(f(x))=x$, δηλαδή $f(f(\alpha))=\alpha$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(\alpha)<\alpha$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε:

$$f\big(f(\alpha)\big)<f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha<f(\alpha)$$

  πράγμα που είναι άτοπο, διότι $f(\alpha)<\alpha$.

- Αν $f(\alpha)>\alpha$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε:

$$f(f(\alpha))>f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha>f(\alpha)$$

  πράγμα που είναι άτοπο, διότι $f(\alpha)>\alpha$.

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε τελικά θα είναι $f(\alpha)=\alpha$.

Αντιστρόφως, αν το α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$, δηλαδή $f(\alpha)=\alpha$, τότε:

$$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$$

δηλαδή το α είναι ρίζα και της εξίσωσης $f(f(x))=x$.

Γ. Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος:

$$y=f(x) \quad \text{και} \quad x=f(y)$$

διότι:

$$(x,y)\in C_f \Leftrightarrow f(x)=y \;\text{ και }\; (y,x)\in C_{f^{-1}} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$$

Δ. Για τη λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x)=f(x)$ εργαζόμαστε όπως ακριβώς παραπάνω, αφού, αν θέσουμε $f^{-1}(x)=f(x)=y$, τότε $f(x)=y$ και $x=f(y)$.

Αν η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x$$

Επομένως η εξίσωση $f^{-1}(x)= f(x)$ ανάγεται σε μία από τις απλούστερες εξισώσεις:

$$f^{-1}(x)=x \text{ ή } f(x)= x$$

Πραγματικά, η εξίσωση $f^{-1}(x) =f(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(f(x))=x$ και η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την παράγραφο Β.

*** Σε επίπεδο Πανελλαδικών Εξετάσεων η παραπάνω διαδικασία πρέπει να αποτελεί μέρος της λύσης.

Ε. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύει ότι:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=-x$$

Με άλλα λόγια, αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή, τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=-x$.

Απόδειξη

Έστω ότι $f^{-1}(\alpha)=f(\alpha)$. Είναι τότε:

$$f^{-1}(\alpha)=f(\alpha)\Leftrightarrow f(f(\alpha))=\alpha$$

Θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha)=-\alpha$. Έστω ότι $f(\alpha)\neq-\alpha$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(\alpha)<-\alpha$, τότε:

$$f(\alpha)<-\alpha\Leftrightarrow f(f(\alpha))>f(-\alpha)\Leftrightarrow \alpha>-f(\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)>-\alpha, \text{ άτοπο}$$

- Αν $f(\alpha)>-\alpha$, τότε:

$$f(\alpha)>-\alpha\Leftrightarrow f(f(\alpha))<f(-\alpha)\Leftrightarrow \alpha<-f(\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)<-\alpha, \text{ άτοπο}$$

Είναι επομένως $f(\alpha)=-\alpha$.

Αντιστρόφως τώρα, αν $f(\alpha)=-\alpha$, τότε:

$$f(\alpha)=-\alpha\Leftrightarrow -f(\alpha)=\alpha\Leftrightarrow f(-\alpha)=\alpha\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha)=-\alpha\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha)=f(\alpha)$$

Άρα το α είναι ρίζα και της εξίσωσης $f^{-1}(x)=f(x)$.

*** Σε επίπεδο Πανελλαδικών Εξετάσεων η παραπάνω διαδικασία πρέπει να αποτελεί μέρος της λύσης.

Εφαρμογή 20ή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+2$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **β)** Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=1$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=x-1$. **δ)** Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x)\geq x-1$.

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.

Λύση

α) Είναι $D_f=\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=3x^2+1>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1 – 1», οπότε ορίζεται η f^{-1}. Έχουμε:

$$f^{-1}(x)=1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=f(1) \Leftrightarrow x=4$$

γ) Η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε είναι:

$$f^{-1}(x)=x-1 \Leftrightarrow x=f(x-1) \Leftrightarrow x=(x^3-3x^2+3x-1)+(x-1)+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+3)=0 \Leftrightarrow x=0$$

διότι στην εξίσωση $x^2-3x+3=0$ είναι $\Delta=9-12=-3<0$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, θα ισχύει:

$$f^{-1}(x)\ge x-1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)\ge f(x-1) \Leftrightarrow x\ge(x^3-3x^2+3x-1)+(x-1)+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x\le 0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+3)\le 0 \Leftrightarrow x\le 0$$

διότι στο τριώνυμο $\varphi(x)=x^2-3x+3$ είναι $\alpha=1>0$ και $\Delta=-3<0$, οπότε $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.

ε) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με το σχόλιο είναι:

$$f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow x^3+x+2=x \Leftrightarrow x^3=-2 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{2}$$

Εφαρμογή 21η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\dfrac{e}{x}+x$.

α) Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1}.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$.

Λύση

α) Είναι $D_f=(0,+\infty)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $x_1,\ x_2>0$ με $x_1<x_2$. Τότε $\ln x_1<\ln x_2$ και $-\dfrac{e}{x_1}<-\dfrac{e}{x_2}$. Άρα:

$$\ln x_1-\frac{e}{x_1}+x_1<\ln x_2-\frac{e}{x_2}+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Η μονοτονία της f προκύπτει εύκολα και με χρήση παραγώγων, αφού για παράδειγμα είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{e}{x^2}+1>0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και «1 – 1». Ορίζεται λοιπόν η $f^{-1}: f(D_f)\to\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=x$, διότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y=x$. Έτσι:

$$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow \ln x-\frac{e}{x}+x=x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x-\frac{e}{x}=0 \Leftrightarrow g(x)=0$$

όπου $g(x)=\ln x-\frac{e}{x}$, $x>0$. Όμως η g είναι γνησίως αύξουσα (προκύπτει με τον ορισμό ή με παράγωγο) και $g(e)=0$. Άρα $g(x)=0 \Leftrightarrow x=e$.

Επομένως $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow x=e$.

$$f(x)+xf'(x)=(xf(x))',\quad f(x)f'(x)=\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'$$

Γ2. Ανισώσεις

Για την λύση ανισώσεων εφαρμόζουμε σχετικά τις ίδιες ή ανάλογες μεθόδους με αυτές που συναντήσαμε στην επίλυση εξισώσεων.

Η πιο σημαντική διαφορά είναι ότι στις ανισώσεις δεν παίζει κανένα πια ρόλο η ιδιότητα του $1-1$, αλλά η μονοτονία.

Οι σημαντικότερες περιπτώσεις είναι οι εξής:

1. Αν είναι εφικτό, φέρνουμε την ανίσωση στην ισοδύναμη μορφή $f(x)>0$ ή $f(x)<0$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τη μονοτονία της f και μία ρίζα, έστω α, της εξίσωσης $f(x)=0$, με παρατήρηση (ή άλλον τρόπο). Με βάση λοιπόν τον ορισμό της μονοτονίας παίρνουμε:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x>\alpha, & \text{αν η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.} \\ x<\alpha, & \text{αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.} \end{cases}$$

Προφανώς, δεν παραλείπουμε να εξασφαλίσουμε ότι οι τιμές που βρήκαμε ανήκουν και στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Ανάλογα εργαζόμαστε και στις ανισώσεις της μορφής $f(x)<0$, $f(x)\ge 0$, $f(x)\le 0$.

2. Αν η ανίσωση έχει πιο σύνθετη μορφή, προσπαθούμε να την φέρουμε στη μορφή $f(g(x))>f(h(x))$, όπου f είναι κατάλληλη γνησίως μονότονη συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή, όπως και πριν, παίρνουμε:

$$f(g(x))>f(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>h(x), & \text{αν η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.} \\ g(x)<h(x), & \text{αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.} \end{cases}$$

Εντελώς ανάλογα αντιμετωπίζονται οι περιπτώσεις:

$$f(g(x))<f(h(x)),\ f(g(x))\ge f(h(x)),\ f(g(x))\le f(h(x))$$

Εφαρμογή 22η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x-3$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να λυθεί η εξίσωση $x^5+x^3+x=3$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $e^{5x}+e^{3x}+e^x<3$.

Υπόδειξη

Πρόκειται για απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα.

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως μονότονη, αρκεί να βρούμε τα όριά της στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Τα όρια αυτά είναι αντίστοιχα ίσα με $-\infty$ και $+\infty$. Επομένως $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

β) Είναι:

$$x^5+x^3+x=3 \Leftrightarrow x^5+x^3+x-3=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \qquad (1)$$

Όμως $f(1)=1+1+1-3=0$ (2).

Έτσι η (1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$, διότι η f ως γνησίως μονότονη είναι και 1–1.

γ) Με παρατήρηση διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση γράφεται:

$$(e^x)^5+(e^x)^3+e^x-3<0 \Leftrightarrow f(e^x)<0 \Leftrightarrow f(e^x)<f(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x<e^0 \Leftrightarrow x<0$$

Τονίζουμε ότι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, παίρνουμε ότι:

$$f(e^x)<f(1) \Leftrightarrow e^x<1.$$

Δ. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ

1. Ύπαρξη ριζών εξασφαλίζουμε:

α) Με το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση της διαφοράς ή μιας ισοδύναμης μορφής.

β) Με το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών ή το θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής.

γ) Με το θεώρημα Rolle σε αρχική της συνάρτησης διαφοράς.

δ) Με άτοπο και χρήση της πρότασης που αφορά συνεχή συνάρτηση σε διάστημα χωρίς ρίζες (οπότε θα διατηρεί πρόσημο).

ε) Με την εύρεση του συνόλου τιμών κατάλληλης συνάρτησης.

2. Το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης το βρίσκουμε συνήθως με τη μελέτη της συνάρτησης διαφοράς:

- Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας.
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(\Delta)$ της συνάρτησης στο κάθε υποδιάστημα Δ του πεδίου ορισμού που η συνάρτηση είναι συνεχής και διατηρεί μονοτονία.
- Εξετάζουμε αν στο κάθε σύνολο $f(\Delta)$ ανήκει το 0. Αν ναι, τότε έχουμε μοναδική ρίζα στο Δ. Αν όχι, τότε στο Δ δεν έχουμε ρίζα.

3. Αν θέλουμε να αποδείξουμε πιο ειδικά ότι μιας εξίσωση έχει μοναδική ρίζα, τότε αποδεικνύουμε αρχικά την ύπαρξη με τους γνωστούς τρόπους και για την μοναδικότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη μονοτονία, είτε το 1–1, είτε να εργαστούμε με άτοπο (χρήση του θεωρήματος Rolle ή της διατήρησης προσήμου).

Σχόλιο

Την παραπάνω διαδικασία, δηλαδή τη διαδικασία εύρεσης του πλήθους ριζών, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την εφαρμόζουμε:

α) Για την συνάρτηση f' (ή στη συνάρτηση που θα οδηγήσει η εξίσωση $f'(x)=0$), αν θέλουμε να βρούμε το **πλήθος των τοπικών ακροτάτων** μιας συνάρτησης f.

β) Για την f'' (ή στη συνάρτηση που θα οδηγήσει η εξίσωση $f''(x)=0$), αν θέλουμε να βρούμε το **πλήθος των σημείων καμπής** της f.

Τονίζουμε ότι η εύρεση του πλήθους ριζών μιας εξίσωσης, στην έμμεση ή άμεση μορφή, αποτελεί μόνιμο θέμα στις εξετάσεις και για το λόγο αυτό πρέπει να δοθεί η δέουσα βαρύτητα.

4. Στο ερώτημα "**Να αποδείξετε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ κ ρίζες**", εργαζόμαστε συνήθως με άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον $\kappa+1$ ρίζες και με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα των ριζών για τις f, f', f'' κλπ καταλήγουμε σε άτοπο. Με f συμβολίζουμε τη συνάρτηση της διαφοράς ή κάποια άλλη συνάρτηση στην οποία μάς οδηγεί η δοσμένη συνάρτηση με ισοδύναμους μετασχηματισμούς. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με λεπτομέρειες στο βοήθημα.

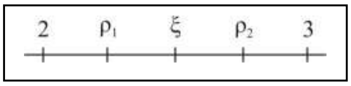
Παράδειγμα 1ο

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+4x+\mu=0$ έχει, για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$, το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (2,3).

Υπόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+4x+\mu\,,\ x\in\mathbb{R}$$



Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(2,3)$. Αν ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$ είναι δύο από τις ρίζες αυτές, τότε έχουμε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$. Αλλά:

- $f'(x)=x^2-5x+4$.
- $f'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi^2-5\xi+4=0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\xi_1=1\\ \text{ή}\\ \xi_2=4\end{array}\right.$.

Επειδή $\xi_1,\ \xi_2\notin(2,3)$, η δοσμένη εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.

Παράδειγμα 2ο

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4\lambda x^3+6x^2-4(\lambda+1)x+\lambda=0$, όπου $\lambda\neq0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Υπόδειξη

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=4\lambda x^3+6x^2-4(\lambda+1)x+\lambda$, τότε διαπιστώνουμε ότι το θεώρημα Bolzano δεν εφαρμόζεται, γιατί δε μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f(0)f(1)<0$.

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση:

$$F(x)=\lambda x^4+2x^3-2(\lambda+1)x^2+\lambda x,$$

η οποία έχει παράγωγο την f.

Η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με $F(0)=0$ και $F(1)=\lambda+2-2\lambda-2+\lambda=0$, δηλαδή $F(0)=F(1)$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=0$$

Άρα το $x=\xi$ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης.

Παράδειγμα 3ο

Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1,1)$.

β) η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

Υπόδειξη

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$$

στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την f(x) στο $[\xi_1, \xi_2]$, όπου $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. Επομένως η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

Παράδειγμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

α) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f.

γ) Να εξετασθεί αν η f έχει ολικά ακρότατα.

δ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

ε) Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $2x^3 + 8 = 3x(x + 4)$.

Υπόδειξη

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Είναι:

- $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12,\ x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Από τον πίνακα προσήμου της f' προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 2]$.

β) Από τη μορφή της μονοτονίας της f προκύπτει ότι:

- Το $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 8 = 15$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
- Το $f(2) = 16 - 12 - 24 + 8 = -12$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ) Επειδή:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 8) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 8) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3) = +\infty$

συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει ούτε ολικό ελάχιστο, ούτε ολικό μέγιστο.

δ) Η f είναι συνεχής στο $A=\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=\mathbb{R}$. Το γεγονός αυτό προκύπτει από το Θ.Ε.Τ. Η μονοτονία της f δεν παίζει στην περίπτωση αυτή κανένα ρόλο και δεν είναι απαραίτητη.

Σχόλιο

Επειδή $f(A)=\mathbb{R}$, προκύπτει ότι η f δεν έχει ολικό ελάχιστο ή ολικό μέγιστο.

ε) Η εξίσωση παίρνει τη μορφή $f(x)=0$.

Έστω $\Delta_1=(-\infty,-1)$, $\Delta_2\in[-1,2)$ και $\Delta_3=[2,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=f(-1)=15$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ_1.

  Άρα $f(\Delta_1)=(-\infty,15)$.

  Επειδή $0\in f(\Delta_1)$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1, συμπεραίνουμε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_1.

- Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=15$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-12$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2. Άρα $f(\Delta_2)=(-12,15]$.

  Επειδή $0\in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_2, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_2.

- Όμοια βρίσκουμε ότι $f(\Delta_3)=[-12,+\infty)$ και έτσι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_3.

  Άρα, τελικά, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

Παράδειγμα 5ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2019}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2018$.

(Εξετάσεις 2012 – Κ – Γ)

Παράδειγμα 6ο

Δύνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε το πλήθος των ακροτάτων της f καθώς και το είδος τους.

Λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x \quad \text{και} \quad f''(x) = 2e^{x-2} - 2 = 2(e^{x-2} - 1).$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα προσήμου της f'', από όπου προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$. Το $M(2, f(2))$, δηλαδή το $M(2, -2)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

β) Για να βρούμε το πλήθος των τοπικών ακροτάτων της f, αρκεί να βρούμε το πλήθος των ριζών της f' στις οποίες η f' αλλάζει πρόσημο (δηλαδή η f αλλάζει μονοτονία).

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ με τιμή $f'(2) = -2$.

Θα βρούμε το πλήθος ριζών της f'. Για τον σκοπό αυτό θα βρούμε όπως είναι λογικό το σύνολο τιμών της f' σε καθένα από το διαστήματα μονοτονίας της. Έστω λοιπόν τα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, 2]$ και $\Delta_2 = [2, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στα Δ_1, Δ_2 και επιπλέον:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[2(e^{x-2} - x) \right] = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-2} = \lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0$.

- $f'(2) = -2$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2e^{x-2} \left[1 - \dfrac{x}{e^{x-2}} \right] \right) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-2} = \lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty$ και:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=\!=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x-2}} = 0$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x}{e^{x-2}} \right) = 1 > 0$.

Επομένως είναι $f'(\Delta_1) = [-2, +\infty)$ και $f'(\Delta_2) = [-2, +\infty)$.

- Παρατηρούμε ότι $0 \in f'(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 2)$: $f'(x_1) = 0$. Το x_1 είναι μοναδικό, διότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1.

- Είναι επίσης $0 \in f'(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει $x_2 \in (2, +\infty)$: $f'(x_2) = 0$. Το x_2 είναι μοναδικό, διότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο Δ_2.

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$ ↘	0	$-$ ↘		$-$ ↗	0	$+$ ↗	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

Το πρόσημο της f' προκύπτει έτσι άμεσα από τη μονοτονία της και συγκεκριμένα:

Για $x < x_1$ είναι $f'(x) > 0$, για $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f'(x) < 0$ και για $x > x_2$ είναι $f'(x) > 0$.

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$. Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Παρατήρηση

Την ίδια ακριβώς πορεία θα χρησιμοποιήσουμε αν θέλουμε να βρούμε το πλήθος των σημείων καμπής της συνάρτησης $g(x) = 6e^{x-2} - x^3$.

Ε. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

E_1. Συνήθεις ανισότητες

Ανισότητες μπορούμε να αποδείξουμε κυρίως με τους παρακάτω τρόπους !

α) Με το θεώρημα μέσης τιμής (Θ.Μ.Τ.) σε κατάλληλη συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα.

β) Με χρήση του ορισμού της μονοτονίας.

γ) Με μελέτη της συνάρτησης διαφοράς και εύρεση ολικού ακροτάτου ή χρήση του ορισμού του ακροτάτου (ειδικά αν έχουμε συγκεκριμένες τιμές).

δ) Με ολοκλήρωση κατά μέλη μιας ανισότητας.

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$, για κάθε $x>0$.

Παράδειγμα 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$, $x>0$ και μια αρχική συνάρτηση F της f με $F(\alpha)=0$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}-f(x)\right]$.

β) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x\le x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $F(x)\ +\ F(3x)\ >2F(2x)$, για κάθε $x>0$.

Παράδειγμα 3ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με:

$$f(0)=0 \ \text{ και } \ f(x)-e^{-f(x)}=x-1 \ \text{ για κάθε } \ x\in\mathbb{R}$$

α) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί ο αριθμός $f''(0)$.

γ) Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και f΄ είναι γνησίως αύξουσες.

δ) Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{x}{2}\le f(x)\le xf'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Πότε ισχύει το «ίσον»;

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε:

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1 \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$f'(x)+e^{-f(x)}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)\left[1+e^{-f(x)}\right]=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}} \qquad (2)$$

β) Το β΄ μέλος της (2) είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε η f' παραγωγίζεται. Επομένως:

$$f''(x)=-\frac{\left(1+e^{-f(x)}\right)'}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}=\frac{f'(x)e^{-f(x)}}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}=\frac{e^{-f(x)}}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^3}$$

Προφανώς $f''(0)=\frac{1}{8}$, αφού $f(0)=0$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα, διότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η μονοτονία όμως της f προκύπτει και ως εξής:

Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\ge f(x_2)$. Αλλά τότε:

$$e^{-f(x_1)}\le e^{-f(x_2)}, \quad -e^{-f(x_1)}\ge -e^{-f(x_2)}$$

και επειδή $f(x_1)\ge f(x_2)$, με πρόσθεση αυτής και της τελευταίας κατά μέλη παίρνουμε:

$$f(x_1)-e^{-f(x_1)}\ge f(x_2)-e^{-f(x_2)} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x_1-1\ge x_2-1 \Leftrightarrow x_1\ge x_2$$

που είναι άτοπο, διότι $x_1<x_2$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η f' είναι επίσης γνησίως αύξουσα, διότι $f''(x)>0$.

Ωστόσο η μονοτονία της f' προκύπτει κατασκευαστικά και με τον ορισμό ως εξής:

Έστω $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε:

- $f(x_1)<f(x_2)$, $e^{-f(x_1)}>e^{-f(x_2)}$.
- $1+e^{-f(x_1)}>1+e^{-f(x_2)}>0$ και $\frac{1}{1+e^{-f(x_1)}}<\frac{1}{1+e^{-f(x_2)}}$.

Επομένως $f'(x_1)<f'(x_2)$, που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Σχόλιο

Είναι πολύ βασικό να μπορούμε να αποδείξουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης με χρήση του ορισμού (ή και με άτοπο), διότι πιθανόν σε κάποιο θέμα η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης να μην είναι δεδομένη.

δ) Για $x=0$ η σχέση $\frac{x}{2} \le f(x) \le xf\,'(x)$ ισχύει ως ισότητα.

- Έστω $x>0$. Από το Θ.Μ.Τ. (προφανώς πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις) για την f στο διάστημα $[0,\, x]$ υπάρχει $\xi \in (0,\, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f\,'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \qquad (3)$$

Όμως $0<\xi<x$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι:

$$f\,'(0) < f\,'(\xi) < f\,'(x) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f\,'(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) < xf\,'(x)$$

διότι $x>0$.

- Έστω $x<0$. Πάλι από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x,\, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f\,'(\xi) = \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \frac{f(x)}{x} \qquad (4)$$

Η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $x<\xi<0$, παίρνουμε:

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(0) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} f'(x) < \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow xf'(x) > f(x) > \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{x}{2} \le f(x) \le xf\,'(x)$, που είναι η ζητούμενη ανισότητα.

Ας σημειώσουμε ότι στην παραπάνω σχέση το «ίσον» ισχύει μόνο αν $x=0$, αφού για $x>0$ ή $x<0$ ισχύει ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$.

Παράδειγμα 4ο

Να αποδειχθεί ότι $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}\ ,x>0$

Λύση

Με βάση την ανισότητα $\ln x \le x-1$, στην οποία το ίσον ισχύει μόνο για $x=1$ παίρνουμε :

$$\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} = \ln\frac{x+1}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le \left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{x}$$

Το ίσον ισχύει μόνο αν $1+\frac{1}{x}=1$, που είναι αδύνατο. Επομένως $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}\ ,x>0$.

Άλλος τρόπος

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την $f(x)=\ln x$ στο διάστημα $[x, x+1]$. Αλλά η f' είναι γνησίως φθίνουσα και έτσι η σχέση $x<\xi<x+1$ δίνει $f'(\xi) < f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g της διαφοράς, η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Αρκεί βέβαια μόνο το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, οπότε θα είναι $g(x)<0$.

ΣΤ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Αν μας δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή, τότε έχουμε τις εξής πολύ σπουδαίες άμεσες ή έμμεσες πληροφορίες:

α) Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε αν έχουμε και μία ρίζα της f', βρίσκουμε αμέσως το πρόσημό της και άρα τη μονοτονία και το ακρότατο της f.

β) Θα ισχύει η ανισότητα $f(x) \geq f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ για κάθε εσωτερικό σημείο α του πεδίου ορισμού της f, λόγω της ιδιότητας της εφαπτομένης. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\alpha$.

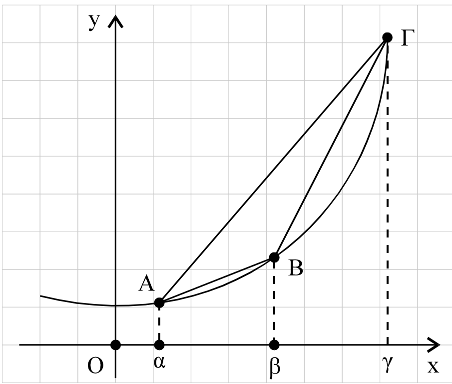
γ) Η εξίσωση $f(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=\alpha$, λόγω της προηγούμενης σχέσης.

δ) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζεται. Η απόδειξη απαιτεί χρήση του Θ.Μ.Τ. στον αριθμητή της παραγώγου για την f στο διάστημα $[\alpha, x]$ (για $x>\alpha$) ή στο διάστημα $[x, \alpha]$ (για $x<\alpha$).

ε) Χωρίζουμε το διάστημα στη μέση, κάνουμε δύο Θ.Μ.Τ. και με τον ορισμό της μονοτονίας της f' παίρνουμε μια ανισότητα (ανισότητα Jensen), που παρουσιάζεται συχνά με φανερή ή κρυφή μορφή.

ζ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη, τότε η γραφική της παράσταση τέμνει μια τυχαία ευθεία το πολύ σε δύο σημεία. Αν λοιπόν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$, όπου η f είναι κυρτή ή κοίλη, και εντοπίσουμε με παρατήρηση δύο ρίζες της εξίσωσης αυτής, τότε αυτές είναι και οι μοναδικές. Η πιο απλή αιτιολόγηση γίνεται με άτοπο, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Rolle, μπορεί να γίνει όμως και με μελέτη της διαφοράς, αφού η f' έχει σίγουρα μοναδική ρίζα ανάμεσα στις ρίζες της f (πάλι από το θεώρημα Rolle).

η) Μια σπουδαία ανισότητα που ισχύει για τις κυρτές συναρτήσεις είναι αυτή που περιγράφεται με τον τίτλο "Θεώρημα των τριών χορδών".



Αν λοιπόν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση και $\alpha<\beta<\gamma$, τότε:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}<\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Η πρόταση αυτή προκύπτει γεωμετρικά από τη σύγκριση των κλίσεων των ευθειών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, αφού:

$$\lambda_{AB}<\lambda_{A\Gamma}<\lambda_{B\Gamma}$$

Ζ. Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

Όρια μπορούμε να συναντήσουμε σε πολλά σημεία μιας άσκησης, είτε άμεσα είτε έμμεσα. Για τον υπολογισμό τους απαιτείται:

– Η καλή γνώση των ιδιοτήτων και των θεωρημάτων.

– Ένα ελάχιστο επίπεδο τεχνικών.

Όρια λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε:

α) Με χρήση της κλασικής θεωρίας (κριτήριο παρεμβολής κ.λπ.)

β) Με τους κανόνες De L'Hospital.

γ) Θέτοντας βοηθητικές συναρτήσεις (κυρίως σε θεωρητικά θέματα).

δ) Αξιοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας ή της παραγώγου σε ένα σημείο.

Όταν υπολογίζουμε ένα όριο:

– Πρώτα εξετάζουμε αν η μεταβλητή τείνει σε αριθμό ή σε άπειρο, διότι στην κάθε περίπτωση συνήθως εφαρμόζουμε διαφορετική τεχνική, ειδικά αν έχουμε τον τύπο της συνάρτησης (αριθμητικό όριο).

– Στη συνέχεια εξετάζουμε τη μορφή, στην οποία οδηγεί το όριο. Οι απροσδιόριστες μορφές απαιτούν συχνά χρήση του κανόνα De L'Hospital. Προσέχουμε ιδιαίτερα ώστε στην διαδοχική εφαρμογή του κανόνα De L'Hospital να μην υπερβούμε τα δεδομένα της άσκησης. Πιθανόν στο τελευταίο βήμα να χρειαστεί να περάσουμε στον ορισμό της παραγώγου με πρόσθεση και αφαίρεση του κατάλληλου αριθμού.

– Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα όρια που οδηγούνε στη μορφή $\frac{\kappa}{0}$ με $\kappa \neq 0$. Σε αυτές τις περιπτώσεις γράφουμε την αντίστοιχη συνάρτηση στη μορφή $\frac{A(x)}{B(x)} = A(x)\cdot\frac{1}{B(x)}$, όπου $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \kappa$, $\lim\limits_{x\to x_0} B(x) = 0$. Για την εύρεση τέτοιων ορίων πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο του κ, πιο σημαντικό όμως είναι να βρούμε το πρόσημο του παρονομαστή $B(x)$ κοντά στο x_0. Για το λόγο αυτό, αν δεν πρόκειται για πολύ απλή ή βασική μορφή, μελετάμε τη συνάρτηση $B(x)$ ή εξετάζουμε μήπως ο παρονομαστής είναι κάποια ήδη γνωστή διαφορά που προκύπτει από τη δομή της άσκησης, όπως π.χ. η διαφορά $f(x) - y_\varepsilon$, όπου $y_\varepsilon = \alpha x + \beta$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη x_0. Σε τέτοιες περιπτώσεις η εύρεση του προσήμου του παρονομαστή είναι άμεση. Αν ο παρονομαστής $B(x)$ δεν διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε εργαζόμαστε με πλευρικά όρια.

Αξίζει ακόμα να αναφέρουμε ότι αν το κ είναι συνάρτηση κάποιας παραμέτρου λ, δηλαδή $\kappa = \kappa(\lambda)$ τότε πρέπει να εξετάσουμε για την παράσταση κ(λ) όλες τις δυνατές περιπτώσεις, αν δηλαδή είναι $\kappa(\lambda) > 0$ ή $\kappa(\lambda) < 0$ ή $\kappa(\lambda) = 0$.

– Οι κυριότερες απροσδιόριστες μορφές είναι οι εξής:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ (+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty),\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

Για τις τελευταίες μορφές είναι σχεδόν πάντα αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)},\ f(x) > 0$$

Η. Η ΔΥΝΑΜΗ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Η μονοτονία είναι μια ιδιότητα των συναρτήσεων που κάθε μαθητής θα συναντήσει με απόλυτη βεβαιότητα στις εξετάσεις. Για το λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τις πιο σημαντικές εφαρμογές σε όλες τις κατηγορίες ασκήσεων, όπου η αξιοποίηση της μονοτονίας παίζει καθοριστικό ρόλο.

Α. Σύγκριση τιμών.

Β. Απόδειξη ανισοτήτων.

Γ. Λύση εξισώσεων.

Δ. Εύρεση συνόλου τιμών.

Ε. Εύρεση προσήμου συνάρτησης ή παράστασης.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και εντοπίσουμε ρίζα της, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική και μπορούμε με τον ορισμό της μονοτονίας να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης.

Έτσι:

– Αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι αρνητική αριστερά και θετική δεξιά της ρίζας.

– Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, τότε είναι θετική αριστερά και αρνητική δεξιά της ρίζας.

Μονοτονία και 1–1

Εφαρμογή στις εξισώσεις	**Εφαρμογή στις ανισώσεις**	
Η συνάρτηση f είναι 1–1. $\Downarrow$	Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. $\Downarrow$	Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. $\Downarrow$
Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(g(x))=f(h(x))$ και γράφουμε: $f(g(x))=f(h(x))\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x)=h(x)$	Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $f(g(x))<f(h(x))$ και γράφουμε: $f(g(x))<f(h(x))\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x)<h(x)$ Η φορά δεν αλλάζει, διότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.	Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $f(g(x))<f(h(x))$ και γράφουμε: $f(g(x))<f(h(x))\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x)>h(x)$ Εδώ η φορά αλλάζει, διότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Χαρακτηριστικά σχόλια

– Από μια ισότητα $A(x)=B(x)$ μπορούμε να πάρουμε πάντα $f(A(x))=f(B(x))$.

– Από μια ισότητα $f(A(x))=f(B(x))$ για να πάρουμε την $A(x)=B(x)$ χρειαζόμαστε το 1–1 της f.

– Από μια ανισότητα $A(x)<B(x)$ για να πάρουμε την $f(A(x))<f(B(x))$ χρειαζόμαστε τη μονοτονία της f και πιο συγκεκριμένα ότι είναι γνησίως αύξουσα.

– Από μια ανισότητα $f(A(x))<f(B(x))$ για να πάρουμε την $A(x)<B(x)$ χρειαζόμαστε τη μονοτονία της f και πιο συγκεκριμένα ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την περίπτωση που η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, με τη μόνη διαφορά ότι η φορά αλλάζει.

Ειδικές μεθοδολογίες

1. Δεν παραγωγίζουμε ανισοτική σχέση, ούτε αντιπαραγωγίζουμε (βάζοντας τη σταθερά) μπορούμε όμως να ολοκληρώσουμε τα δύο μέλη μιας ανισότητας, ακόμα κι αν υπάρχει παράγωγος, αρκεί να έχουμε πρώτα διατάξει τα άκρα ολοκλήρωσης. Αν το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από το πάνω, τότε η φορά αλλάζει. Τα μέλη της ανισότητας πρέπει να είναι συνεχείς συναρτήσεις.
2. Όταν ολοκληρώνουμε μια ανισότητα πρέπει πρώτα να διατάσσουμε τα άκρα, διότι πιθανόν η φορά να πρέπει να αλλάξει (αν το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από το άνω άκρο).
3. Όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής $f(x)=g(x)$ με την f γνησίως μονότονη, τότε ακόμα κι αν εντοπίσουμε ρίζα με παρατήρηση, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι μοναδική. Αυτό ισχύει μόνο αν η g είναι σταθερή, δηλαδή μόνο σε εξισώσεις της μορφής $f(x)=c$.
4. Αν σε κάποιο όριο που εμφανίζονται δύο μεταβλητές εφαρμόζουμε τον κανόνα De L'Hospital, τότε μεταβλητή παραγώγισης είναι αυτή που βρίσκεται κάτω από το σύμβολο $\lim\limits_{h\to\alpha}$ (δηλαδή στην περίπτωσή μας μεταβλητή παραγώγισης είναι το h και όχι ίσως το x που εμφανίζεται επίσης στο όριο).
5. Αν έχουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x(t))$ και θέλουμε την κλίση της f στο τυχαίο σημείο, τότε αυτή είναι ίση με $f'(x(t))$ και όχι ίση με $(f(x(t))'=f'(x(t))\cdot x'(t)$. Αν $\omega(t)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x(t)$, τότε θα ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t))=f'(x(t))$ και όχι $\varepsilon\varphi(\omega(t))=(f(x(t)))'$.
6. Αν έχουμε μια συνάρτηση $E(x)=f(x)$ και το x είναι συνάρτηση του χρόνου t, τότε για να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής του E ως προς t, γράφουμε $E(t)=f(x(t))$ και μετά βρίσκουμε τον ζητούμενο ρυθμό από τον τύπο $E'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$ και όχι παραγωγίζοντας τη σχέση $E(x(t))=f(x(t))$.
7. Όταν σε ένα όριο με $h\to 0$ που περιέχει π.χ. τον όρο $f(x-5h)$ θέλουμε να ελέγξουμε συνέχεια ή παράγωγο, τότε είναι καλύτερα να θέσουμε $-5h=u$ με $u\to 0$ και όχι $x-5h=u$.

8. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) και παραγωγίσιμη, τότε γράφουμε $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ και όχι $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$. Έχει σημασία να γράψουμε και το "ίσον" και όχι γνήσια διάταξη.

9. Όταν έχουμε ένα όριο, όπως πχ το $\lim\limits_{h\to 0} f(x+2h)$, τότε δεν επιτρέπεται πάντα να θέτουμε $h=0$ και να βρίσκουμε ότι τον όριο αυτό είναι ίσο με $f(x)$. Αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν η f είναι συνεχής στο x και μάλιστα για να είναι πλήρης η παρουσίαση, είναι καλύτερα να θέσουμε $2h = u$, οπότε:
$$\lim_{h\to 0} f(x+2h) = \lim_{u\to 0} f(x+u) = f(x)$$

10. Αν έχουμε συναρτησιακή σχέση με δύο μεταβλητές με παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε κρατάμε τη μία μεταβλητή σταθερή και παραγωγίζουμε ως προς την άλλη. Αυτό το κάνουμε ίσως και στις δύο μεταβλητές, αν η σχέση δεν είναι συμμετρική. Στη συνέχεια θέτουμε στη μία μεταβλητή ειδικές τιμές μέχρι να φτάσουμε σε μια πιο απλή σχέση με τη συνάρτηση και την παράγωγό της, η οποία τελικά μας οδηγεί στη ζητούμενη συνάρτηση.

11. Αν θέλουμε την τιμή της παραγώγου σε ένα σημείο, δηλαδή κάποιο $f'(x_0)$, τότε προσπαθούμε να εργαστούμε είτε με τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο αυτό, είτε με τη συνέχεια της παραγώγου παίρνοντας όριο (αν η συνέχεια της παραγώγου δίνεται ή αν προκύπτει από τα δεδομένα) είτε σχηματίζοντας σε κάποιο όριο την παράγωγο στο x_0 (με πρόσθεση – αφαίρεση στον αριθμητή του $f(x_0)$) είτε με χρήση του θεωρήματος Fermat (από ανισότητα σε ισότητα) με ακρότατο το $f(x_0)$.

12. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $A(x) = B(x)$, αρκεί η $h(x) = A(x) - B(x)$, $x \in \Delta$, να είναι σταθερή. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να είναι $h'(x) = 0$ στο εσωτερικό του Δ και η h να είναι συνεχής στο Δ.

13. Όταν μια συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα Δ, δε σημαίνει ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Το μόνο που είναι εξασφαλισμένο είναι ότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο εσωτερικό του Δ.

14. Στην εφαρμογή του κανόνα De L'Hospital φροντίζουμε να μην υπερβούμε τα δεδομένα και κυρίως να μη φτάσουμε π.χ. σε $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f''(x)$ χωρίς να έχουμε τη συνέχεια της f' ή της f'' αντίστοιχα στο x_0.

Παράδειγμα

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 0$. Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 0$.

Υπόδειξη

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{[f(1+5h)-f(1)]-[f(1-h)-f(1)]}{h}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right)=0 \quad (1)$$

Το πρώτο όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}$ με την αντικατάσταση $5h=u$ είναι ίσο με $5f'(1)$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 1. Το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ με την αντικατάσταση $-h=u$ είναι ίσο με $-f'(1)$. Επομένως η σχέση (1) δίνει:

$$5f'(1)+f'(1)=0 \Leftrightarrow 6f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=0$$

Αν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L'Hospital θα διαπιστώσουμε ότι στο τελευταίο βήμα χρειαζόμαστε τη συνέχεια της f', η οποία όμως δε δίνεται. Η πορεία λοιπόν με τον ορισμό είναι μονόδρομος.

Καλή Επιτυχία !!!

ΔΥΟ ΘΕΜΑΤΑ

Για τους μαθητές της Βόρειας Ελλάδας

Μπάμπης Στεργίου – Μάιος 2021

1ο ΘΕΜΑ (Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}, x\neq 1$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε την f ως τα κοίλα.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 5

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 5

Β5. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και $|f|$.

Μονάδες 5

***** Πονηρό ερώτημα (όχι για το Θέμα Β)**

Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων, καμία από τις οποίες δεν είναι η $y=x$.

Υποδείξεις

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ με :

$$f'(x) = (x + 1 + \frac{1}{x-1})' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Λύνουμε την εξίσωση :

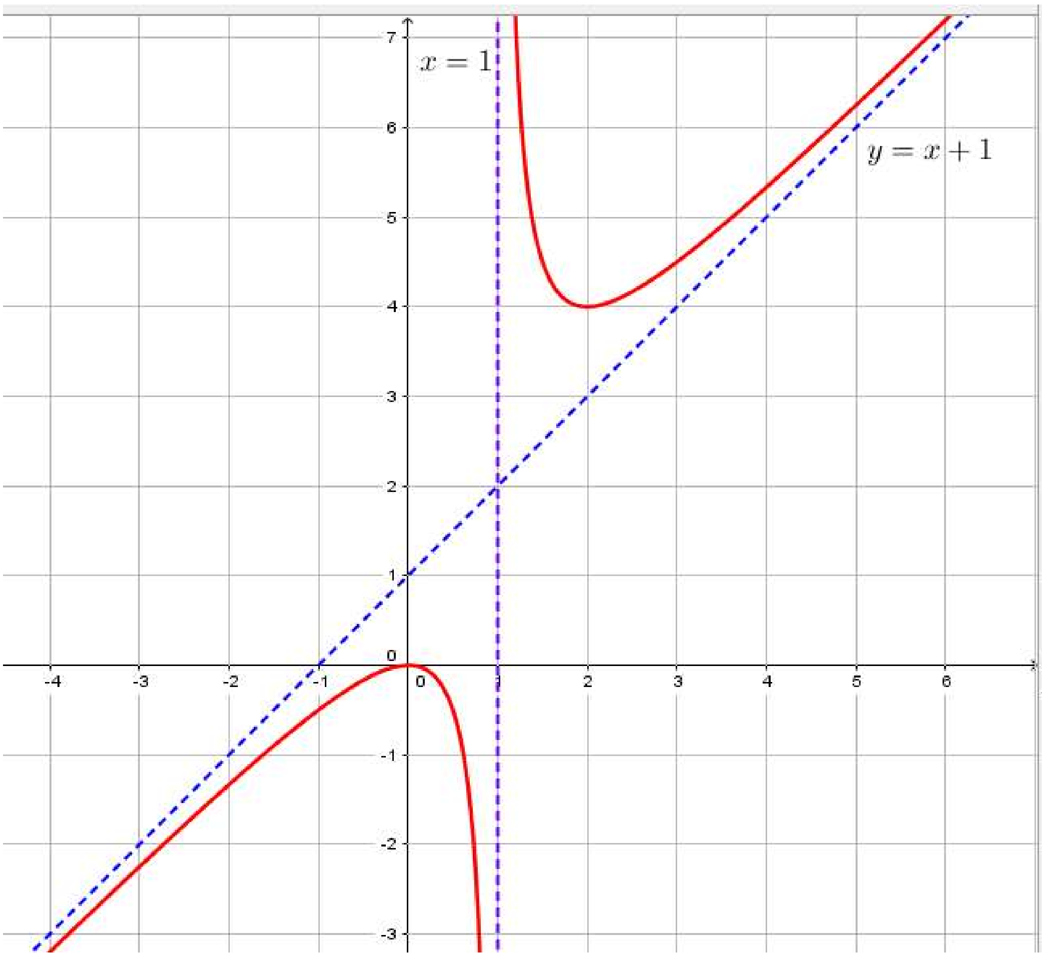
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \,ή\, x = 2)$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x^2 - 2x$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
f '(x)		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	
			TM				TE		

B2. Βρίσκουμε $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$.Σχηματίζουμε τον σχετικό πίνακα:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^3$		$-$	‖	$+$	
f ''(x)		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		Κοίλη	‖	Κυρτή	

B5. Η γραφική παράσταση της f.



Συμπληρωματικό ερώτημα :

Γράφουμε $f(x) = (x-1) + 2 + \dfrac{1}{x-1}, x \neq 1$, οπότε έχουμε σύνθεση των συναρτήσεων

$$g(x) = x - 1 \text{ και } h(x) = 2 + x + \frac{1}{x} .$$

Είναι επομένως $f = h \circ g$

2^{o} ΘΕΜΑ (Γ)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)\\ \alpha\quad, & x=0\end{cases}.$$

(Γ1) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

Μονάδες 5

(Γ2) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}, & x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)\\ \dfrac{1}{2}\quad, & x=0\end{cases}$ και ότι η f' είναι συνεχής.

Μονάδες 5

(Γ3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι η f είναι κοίλη.

(Γ4) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και να αποδείξετε ότι

$$2(x+1)\ln(x+1)^x\leq x^3+2x^2 \text{ για κάθε } x>-1. \text{ Πότε ισχύει η ισότητα;}$$

Μονάδες 4

(Γ5) Να αποδείξετε ότι αν $0<\alpha<\beta$, τότε $f(2\alpha)+f(2\beta)<2f(\alpha+\beta)$

Μονάδες 5

Ευχαριστώ τους συναδέλφους και τις Δ.Ε. των παραρτημάτων της ΕΜΕ στους νομούς Έβρου, Καστοριάς και Φλώρινας για την πρόσκληση ως ομιλητή στην εκδήλωσή τους.

Καλή Επιτυχία στους μαθητές και στο έργο των παραρτημάτων !

Θέματα για την Επανάληψη

Μπάμπης Στεργίου – Απρίλιος 2021

ΝΕΑ ΥΛΗ

ΘΕΜΑ 1ο (Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x = -1$ τοπικό ακρότατο και η κλίση της στο σημείο με τετμημένη 2 είναι ίση με 9.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

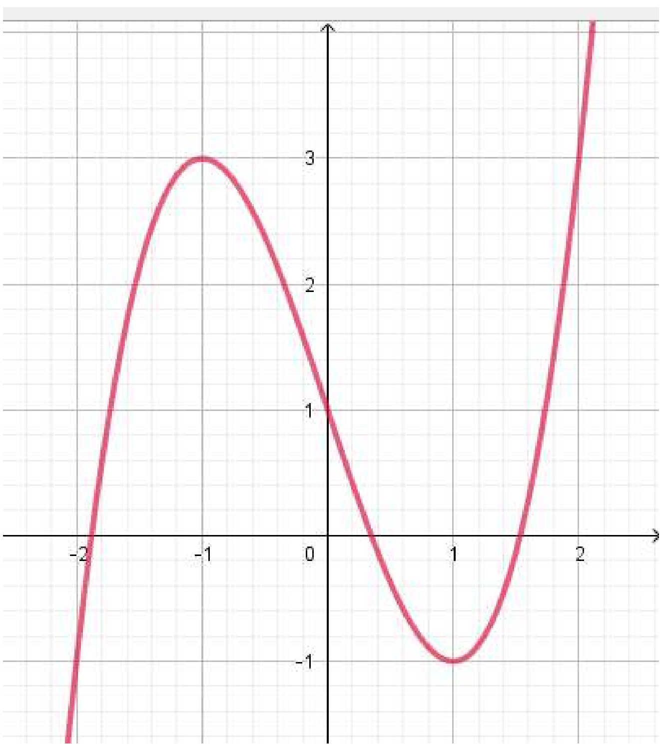
(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ έχει δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

(δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $M(2,3)$.

(ε) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Θέμα 1- Υπόδειξη (στ)



ΘΕΜΑ 2ο (Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x^2-2x|,\ x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια και να αποδείξετε ότι (η f) δεν παραγωγίζεται στα σημεία $x=0$ και $x=2$.

Β2. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Β3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε αν έχει ολικά ακρότατα. Στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

Β4. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $P(1,\frac{5}{4})$ είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποιες είναι οι εξισώσεις αυτών των εφαπτομένων ;

Β5. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

ΘΕΜΑ 3ο(Β)

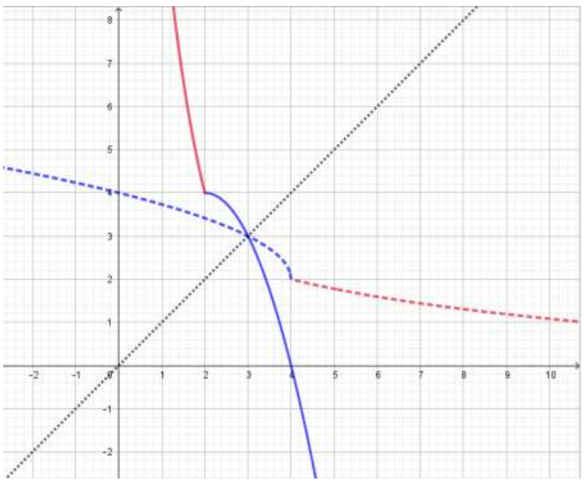
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}4e^{2-x} & ,x<2\\ 4x-x^2 & ,x\geq 2\end{cases}$

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}. .

(δ) Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις των f και f^{-1}. Σε ποια σημεία τέμνονται οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις ;



ΘΕΜΑ 4ο(Δ)

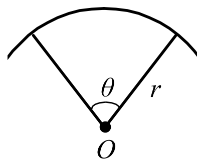
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=10x-x^2$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και τα κοίλα.Να χαράξετε στη συνέχεια τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $A(6,40)$

(γ) Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο της ευθείας $(\varepsilon): y=\dfrac{101}{4}$ μπορούμε να φέρουμε ακριβώς δύο εφαπτομένες προς τη C_f , οι οποίες μάλιστα είναι κάθετες μεταξύ τους.

(δ) Ένα σύρμα μήκους 20m διατίθεται για την περίφραξη ενός ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα *r* του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου.



ΘΕΜΑ 5ο(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3-3x & , x<1 \\ 3x^2-6x+1, & x\geq 1 \end{cases}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ και να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη από αυτές τις ρίζες βρίσκεται στο διάστημα $(1,2)$.

(δ) Να εξετάσετε, αν για την f εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[-1,3]$ και αν ναι, να βρείτε τη θετική τιμή του ξ , το οποίο επαληθεύει το συμπέρασμα του ΘΜΤ στο διάστημα αυτό.

(ε) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 6ο(Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha x^2+2, \alpha\in\mathbb{R}$.Στο σημείο 2 η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^3+1=3x^2$

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 7ο(Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3+\alpha x^2+\beta}{x^2-1}$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-\frac{1}{2}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1\ ,\beta=0$

(β) Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο Α του $\mathbb{R}$, στο οποίο οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες, όπου

$$g(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

(γ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα , τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $(3x^2+7)^2(x^4+2)=3(x^2+2)(x^4+3)^2$

(ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση, καθώς και την C_f .

ΘΕΜΑ 8ο(Γ-Δ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+6(\eta\mu x-x), x\in\mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2=6(1-\dfrac{\eta\mu x}{x})$ είναι αδύνατη.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση : $f(2^x)+f(4^x)=f(5^x)+f(3^x)$

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη ((α),(γ) ,(ε))

(α) Είναι $f''(x)=6(x-\eta\mu x)$, η οποία έχει μοναδική λύση την $x=0$ και έτσι εφαρμόζουμε τη μέθοδο της επιλεγμένης τιμής (πχ $x=\pi$, $x=-\pi$)

(γ) Για $x=0$ επαληθεύεται. Για $x<0$ είναι $2^x>3^x \Leftrightarrow f(2^x)>f(3^x)$, $f(4^x)>f(5^x)$ και προσθέτουμε κατά μέλη. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη για $x<0$.Όμοια για $x>0$. Ερώτημα που αν κάποιος δεν γνωρίζει τη διαδικασία δεν μπορεί εύκολα να απαντηθεί (είναι δύσκολο).

(δ) Είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 9ο(Γ-Δ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=\sqrt{2}$ και $f'(x)f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-1,0)$ δεν άγονται εφαπτομένες προς την C_f .

(δ) Να βρείτε το όριο :

$$A=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+f(-x)-f(2x))$$

(ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f, να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη ((α),(β,γ) , (δ), (ε))

(α) Γράφεται

$$f'(x)f(x)=x+1 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2x+2 \Leftrightarrow$$
$$(f^2(x))'=(x^2+2x)' \Leftrightarrow f^2(x)=x^2+2x+c$$

Όμως $f(0)=\sqrt{2}$, οπότε $c=2$.Άρα $|f(x)|=\sqrt{x^2+2x+2}$

Επιπλέον είναι $f(x)\neq 0$ και έτσι η συνάρτηση ως συνεχής διατηρεί πρόσημο και μάλιστα θετικό αφού $f(0)=\sqrt{2}>0$

(γ) Έστω $M(\alpha,f(\alpha))$ το σημείο επαφής μιας τέτοιας εφαπτομένης. Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης. Αυτή πρέπει να περνάει και από το $N(-1,0)$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

(δ) Γράφουμε :

$$A=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+f(-x)-f(2x))=\lim_{x\to-\infty}[(f(x)+x)+(f(-x)+x)-(f(2x)+2x)]$$

και εργαζόμαστε με συζυγείς παραστάσεις.

(ε) Είναι $f'(x)=\dfrac{x+1}{f(x)}$ και $f''(x)=\left(\dfrac{x+1}{f(x)}\right)'=\dfrac{1}{f^3(x)}$.Η συνάρτηση είναι κυρτή.

ΘΕΜΑ 10^o(Γ)

(Πρόβλημα)

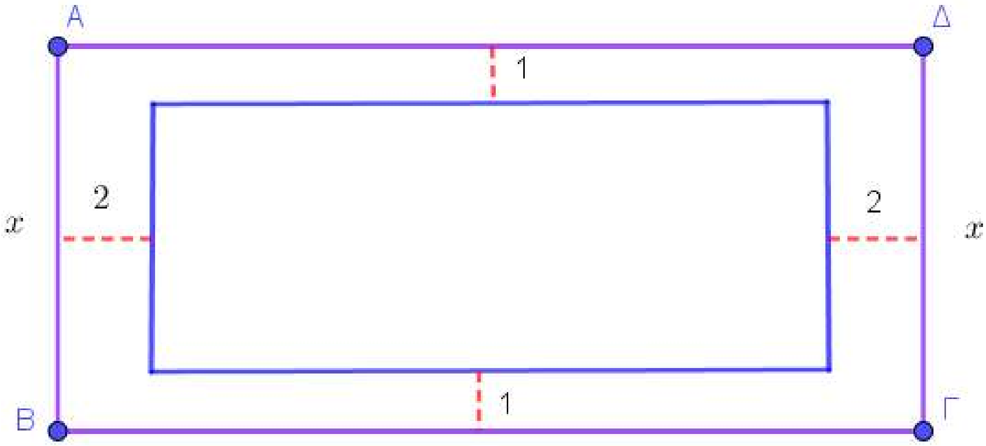
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2+5x}{x-2}$, $x\neq 2$.

Α. Να μελετήσετε την f (i) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (ii) ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Δ. Μια τράπεζα θέλει να τυπώσει πιστωτικές κάρτες σχήματος ορθογωνίου (ΑΒΓΔ). Η εκτυπώσιμη επιφάνεια της κάρτας που στο σχήμα περικλείεται από το εσωτερικό (μπλε στο αρχείο) ορθογώνιο πρέπει να έχει εμβαδόν 18 cm^2.Τα περιθώρια εκτύπωσης αριστερά –δεξιά είναι $2cm$ και πάνω κάτω είναι $1cm$.



(α) Να εκφράσετε τη συνολική επιφάνεια της κάρτας ως συνάρτηση της μικρής πλευράς της.

(β) Ποιες είναι οι διαστάσεις της πιο οικονομικής κάρτας που μπορεί να εκδώσει η τράπεζα ;

Θέμα 10 - Υπόδειξη ((Α),(Β) ,(Γ) , (Δ))

Α. Είναι $f'(x)=\dfrac{2(x^2-4x-5)}{(x-2)^2}$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x^2-4x-5)}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=5$.

Τοπικά ακρότατα είναι τα $f(-1)=1$ Τ.Μ., $f(5)=25$ Τ.Ε.

Β. Σύνολο τιμών είναι το $f(A)=(-\infty,1]\cup[25,+\infty)$.

Γ. Είναι $f''(x)=\dfrac{36}{(x-2)^3}$. Η συνάρτηση αλλάζει κοίλα στο 2(δεξιά του 2 είναι κυρτή).

Δ. (α) Πρέπει

$$(x-2)(y-4)=18 \Leftrightarrow y=\frac{4x+10}{x-2}.$$

Επομένως

$$E(x)=\frac{4x^2+10x}{x-2}=2f(x),\ x>2$$

(β) Με βάση προηγούμενο ερώτημα θα είναι $x=5, y=10$

ΘΕΜΑ 11ο(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)e^{2-\frac{x}{\alpha}}$, $\alpha>0$.

(α) Να μελετήσετε τις f και f' ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να αποδείξετε ότι καθώς το α μεταβάλλεται, το σημείο $M(x_0, f(x_0))$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f κινείται σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο τομής της με τον άξονα των τετμημένων έχει σταθερή κλίση.

(δ) Για α = 1 να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη

(α)

b) Monotonieverhalten und Extrema

$$f_a'(x)=e^{2-\frac{x}{a}}+(x-a)\cdot e^{2-\frac{x}{a}}\cdot\left(-\tfrac{1}{a}\right)$$

$$=e^{2-\frac{x}{a}}\cdot\left(1-\frac{x-a}{a}\right)=\frac{2a-x}{a}\cdot e^{2-\frac{x}{a}}$$

$f_a'(x)=0 \Leftrightarrow x=2a$; $f_a(2a)=(2a-a)\cdot e^{2-\frac{2a}{a}}=a$

	$x<2a$	$x=2a$	$x>2a$
$f_a'(x)$	+	0	–
G_a	streng monoton steigend	HP (2a | a)	streng monoton fallend

c) Krümmungsverhalten und Wendepunkte

$f_a''(x) = -\frac{1}{a}\cdot e^{2-\frac{x}{a}} + \frac{2a-x}{a}\cdot e^{2-\frac{x}{a}}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)$

$= \frac{e^{2-\frac{x}{a}}}{a}\cdot\left(-1+\frac{x-2a}{a}\right) = \frac{x-3a}{a^2}\cdot e^{2-\frac{x}{a}}$

$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3a;\ f_a(3a)$

$= (3a-a)\cdot e^{2-\frac{3a}{a}} = 2a\cdot e^{-1} = \frac{2a}{e}$

	$x < 3a$	$x = 3a$	$x > 3a$
$f_a''(x)$	–	0	+
G_a	rechtsgekrümmt	Wendepunkt $\left(3a \middle\vert \frac{2a}{e}\right)$	linksgekrümmt

(β)

2. a) Bestimme die Gleichung der Ortslinie der Extrempunkte der G_a!

$x = 2a \wedge y = a \Rightarrow y = \frac{x}{2}$ (mit $D = \mathbb{R}^+$)

(γ)

2. b) Zeige, dass alle G_a die x-Achse unter dem gleichen Winkel schneiden und berechne diesen!

$f_a'(a) = \frac{2a-a}{a}\cdot e^{2-\frac{a}{a}} = e$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$,

ΘΕΜΑ 12ο(Γ-Δ)

Πρόβλημα με βάση το σχολικό

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{ημx} + \frac{1}{συνx}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

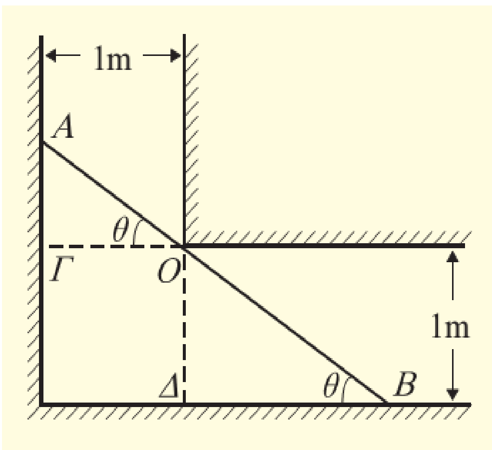
(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βγείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης. Στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

(δ) Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα.

(Δείτε το Σχήμα).

Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία.



Υπόδειξη

(α) Είναι

$$f'(x)=\frac{-\text{συν}x}{\text{ημ}^2x}+\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{ημ}^3x-\text{συν}^3x}{\text{ημ}^2x\cdot\text{συν}^3x}$$

Είναι επίσης :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \text{ημ}^3x-\text{συν}^3x=0\Leftrightarrow$$

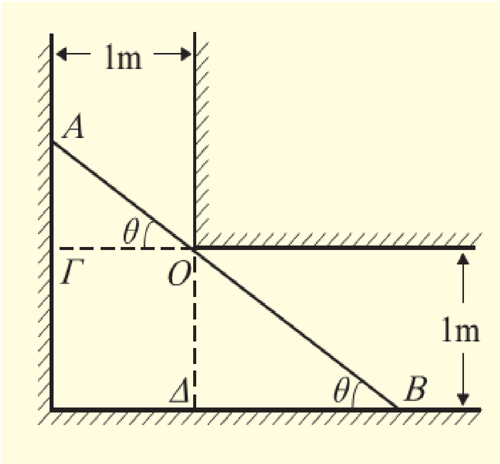
$$\Leftrightarrow \text{ημ}x=\text{συν}x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για

$x=\frac{\pi}{4}$ με τιμή $f(\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$ min	$\nearrow$	

(γ) Η συνάρτηση είναι κυρτή. Ασύμπτωτες είναι οι ευθείες στα άκρα του πεδίου ορισμού.



(δ) Θα εκφράσουμε το μήκος ΑΒ ως συνάρτηση της γωνίας $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Αλλά από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ παίρνουμε ότι :

$$OA=\frac{O\Gamma}{\text{συν}\theta}=\frac{1}{\text{συν}\theta}\quad\text{και}\quad OB=\frac{O\Delta}{\text{ημ}\theta}=\frac{1}{\text{ημ}\theta}$$

Επομένως :

$$AB=OA+OB=\frac{1}{\text{συν}\theta}+\frac{1}{\text{ημ}\theta}\ ,\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

Είναι λοιπόν

$$AB=f(\theta)=\frac{1}{\text{συν}\theta}+\frac{1}{\text{ημ}\theta}\ ,\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

Το μικρότερο άνοιγμα στο διάδρομο είναι λοιπόν το $AB=2\sqrt{2}$ και έτσι η μεγαλύτερη σκάλα που μπορεί να περάσει έχει μήκος $\ell=2\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 13^{o}(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+x+\sqrt{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(-x)}=1, x\in\mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-\eta\mu x = x+\sqrt{1+x^2}$.

(δ) Να βρείτε, αν ορίζεται, την αντίστροφη της f.

(ε) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(στ) Να αποδείξετε ότι $f(3)+f(11)>2f(7)$.

Υπόδειξη

(α) Είναι $f(x)=1+x+\sqrt{x^2+1}>1+x+\sqrt{x^2}=1+x+|x|\geq 1+x+(-x)=1>0$, διότι $|x|\geq -x$.

Επίσης είναι :

$$f(x)f(-x)=((1+\sqrt{x^2+1})+x)((1+\sqrt{x^2+1})-x)=$$
$$[1+(x^2+1)+2\sqrt{x^2+1}]-x^2=2(1+\sqrt{x^2+1})$$

και

$$f(x)+f(-x)=(1+\sqrt{x^2+1}+x)+(1+\sqrt{x^2+1}-x)=2(1+\sqrt{x^2+1}).$$

Επομένως :

$$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(-x)}=\frac{f(x)+f(-x)}{f(x)f(-x)}=\frac{2(1+\sqrt{x^2+1})}{2(1+\sqrt{x^2+1})}=1, x\in\mathbb{R}.$$

(β) Είναι $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}>0$,

αφού $x+\sqrt{x^2+1}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq x+(-x)=0$.Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι ακόμα :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\sqrt{x^2+1}\right)=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=1.$$

Επομένως, αφού η f είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathbb{R})=(1,+\infty)$.

(γ) Η εξίσωση γράφεται στη μορφή :

$$1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-\eta\mu x=1+x+\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f(-\eta\mu x)=f(x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x=-\eta\mu x\Leftrightarrow x=0$$

αφού η ισότητα $|\eta\mu x|=|x|$ ισχύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ 14ο (Β)

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη στο διάστημα $(-\infty,0]$, γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0,+\infty)$, $f(0)=3,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5$.

Α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων :

(α) $f(x)=-2020$ **(β)** $f(x)=-2$

(γ) $f(x)=2$ **(δ)** $f(x)=3$ **(ε)** $f(x)=2019$

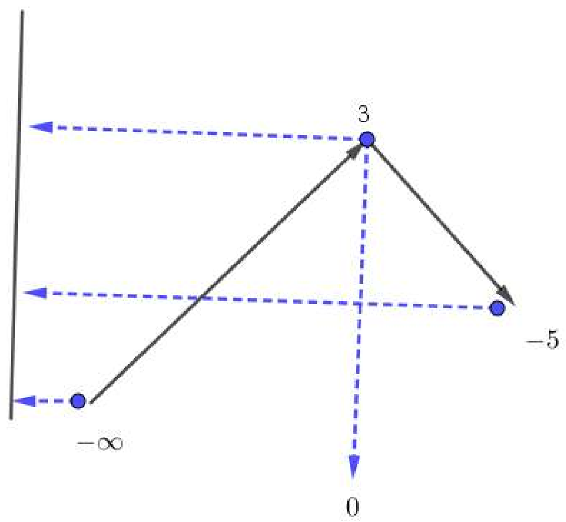
Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\gamma\in(-\infty,0)$, ώστε $f(\gamma)=-1940$

Δ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει ακρότατα .

Ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3+\eta\mu^4 x+\eta\mu^2 x$

Υπόδειξη

Μπορεί να βοηθήσει το επόμενο σχήμα:



ΘΕΜΑ 15ο(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+1, x\le 1 \\ 2e^{x-1}, x>1 \end{cases}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής , γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να την βρείτε. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

(γ) Να βρείτε τα όρια :

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-3^x+2}{f(x+1)+3^x+1},\ B=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+2)-3^x+2}{f(x+2)+3^x+1},\Gamma=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)-f(x+1)+2}{f(2x)+f(x+1)+1}$$

(δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=4-x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(ε) Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ την εξίσωση $f(x)+f(x^3)=f(x^2)+f(x^4)$.

ΘΕΜΑ 16ο(Γ-Δ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}-\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-3$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-2$.

(β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το πρόσημό της.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=2021$.

(δ) Να βρείτε τα όρια $\lambda=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\mu=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)$ καθώς και τις ασύμπτωτες της C_f.

(ε) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x αυξάνει.

(στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(4x)=f(5x)+f(3x)$

(ζ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ΘΕΜΑ 17ο (Γ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f'(x)=2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-x^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της f.

Έστω ότι $f(x)=\ln(x^2+1)$.

(β) Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων G,H, καμία από τις οποίες δεν είναι η συνάρτηση $I(x)=x\,,x\in\mathbb{R}$.

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε την C_f.

(δ) Να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-f(x))$.

(ε) Να αποδείξετε ότι στο σύνολο των σημείων $N=\{M(x,f(x))\,|\,0\le x\le 2\}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M_0(x_0,f(x_0))$, του οποίου η απόσταση από το σημείο $P(1,0)$ είναι ελάχιστη.

ΘΕΜΑ 18ο (Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\mu-1)x^3+\lambda x^2}{x-1}$, με $x\neq 1$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Για την συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

(α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=\mu=1$.

(β) Να μελετήσετε τις f και f' ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(δ) Να αποδείξετε ότι από το σημείο $P(1,2)$ δεν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f.

(ε) Να λύσετε την εξίσωση $(e^x+2)^2(x^2+2)=(e^x+1)(x^2+3)^2$

(στ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη

(β) Είναι $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

(ε) Παίρνει τη μορφή $f(e^x+2)=f(x^2+3)$.Στο διάστημα $[2,+\infty)$ η f είναι γνησίως μονότονη.

ΘΕΜΑ 19ο (Δ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(-1)=f(1)=1$ και $xf'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$,με $x\neq 0$ είναι σταθερή και $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τη θέση του σημείου P της C_f , για την οποία η απόσταση PN είναι η ελάχιστη, όπου $N(0,\dfrac{9}{2})$.

(γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $K(-1,-8)$.

Δίνεται ένα μεταβλητό σημείο $M(x,f(x))$ της γραφικής παράστασης της f με θετική τετμημένη. Η προβολή T του M στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον άξονα των τεταγμένων με ρυθμό $2\,m/\min$.

(δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής τη στιγμή t_0 που η τετμημένη του M είναι ίση με $\sqrt{3}\,m$:

(i) Της τεταγμένης του σημείου M.

(ii) Της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων.

(iii) Της γωνίας $\theta=\widehat{MOT}$ και της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένης της C_f στο M με τον άξονα $x'x$.

(ε) Δίνεται το σημείο $N(-4,8)$.Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MON , τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι ίση με 2 .

ΘΕΜΑ 20ο (Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2(x+\dfrac{100}{x}), x\neq 0$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f, να την μελετήσετε ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-6x+80$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(δ) Ένα τυπογραφείο θέλει να τυπώσει ορθογώνιες κάρτες με επιφάνεια $100\,cm^2$, θέλει όμως οι κάρτες να έχουν την ελάχιστη περίμετρο. Ποιες πρέπει να οι διαστάσεις της κάρτας για να το πετύχει αυτό και πόση θα είναι η ελάχιστη περίμετρος ;

ΘΕΜΑ 21^{o} (Β)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+2}$ και $g(x)=\frac{x+4}{3}$.

Α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .

Β. Να ορίσετε την αντίστροφη της f καθώς και την σύνθεση $f\circ g$.

Γ. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα τη γραφική παράσταση των $C_f, C_{f^{-1}}$.

Δ. Δίνεται το σημείο $A(\frac{3}{2},0)$ και το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f . Να εκφράσετε το μήκος του τμήματος AM ως συνάρτηση του x και να βρείτε την τιμή του x , για την οποία η απόσταση ΑΜ είναι η ελάχιστη.

Ε. Δίνεται το σημείο $N(-\alpha-4,0)$.Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $M(\alpha,f(\alpha))$ και $N(-\alpha-4,0)$ εφάπτεται στη C_f.

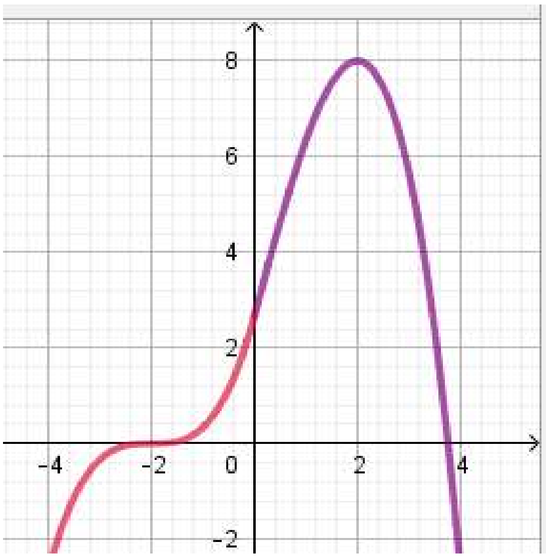
Υπόδειξη

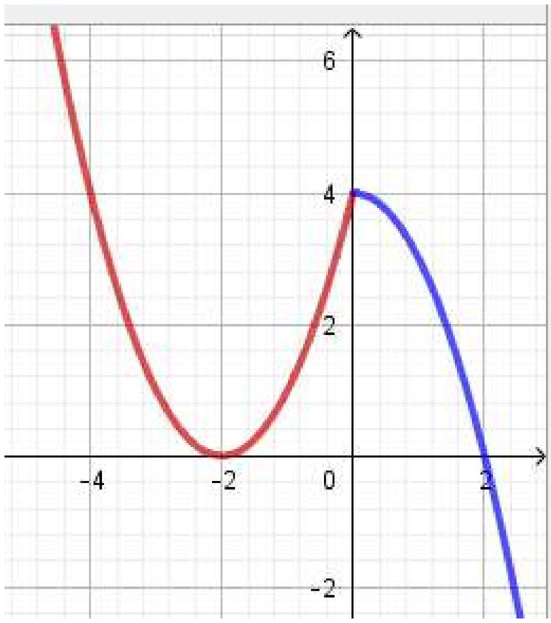
(ε) Είναι $\lambda_{MN}=\frac{\sqrt{\alpha+2}}{2\alpha+4}=\frac{\sqrt{\alpha+2}}{2(\alpha+2)}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha+2}}=f'(\alpha)$.Επομένως η ευθεία ΜΝ εφάπτεται με την C_f.

ΘΕΜΑ 22ο (Γ)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της παραγώγου της, όχι αναγκαστικά με αυτή τη σειρά.

Θεωρείστε ότι $f(0)=\frac{8}{3}$





(α) Να αιτιολογήσετε με δύο τουλάχιστον επιχειρήματα ότι το πρώτο διάγραμμα αντιστοιχεί στη συνάρτηση f.

(β) (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο -2 τοπικό ελάχιστο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 0..

(γ) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

(δ) Να βρείτε με αιτιολόγηση τα κρίσιμα σημεία της f και το όριο:

$$K=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)-2f(x)+\eta\mu x}{f^2(x)+3f(x)+\sigma\upsilon\nu x+4}\ .$$

(ε) Να υπολογίσετε τα όρια $A=\lim\limits_{x\to-2}\frac{f^3(x)}{x+2}$ και $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)-f^2(0)}{x}$

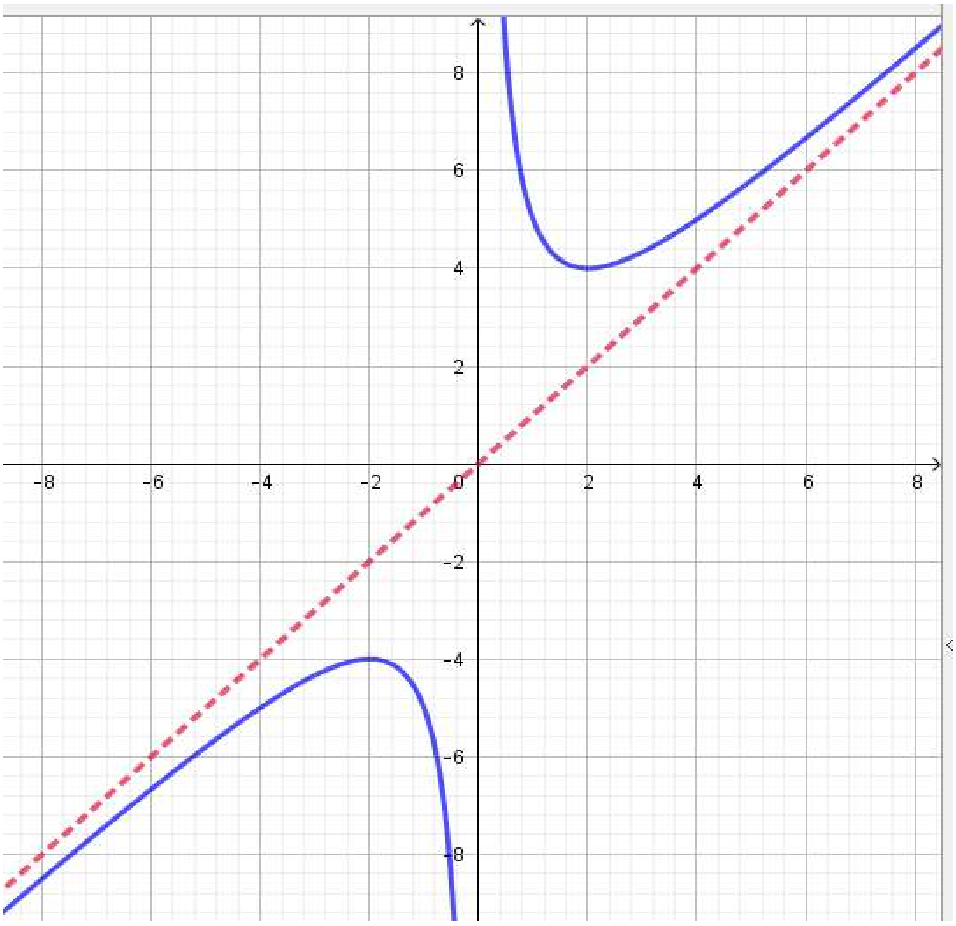
(στ) Θα μπορούσαν οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις να αφορούν τη συνάρτηση;

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+2)^3 & ,\ x<0\\ \frac{1}{3}(12x-x^3+8), & x\ge 0\end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή της .

ΘΕΜΑ 23^{o} (B)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$.



Με βάση αυτό το σχήμα :

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

B2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και το σύνολο τιμών της f.

B3. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο της f στο 0 και να αιτιολογήσετε την απάντησή της.

B4. Να υπολογίσετε τα όρια : $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), B = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f(x)}, \Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^2(x)+2f(x)+3}{f^2(x)-3f(x)+4}$

B5. Μια συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D=[-2,0)\cup(0,2]$ και είναι $g=f$ στο σύνολο D. Να αποδείξετε ότι η g είναι $1-1$ και στο διάγραμμα του σχήματος, που θα μεταφέρετε στην κόλλα της, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g^{-1}.Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της g^{-1};

ΘΕΜΑ 24ο (Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$,$\lambda\in\mathbb{R}$.Για την f γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\in\mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε την τιμή του λ και την τιμή του $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $\lambda=2$.

(β) Να μελετήσετε την f ως της τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1} της f.

(δ) Να υπολογίσετε τα όρια

$$A=\lim_{x\to -1}f(x),\quad B=\lim_{x\to +\infty}f(e^x-3^x)\ ,\quad \Gamma=\lim_{x\to 0}f(x\eta\mu\frac{2}{x}),\quad \Delta=\lim_{x\to -\infty}f(x^2\eta\mu\frac{3}{x})$$

(ε) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 25ο (Γ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2|x|}$ και $g(x)=1-\dfrac{2}{|x|}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f=g$ και να γράψετε την g στη μορφή $g=g_3\circ g_2\circ g_1$, έτσι ώστε :

$$g_3(2)=-1, g_2(1)=2,\ g_1(-1)=1$$

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ g$

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(δ) Αν η εφαπτομένη της C_g στο τυχαίο σημείο της $M(\alpha,f(\alpha))$ με $\alpha>0$ τέμνει τις ευθείες $y=1, x=0$ στα σημεία Α και Β, να αποδείξετε ότι $MA=MB$ και ότι το τρίγωνο NAB με $N(0,1)$ έχει σταθερό εμβαδόν , αν το Μ μεταβάλλεται.

Υπόδειξη

(α) Είναι $g_3(x)=1-x, g_2(x)=\dfrac{2}{x}$, $g_1(x)=|x|$.

(γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$y-1+\frac{2}{\alpha}=\frac{2}{\alpha^2}(x-\alpha)$$

Από αυτή με $y=1$, $x=0$ βρίσκουμε αντίστοιχα $A(2\alpha,1)$ και $B(0,1-\frac{4}{\alpha})$.Το τμήμα ΑΒ έχει όμως μέσο το Μ(Με τον τύπο από τη Β΄ Λυκείου).

ΘΕΜΑ 26^o (Β)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{8}{x}$ και $g(x)=x^2-6x+12$.

(α) Να αποδείξετε ότι το $A(2,4)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_f και C_g.

(β) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

(γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g.

(δ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h=g-f$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(ε) Η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της Μ τέμνει τους άξονες στα σημεία Ν και Ρ.Να αποδείξετε ότι ΜΝ= ΜΡ και ότι το τρίγωνο ΟΝΡ έχει σταθερό εμβαδόν.

ΘΕΜΑ 27^o (Γ)

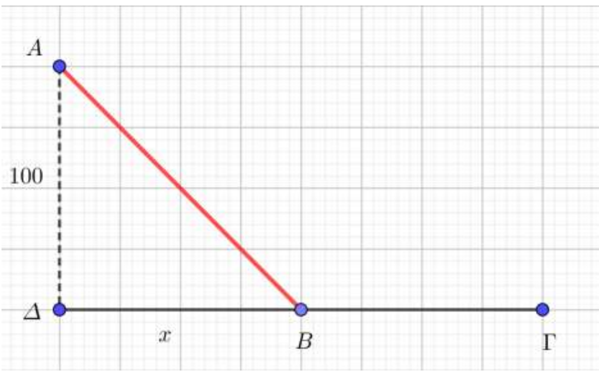
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5\sqrt{100^2+x^2}+3(300-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f, να εξετάσετε αν η f έχει ολικά ακρότατα και αν ναι, να βρεθούνε.

(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $P(75,1300)$, $N(240,1480)$ και να υπολογίσετε το όριο $A=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$.

(δ) Μια εταιρεία θέλει να περάσει ένα καλώδιο από τη διαδρομή ΑΒΓ. Το σημείο Α απέχει από τον ευθύγραμμο δρόμο ΓΒΔ $100\,m$.Το μήκος της διαδρομής ΓΔ είναι $300\,m$. Το κόστος εγκατάστασης του καλωδίου που περνάει μέσα από άγονη περιοχή, όπως το ΑΒ, είναι 5 εκατοντάδες ευρώ ανά μέτρο, ενώ το κόστος εγκατάστασης του καλωδίου κατά μήκος του δρόμου ΓΔ είναι 3 εκατοντάδες ανά μέτρο.



Σε ποιο σημείο της διαδρομής ΓΔ πρέπει να βρεθεί το σημείο Β, ώστε το συνολικό κόστος εγκατάστασης του καλωδίου να είναι το ελάχιστο και πόσο είναι αυτό το κόστος;

Υπόδειξη

(α) Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 75$.

(γ) Είναι $f(75) = 5\sqrt{4^2 \cdot 25^2 + 3^2 \cdot 25^2} + 3(300 - 75) = 125\sqrt{16+9} + 675 = 625 + 675 = 1300$

(δ)Το κόστος δίνεται από τη συνάρτηση f και το ελάχιστο είναι $f(75) = 1300$ εκατοντάδες ευρώ.

ΘΕΜΑ 28ο (Γ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+\alpha}{x} \cdot \ln x$ και $g(x) = \ln x + x - 1$, με $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Το $f(1)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

(α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης g.

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(ε) Αφού αποδείξετε ότι ορίζεται η g^{-1}, να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} και να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}(x) > x$.

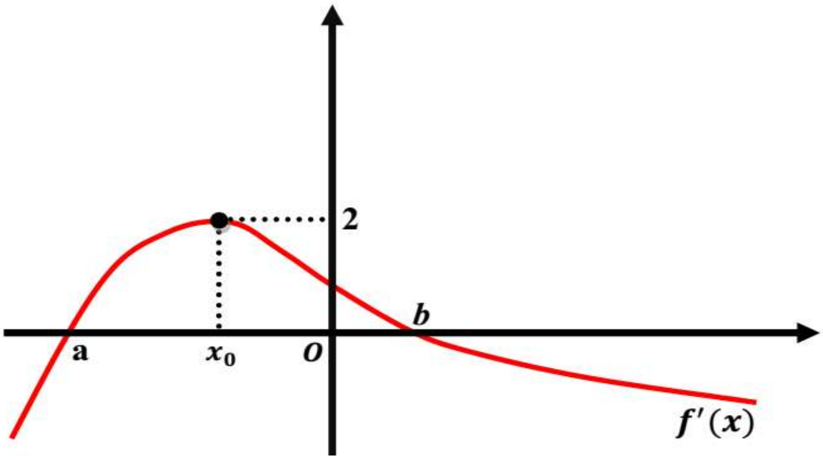
(στ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $M(\alpha, f(\alpha))$ και ότι ισχύει $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{2\alpha}$.

Υπόδειξη

(στ) Είναι $f''(x) = \frac{3 - x - 2\ln x}{x^3}$.Η συνάρτηση του αριθμητή είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επομένως η f'' έχει μοναδική ρίζα, στην οποία αλλάζει πρόσημο.

ΘΕΜΑ 29° (Γ)

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η παράγωγός της έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Δίνεται ακόμα ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $f(a)<0$, $f''(a)=3$, $f(x_0)=\frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, να βρείτε το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 και ας είναι $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

(β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

(γ) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$A=\lim_{x\to b}\frac{\ln(x-b)}{(f'(x))^3} \quad \text{και} \quad B=\lim_{x\to a}\frac{\eta\mu(f'(x))}{x-a}$$

(δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x+1)\le 2+f(x)$

(ε) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)+f(x)=f^2(x)+\frac{9}{4}$.

(Το θέμα οφείλω στο συνάδελφο Σωτήρη Σκοτίδα. Τον ευχαριστώ).

Υπόδειξη

(γ) Είναι :

(i) $A=\lim\limits_{x\to b}\frac{\ln(x-b)}{(f'(x))^3}=\lim\limits_{x\to b}(\ln(x-b))\frac{1}{(f'(x))^3}=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

διότι η παράγωγος είναι αρνητική δεξιά του a.

(ii) $B=\lim\limits_{x\to a}\frac{\eta\mu(f'(x))}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(\frac{\eta\mu(f'(x))}{f'(x)}\cdot\frac{f'(x)}{x-a})=\lim\limits_{x\to a}(\frac{\eta\mu(f'(x))}{f'(x)}\lim\limits_{x\to a}\cdot\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=1\cdot f''(a)$

(δ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στο διάστημα $[x, x+1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f(x+1)-f(x)$$

Όμως $f'(\xi) \le 2$, διότι από το γράφημα παίρνουμε ότι $f'(x) \le 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ε) Τη γράφουμε στην ισοδύναμη μορφή : $f'(x) = f^2(x) - f(x) + \frac{9}{4}$.

Το x_0 είναι ρίζα. Αλλά $f'(x_0) \le 2$ και $f^2(x_0) - f(x_o) + \frac{9}{4} \ge 2$, διότι

$g(x) = x^2 - x + \frac{9}{4} \ge g(\frac{1}{2}) = 2$.Προφανώς μπορούμε να γράψουμε :

$$f^2(x_0) - f(x_o) + \frac{9}{4} = (f(x_o) - \frac{1}{2})^2 + 2 \ge 2$$

ΘΕΜΑ 30ο (Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, x \ge 0 \\ -x^2, x < 0 \end{cases}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, όχι όμως και παραγωγίσιμη στο 0.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

(δ) Δίνονται τα μεταβλητά σημεία $M(x, f(x))$ και $N(f(x), x)$, με $x \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε d τη συνάρτηση που εκφράσει την απόσταση ΜΝ των σημείων Μ και Ν.

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d έχει ολικό ελάχιστο και δύο θέσεις τοπικού μεγίστου. Πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά το παραπάνω συμπέρασμα ;

(ii) Να αποδείξετε ότι αν σε κάποια θέση η d παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, τότε οι εφαπτομένες στις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στα αντίστοιχα σημεία τους Μ, Ν είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 31ο (Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1 + \frac{2}{x})e^{-x}$, με $x \ne 0$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1+\frac{2}{x}=\lambda e^{x}$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες .

ΘΕΜΑ 32$^{\text{ο}}$ (Β)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ και $g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$.

(α) Να εξετάσετε αν $f=g$.Αν όχι, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο Γ του $\mathbb{R}$, στο οποίο είναι $f=g$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να βρείτε την f^{-1}.

(δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=-2x-1$ εφάπτεται με τη C_f .

(ε) Η εφαπτομένη (ε) της C_f σε ένα μεταβλητό της σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ τέμνει τις ευθείες με εξισώσεις $y=1, x=1$ στα σημεία Α και Β. Να αποδείξετε ότι $MA=MB$ και ότι το εμβαδόν του τριγώνου NAB , όπου $N(1,1)$ είναι σταθερό.

ΘΕΜΑ 33$^{\text{ο}}$ (Γ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=-2$,$f(2)=4$, $f(x)\neq 1$ και

$$f'(x)=-\frac{1}{3}(f(x)-1)^2 \text{ για κάθε } x\neq 1.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)-1}-\frac{x}{3}$,με $x\neq 1$ είναι σταθερή.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, $x\neq 1$.

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

(ε) Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ h$, όπου $h(x)=x-\ln x, x>0$.

(ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες και χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ΘΕΜΑ 34ο (Δ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4}{1+e^{2-x}}$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτες της C_f.

(γ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε την f^{-1}.

Η συνάρτηση $N(t)$ που δίνει σε κάποια περιοχή τον αριθμών των ατόμων (σε χιλιάδες μονάδες) που έχουν προσβληθεί από κάποιον ιό t μήνες μετά το ξέσπασμα μιας πανδημίας έχει εκτιμηθεί από τους ειδικούς επιδημιολόγους ότι υπακούει στη σχέση $N'(t)=\dfrac{1}{4}N(t)(4-N(t))$, με $N(2)=2$. Επιπλέον ισχύει ότι $0<N(t)<4$ για κάθε $t>0$.

(δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $K(t)=\ln\dfrac{N(t)}{4-N(t)}-t+2$ με $t>0$ είναι σταθερή.

(ε) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $N(t)$ και αφού διαπιστώσετε ότι $N=f$ στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$, να βρείτε τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός εξάπλωσης της πανδημίας είναι μέγιστος. Αν δεν ληφθούν μέτρα, πόσα περίπου άτομα θα μολυνθούν σε βάθος χρόνου ;

Υπόδειξη

(α) Είναι $f'(x)=4\cdot\dfrac{e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2}$ και $f''(x)=4e^{2-x}\cdot\dfrac{e^{2-x}-1}{(1+e^{2-x})^3}$

ΘΕΜΑ 35ο (Γ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\ln x+\alpha x$,$h(x)=e^{1-x}-\beta x^2$ και $f=g-h$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Στο σημείο με τετμημένη 1 οι C_g ,C_h έχουν κοινή εφαπτομένη.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$, $\beta=-3$.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f και στη συνέχεια να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(γ) Να βρείτε το πρόσημο , το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(δ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η g^{-1} , να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} και να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}(x)>\dfrac{x}{4}$.

(ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h έχει ένα ακριβώς τοπικό ακρότατο, που είναι και ολικό, στη θέση x_0, με $x_0 \in (0,1)$.

(στ) Να αποδείξετε ότι $f(2)+f(10)<2f(6)$.

ΘΕΜΑ 36ο (Β)

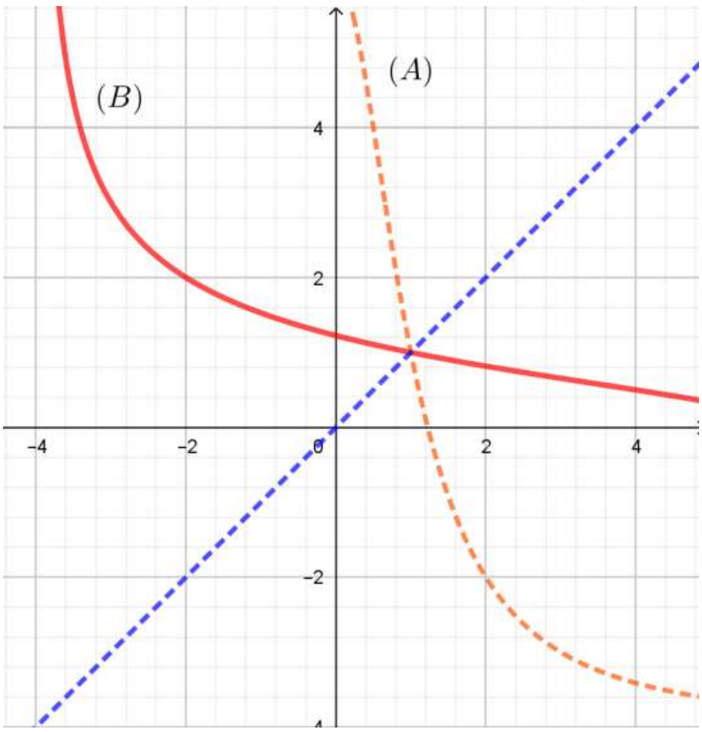
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\dfrac{6-x}{x+4}}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού , τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της f .Επίσης, να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων , από τις οποίες καμία δεν είναι η συνάρτηση $y=x$.

(β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} όπως επίσης και την τιμή $f^{-1}(3)$.

(γ) Να βρείτε σε ποια διαστήματα η $C_{f^{-1}}$ είναι πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y=x$.

(δ) Τα παρακάτω διαγράμματα δύο συναρτήσεων είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$.Στο ένα από αυτά απεικονίζεται η γραφική παράσταση της f^{-1}.Να βρείτε με αιτιολόγηση ποιο από τα διαγράμματα (A), (B) αντιστοιχεί στην f^{-1}. Σε ποια σημεία τέμνουν οι γραφικές αυτές παραστάσεις την ευθεία $y=x$ και τους άξονες;



(Την ιδέα για το θέμα οφείλω στο συνάδελφο Φάνη Μαργαρώνη. Τον ευχαριστώ.)

Υπόδειξη

(α) $D_f = (-4, 6], f(D_f) = (-4, 6]$.Αν γράψουμε $f(x) = \sqrt{-1 + \frac{10}{x+4}}$, η μονοτονία προκύπτει και με τον ορισμό. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

(β) Είναι $f(D_{f^{-1}}) = (-4, 6]$.Επίσης :

$$f^{-1}(3) = y \Leftrightarrow 3 = f(y) \Leftrightarrow f(-3) = f(y) \Leftrightarrow y = -3$$

(γ) Βρίσκουμε $f^{-1}(x) = \dfrac{6 - 4x^2}{1 + x^2}, x \geq 0$. Η ανίσωση οδηγεί στην

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x+3) < 0$$

και τελικά , με πίνακα ή αλλιώς, βρίσκουμε ότι $x \in (0,1)$, αφού $x \geq 0$.

(δ) Στο διάγραμμα (Α), αφού η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Το (Β) αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ 37ο(Γ)

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x)=\alpha(e^x-x)-(x+1)\ln(x+1)+x\,,\alpha\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

(β) Να μελετήσετε την f και την f' ως προς τη μονοτονία.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\gamma\in(0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(\gamma)=2-2\gamma.$$

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, τα σημεία καμπής, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

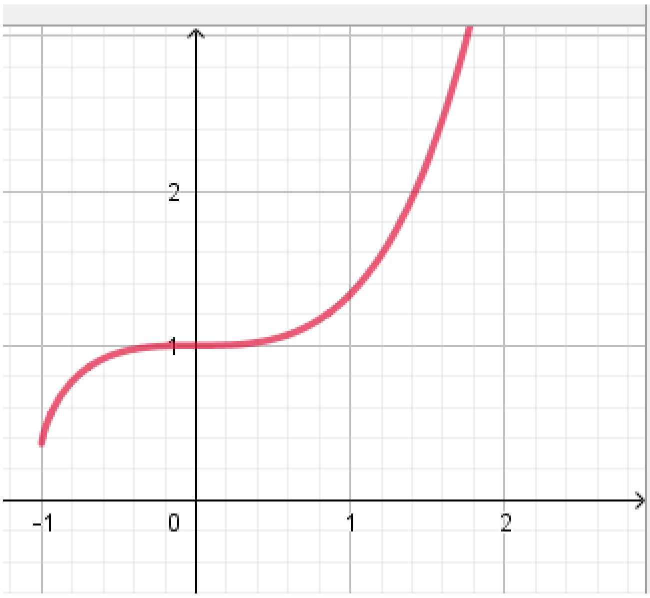
Υπόδειξη

(α) Αν για παράδειγμα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f'(x)\geq 0=f'(0)$ για κάθε $x>-1$. Από το θεώρημα Fermat , πρέπει $f''(0)=0$. Αλλά:

$$f'(x)=\alpha(e^x-1)-\ln(x+1) \quad \text{και} \quad f''(x)=\alpha e^x-\frac{1}{x+1} \text{ κλπ.}$$

(γ) Είναι : $e-2\ln 2=(e-2)+2(1-\ln 2)>0$).

(δ) Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα



ΘΕΜΑ 38ο(Γ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $2xf(x)=(x^2+1)(f(x)-f'(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

(β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι η C_f έχει μία ακριβώς οριζόντια εφαπτομένη.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $e^x=2020(x^2+1)$ και γιατί.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-x^2}(x^4+1)=x^2+1$.

(ε) Να υπολογίσετε το όριο $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu^2 f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}-1}$

ΘΕΜΑ 39ο(Γ)

Μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x^2)=xe^{x^2}$ για κάθε $x\geq 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται στο $x=0$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}e^x$, $x\geq 0$.

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x=\dfrac{2020}{\sqrt{x}}$

(ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x^3)=f(x^4)+f(x^2)$

(στ) Αν $\alpha>0$ και $f(\alpha^x)\geq f(x^\alpha)$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

ΘΕΜΑ 40ο(Γ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x-x$, $g(x)=\dfrac{x^2+2}{2}$ και $h=f-g$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα , να βρείτε το σύνολο τιμών της και να εξετάσετε αν η f έχει ολικά ακρότατα.

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν παράλληλες ευθείες που εφάπτονται με την C_f.

(γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο. Ποια είναι τα κοινά σημεία των C_f, C_g;

(δ) Να μελετήσετε την h' ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$h(x^4+1)+h(x^2)=h(x^4)+h(x^2+1)$$

(ε) Να αποδείξετε ότι:

(i) Η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(ii) $h(1)+h(5)>2h(3)$

ΘΕΜΑ 41°(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-(\lambda+1)x$,$\lambda>-1$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να βρείτε τον σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1}=(\lambda+1)(x-\ln(\lambda+1))$.

(γ) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του λ, ώστε $e^{x-1}\geq(\lambda+1)x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(δ) Να αποδείξετε ότι για την τιμή του για λ που βρήκατε στο ερώτημα (γ) , η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y=(\lambda+1)x$ εφάπτεται με την C_g, όπου $g(x)=e^{x-1}$ και συγχρόνως η C_f εφάπτεται με τον άξονα $x'x$.

(ε) Αν $f'(\alpha^x+\beta^x)\geq f'(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha,\beta>0$,να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=1$.

Υπόδειξη

(α) Ολικό ελάχιστο είναι το $f(1+\ln(\lambda+1))=-(\lambda+1)\ln(\lambda+1)$

(β) Η εξίσωση παίρνει τη μορφή $f(x)=f(1+\ln(\lambda+1))$ και με τον ορισμό της μονοτονίας προκύπτει ότι $f(x)>f(1+\ln(\lambda+1))$ για κάθε $x\neq1+\ln(\lambda+1)$.Μοναδική ρίζα είναι επομένως η $x=1+\ln(\lambda+1)$

(γ) Πρέπει το ελάχιστο να είναι μη αρνητικό. Έτσι βρίσκουμε $-1<\lambda\leq0$, οπότε $\lambda=0$.

(δ) Σημείο επαφής , στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα, είναι το $A(1,1)$ και το $A(1,0)$.

(ε) Η παράγωγος είναι γνησίως αύξουσα και έτσι παίρνουμε την $\alpha^x+\beta^x\geq2$.Εργαζόμαστε στη συνέχεια με το θεώρημα Fermat(χαρακτηριστική περίπτωση) στη συνάρτηση $h(x)=\alpha^x+\beta^x-2$.Ας σημειώσουμε ότι $h(x)=\alpha^x+\beta^x-2\geq0=h(0)$ και έτσι πρέπει τελικά $h'(0)=0$.

ΘΕΜΑ 42^{o}(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2(x-\ln x)+\dfrac{\ln^2 x}{2}$, $x>0$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$4(\ln x-x)=\ln^2 x-4040 .$$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $4(x-\ln x)=(2-\ln x)(2+\ln x)$

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Προτείνουμε να συζητήσετε όσο γίνεται περισσότερα από τα παραπάνω θέματα.

Καλή Επιτυχία !!!

Ασκήσεις από το σχολικό !

Συναρτήσεις –Όριο –Συνέχεια

Μπάμπης Στεργίου - Μαθηματικός

ΕΡΓΑΣΙΑ $1^η$

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ $1^ο$

Α. 1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

i) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$, ii) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

iii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ iv) $f(x)=\ln(1-e^x)$

2. Για ποιές τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

i) $f(x)=x^2-4x+3$, ii) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, iii) $f(x)=e^x-1$.

Β. 1. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}+1$, ii) $f(x)=x|x|$,

iii) $f(x)=\begin{cases}-x+3 & , \quad x<1\\ x+1 & , \quad x\geq 1\end{cases}$ iv) $f(x)=|\ln x|$.

Και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

2. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f\neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

i) $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=(\sqrt{x})^2$

ii) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$

iii) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. 1. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

i) $(fog)(x)=x^2+2x+2$, αν $g(x)=x+1$

ii) $(fog)(x)=\sqrt{1+x^2}$, αν $g(x)=-x^2$

iii) $(gof)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$, αν $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+1$ και $g(x)=\alpha x+2$. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $fog=gof$.

Β. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες

i) $f(x)=\sqrt{1-x}$. ii) $f(x)=2\ln(x-2)-1$

iii) $f(x)=3e^{1-x}+1$ iv) $f(x)=(x-1)^2-1$, $x\le 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. **4.** Να αποδείξετε ότι:

i) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ii) Αν δύο συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii) Αν δύο συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x)\ge 0$ και $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f,g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ.

Β. 1. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$.

2. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

ΘΕΜΑ 4^o

Α. 1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφx}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφ4x}{ημ2x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-ημx}{x}\right)$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημx}{x^3+x}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ5x}{\sqrt{5x+4}-2}$.

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{ημ^2x}{1+συνx}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συν^2x}{ημ2x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{ημ2x}$.

Β. 1. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0=0$ ii) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0=1$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}$, $x_0=0$.

2. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0, όταν:

i) $f(x)=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}$, $x_0=1$ ii) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_0=0$

iii) $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x_0=0$.

Καλή Επιτυχία !!!

Συναρτήσεις –Όριο –Συνέχεια

ΕΡΓΑΣΙΑ 2η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:

i) . $f(x) = x^3 + 2x + 1$. και $g(x) = x + 1$

ii) $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + x - 2$.

Β. 1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg και $\frac{f}{g}$.

2.Ομοίως για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Γ. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}, \quad \text{με} \quad \beta \neq -\alpha^2 \quad \text{και} \quad g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

Να αποδείξετε ότι

α) $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και

β) $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. 1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$

2. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

i) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}$ ii) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$

iii) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν:

i) $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $1-x^4 \le f(x) \le \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$.

Β. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-10x^3+2x-5)$ ii) $\lim\limits_{x\to -\infty}(5x^3-2x+1)$ iii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5}{x^3+8}$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$ v) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2}$ vi) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+2}{x^{10}+x+3}$

vii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{5}{x+2}\right)$ viii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+2}\right)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αν $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x+\beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

Β. 3. i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$. Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $x f(x)=\sigma\upsilon\nu x-1$.

ii) Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$|xg(x)-\eta\mu x|\le x^2.$$

Καλή Επιτυχία !

Συναρτήσεις –Όριο –Συνέχεια

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$.

2. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0)<g(0)$ και $f(1)>g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. 1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση gof, αν

i) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$, ii) $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

iii) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ και $g(x)=\varepsilon\varphi x$.

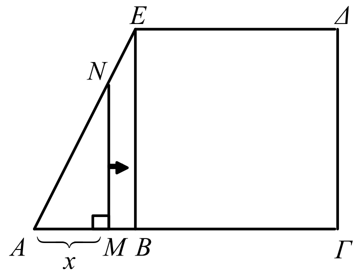
2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις gof και fog.

3. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν

i) $f(x)=\eta\mu(x^2+1)$, ii) $f(x)=2\eta\mu^2 3x+1$

iii) $f(x)=\ln(e^{2x}-1)$, iv) $f(x)=\eta\mu^2(3x)$.

Β.3. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB=1$, $A\Gamma=3$ και $\Gamma\Delta=2$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x=AM$, όταν το *M* διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΓ*.



ΘΕΜΑ 3ο

Α. 1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες

i) . $f(x)=\sqrt{1-x}$. ii) $f(x)=2\ln(x-2)-1$

iii) $f(x)=3e^{1-x}+1$ iv) $f(x)=(x-1)^2-1$, $x\le 1$.

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1−1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i) $f(x)=3x-2$ v) $f(x)=\ln(1-x)$ ii) $f(x)=x^2+1$

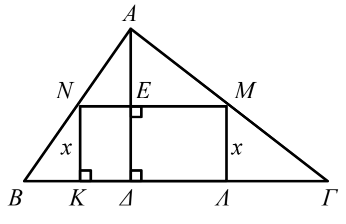
vi) $f(x)=e^{-x}+1$ iii) $f(x)=(x-1)(x-2)+1$ vii) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

iv) $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$ viii) $f(x)=|x-1|$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+\beta, & x\le 3\\ \alpha x+3\beta, & x>3\end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. 4. Ένα ορθογώνιο *ΚΛΜΝ* ύψους *x* cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο *ΑΒΓ* βάσης $B\Gamma=10$ cm και ύψους $A\Delta=5$ cm. Να εκφράσετε το εμβαδό *Ε* και την περίμετρο *Ρ* του ορθογωνίου ως συνάρτηση του *x*.



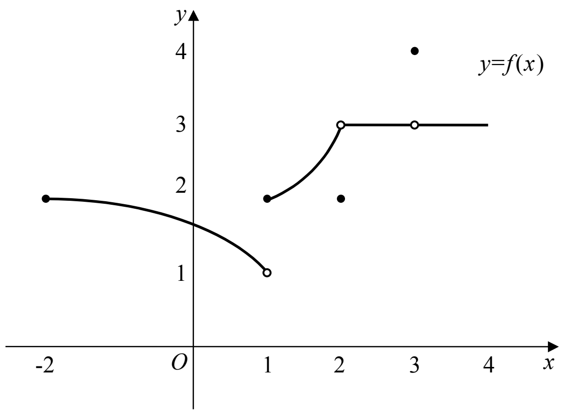
Β. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2,+\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

iv) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$



Γ. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^4+1}{x-1} + \dfrac{x^6+1}{x-2} = 0$ β) $\dfrac{e^x}{x-1} + \dfrac{\ln x}{x-2} = 0$

έχουν μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1,2)$.

Καλή Επιτυχία !!!

Συναρτήσεις –Όριο –Συνέχεια

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

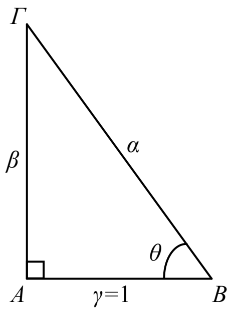
ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2\alpha x+\beta, & x\le 3 \\ \alpha x+3\beta, & x>3 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

Α2. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο *ΑΒΓ* είναι ορθογώνιο με $\gamma=1$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$, ii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)$

iii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$.



Α3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν:

i) $\lim\limits_{x\to 1}(4f(x)+2-4x)=-10$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. 1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} g(x).$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια.

Α2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν:

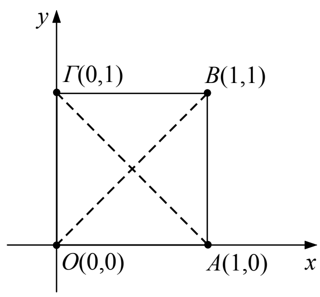
i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{f(x)}=+\infty$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x+2}=-\infty$ iii) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(3x^2-2)]=+\infty$.

Α3. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$.

Α4. Δίνεται το τετράγωνο *ΟΑΒΓ* του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο [0,1] συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.



i) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

ii) Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.

ΘΕΜΑ 3ο

Α1. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+\mu x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$.

Α2. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Α3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

i) $f(x)=\begin{cases}2x^2-3 & , \quad x\le 1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , \quad x>1\end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x} & , \quad x<0\\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad x\ge 0\end{cases}$.

Α4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

i) $f(x) = ημ(συνx)$ ii) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

iii) $f(x) = ημ\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$ iv) $f(x) = e^{ημx}$ v) $f(x) = \ln(\ln x)$

Α5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημx - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, π)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f* και *g* έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

i) $f(x) = e^x$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ii) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Α2. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις *f*, να βρείτε έναν ακέραιο *α* τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(α, α+1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

i) $f(x) = x^3 + x - 1$ ii) $f(x) = x^5 + 2x + 1$

iii) $f(x) = x^4 + 2x - 4$ iv) $f(x) = -x^3 + x + 2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$α(x - μ)(x - ν) + β(x - λ)(x - ν) + γ(x - λ)(x - μ) = 0,$$

όπου $α, β, γ > 0$ και $λ < μ < ν$, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα $(λ, μ)$ και μια στο $(μ, ν)$.

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i) $f(x) = \ln x - 1$, $x \in [1, e]$ ii) $f(x) = -x + 2$, $x \in (0, 2)$

iii) $f(x) = 2ημx + 1$, $x \in \left[0, \dfrac{π}{6}\right)$ iv) $f(x) = e^x + 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

Γ1. Έστω *f* μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$, για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

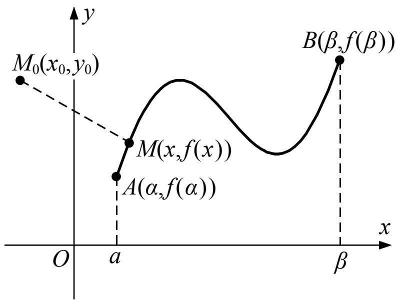
β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = x^2 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ2. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου,



i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

Καλή Επιτυχία !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 5η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Β. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 2 - x + x\etaμ|x|$ στο σημείο $x_0 = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'(x_0)$ ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0)$.

Β. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 &, x<1 \\ \sqrt{x} &, x\geq 1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} \etaμx &, x<0 \\ x &, x\geq 0 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} x^3 &, x<2 \\ x^4 &, x\geq 2 \end{cases}$ iv) $f(x)=\begin{cases} x^2 &, x\leq 2/3 \\ x^3 &, x>2/3 \end{cases}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi \neq 0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της C_f στο A.

Β. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x+5$, στα οποία η εφαπτομένη είναι:

i) παράλληλη προς την ευθεία $y=9x+1$

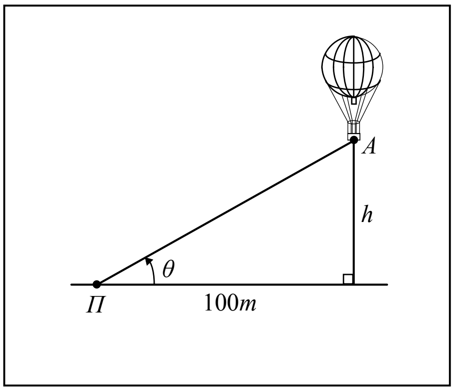
ii) κάθετη προς την ευθεία $y=-x$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αν μία συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)$ ii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=e^\alpha(f(\alpha)+f'(\alpha))$.

Β. Ένα αερόστατο *Α* αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100m από έναν παρατηρητή *Π* με ταχύτητα 50m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία *θ* που σχηματίζει η *ΑΠ* με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m.



Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 6^{η}

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1^{o}

Αν $x+1 \leq f(x) \leq x^2+x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

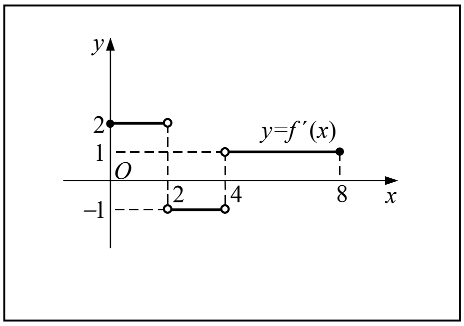
i) $f(0)=1$

ii) $1 \geq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \geq x+1$, για $x<0$ και $1 \leq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \leq x+1$, για $x>0$

iii) $f'(0)=1$.

ΘΕΜΑ 2^{o}

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f:[0,8] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0)=0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ 3^{o}

Έστω T το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x>1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού T, όταν $x=5$ cm.

ΘΕΜΑ 4^{o}

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, ii) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$ σε καθεμία περίπτωση χωριστά.

Καλή Επιτυχία !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 7^{η}

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-20x^3-25x^2-x+1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-60x^2-50x-1=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Β. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,4]$ και ισχύει $2\le f'(x)\le 5$ για κάθε $x\in(0,4)$. Αν $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι $9\le f(4)\le 21$.

Γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^3+3x-4$

ii) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$

iii) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

iv) $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & , \quad x\le 1\\ x+2 & , \quad x>1\end{cases}$

v) $f(x)=|x^2-1|$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+\alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1, 1]$.

iii) Αν $-2<\alpha<2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x+\alpha=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii) $\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x>0$, για κάθε $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 3ο

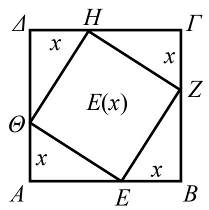
Α. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ ii) $g(x)=x^3-3x+2$

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:

$$x^3-3x^2+3x+1=0, \qquad x^3-3x+2=0$$

Β. Δίνεται τετράγωνο *ΑΒΓΔ* του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο *ΕΖΗΘ* έχει τις κορυφές του στις πλευρές του *ΑΒΓΔ*,



i) να εκφράσετε την πλευρά *ΕΖ* συναρτήσει του *x*.

ii) να βρείτε το *x* έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του *ΕΖΗΘ* να γίνει ελάχιστο.

Γ. i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln x+x-1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=2x\ln x+x^2-4x+3$$

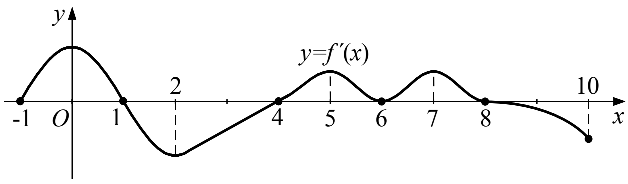
iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=x\ln x \quad \text{και} \quad h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η *f* είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

Β. Έστω *f* μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x} &, \quad 0 < x \neq 1 \\ -1 &, \quad x = 1 \end{cases}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής　　　　ii) $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 8η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^3+3x-4$ ii) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$

iii) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ iv) $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & , \quad x\le 1 \\ x+2 & , \quad x>1 \end{cases}$ v) $f(x)=|x^2-1|$

ΘΕΜΑ 2ο

Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii) $\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x>0$, για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 3ο

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln x+x-1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=2x\ln x+x^2-4x+3$$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=x\ln x \quad \text{και} \quad h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μπάμπης Στεργίου-Μαθηματικός

ΘΕΜΑ 4$^{\text{o}}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x} & , \quad 0<x\neq 1 \\ -1 & , \quad x=1 \end{cases}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής

ii) $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 9η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Α. (α) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3$, για κάθε $h\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: i) $f(1)=2$ ii) $f'(1)=3$.

(β) Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & , x<0\\ \text{ημ}x+1 & , x\geq 0\end{cases}$, να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

(γ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\text{συν}x}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$ στο $x_0=0$.

Β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\text{ημ}^2x-x^4\leq xf(x)\leq \text{ημ}^2x+x^4,$$ να αποδείξετε ότι

i) $f(0)=0$ ii) $f'(0)=1$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha,\alpha^3)$, $\alpha\neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M. Στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M.

Β. (α) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}$ στο κοινό σημείο τους $A(1,1)$, είναι κάθετες.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η κλίση της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι ίση με $\dfrac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

Β. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^{\ln x}$ ii) $f(x)=2^{5x-3}$ iii) $f(x)=(\ln x)^x$, $x>1$ iv) $f(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu x$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3x-2$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2-x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην C_g.

Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 10η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

(α) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$ ii $f(x)=\text{συν}x-\sqrt{3}\text{ημ}x+\ln 3$.

(β) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=(x^2-1)(x-3)$ ii) $f(x)=e^x\text{ημ}x$ iii) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

iv) $f(x)=\frac{\text{ημ}x+\text{συν}x}{1+\text{συν}x}$ v) $f(x)=x^2\text{ημ}x\text{συν}x$.

(γ) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{e^x}{\ln x}$ ii) $f(x)=\text{εφ}x+\text{σφ}x$ iii) $f(x)=\frac{\text{ημ}x}{e^x}$ iv) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2-x+1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi,\frac{1}{\xi}\right)$. Αν A,B είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

i) Το M είναι μέσο του AB.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi\in\mathbb{R}^*$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x)=f(x^2+x+1)-1$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0,g(0))$.

Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 11η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

ii) Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 1-x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$

Β. i) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu\frac{x}{2}=x$ αληθεύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=e^x-x$ ii) $f(x)=x^x$, $x>0$.

Β. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x+1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

α) $\sigma\upsilon\nu x>1-\frac{1}{2}x^2$ β) $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$ γ) $\eta\mu x>x-\frac{1}{6}x^3$

δ) $(1+x)^{\nu} > 1+\nu x$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$ ε) $(1+x)^{\nu} > 1+\nu x+\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$.

Β. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση *f*, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει

$$2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+1,$$

τότε η *f* δεν έχει ακρότατα.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ ii) $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

iii) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ iv) $f(x)=\begin{cases} x & , \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \ x > 0 \end{cases}$.

Β. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ ii) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1}$ ii) $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$ iii) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 12η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^5+5x-6$ και $g(x)=2\sqrt{x}+x-3$.

i) Να αποδείξετε ότι οι f,g είναι γνησίως αύξουσες.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$x^5+5x-6=0$ και $2\sqrt{x}+x-3=0$ έχουν ακριβώς μία ρίζα την $x=1$.

ΘΕΜΑ 2ο

A. Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδό $400m^2$, το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περίφραξη.

B. Με συρματόπλεγμα μήκους 80m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1,x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x\to 0}\dfrac{ημx}{\ln(x+1)}$ ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-συνx^2}{x^4}$ iii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-ημx}{1-συνx}$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ και οι ευθείες $ε_1: y=-x-1$ και $ε_2: y=x+1$. Να αποδείξετε ότι

Η $ε_1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, ενώ η $ε_2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της *f* όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$ ii) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 13^{η}

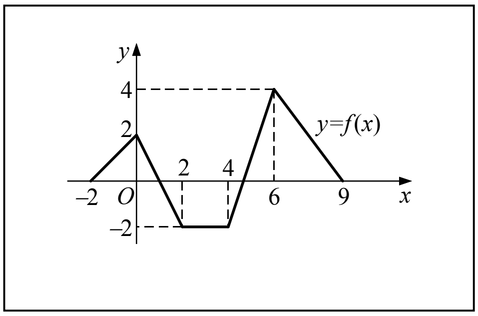
Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται στην περίοδο αυτή, που υπάρχει σχετικά αρκετός ακόμα χρόνος για μελέτη και αυτενέργεια, μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου. Από αυτά άλλωστε θα προέρχονται και τα περισσότερα ερωτήματα στις εξετάσεις σας. Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας, στο βιβλίο λύσεων ή να επικοινωνείτε (γραπτώς) με τους καθηγητές σας!

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$ ii) $f'(0)=4$.

Β. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f, διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y=x$ στην αρχή των αξόνων.

Β. Αν $f(x)=\text{ημ}^2 x$, να αποδείξετε ότι $f''(x)+4f(x)=2$.

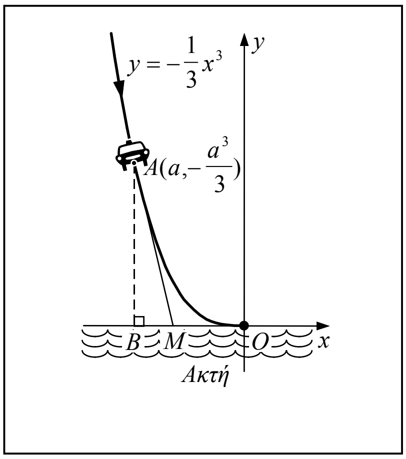
ΘΕΜΑ 3^{ο}

Α. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\text{ημ}x)=e^x\text{συν}x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την $f'(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

ΘΕΜΑ 4ο



Α. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3$, $x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

Καλή μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 14η

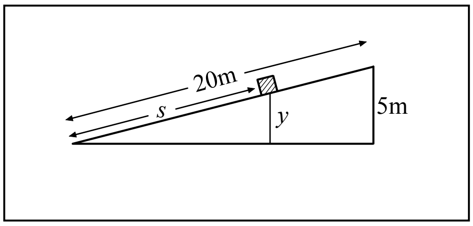
Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις f', g'. Να εξετάσετε στη συνέχεια αν ισχύει $f'=g'$.

ΘΕΜΑ 2ο

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του *y*.



ΘΕΜΑ 3ο

Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ’ έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχέι από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:

i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή *A* της σκάλας.

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.

Καλή Επιτυχία !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 15η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Α. i) Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν *f* είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|\beta - \alpha|.$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Έστω μια συνάρτηση *f* η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και ισχύει $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

Β. Να εξετάσετε, ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

i) $f(x) = x^2 + 2x$, $[0,4]$ ii) $f(x) = 3\eta\mu 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

iii) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , \quad x \le -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases}$, $[-3,2]$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2^x \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία, τα οποία και να βρείτε.

Β. Να αποδειχτεί ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda+1)x$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

ii) Η εξίσωση $3\lambda x^2 + 2x = \lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \alpha$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Καλή μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 16η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\le 1 \\ e^{1-x} & , \quad x>1 \end{cases}$ ii) $g(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & , \quad x<1 \\ x^2-4x+3 & , \quad x\ge 1 \end{cases}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x)-f(y)|\le (x-y)^2 \text{ για όλα τα } x,y\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή. Να βρεθεί στη συνέχεια ο τύπος της f αν η γραφικής της παράσταση περνάει από το σημείο $A(1821,2020)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$ έχει για κάθε τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y=-x^2+2$.

Για $\alpha=1$ να μελετήσετε την f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 4ο

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\le 0 \\ (1-e^{-x})\ln x & , \quad x\in(0,1] \end{cases}$.

i) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

iii) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Καλή Μελέτη !!!

Μπάμπης Στεργίου - Μαθηματικός

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ $17^{η}$

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ $1^{ο}$

Α. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων

(α) i) $f(x)=3x^5-5x^4+2$ ii) $g(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^3}$.

(β) i) $f(x)=xe^{1-x}$ ii) $g(x)=x^2(2\ln x-5)$ iii) $h(x)=\begin{cases}-3x^2+1 & , \; x<0\\ -x^3+3x^2+1 & , \; x\geq 0\end{cases}$.

Β. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

ΘΕΜΑ $2^{ο}$

Α. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} & , \; \text{αν} \;\; x\neq 1\\ 0 & , \; \text{αν} \;\; x=1\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}x^2 & , \; \text{αν} \;\; x\leq 1\\ 1+\dfrac{\ln x}{x} & , \; \text{αν} \;\; x>1\end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, ενώ

ii) Η g είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

ΘΕΜΑ $3^{ο}$

Α. Αν $0<α<β$, να αποδείξετε ότι:

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} < e^{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}.$$

Β. i) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^{\alpha}$ για κάθε $\alpha > e$.

iii) Να αποδείξετε ότι για $x > 0$ ισχύει $2^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x = x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. (α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

i) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ii) $g(x) = \ln x - x$ iii) $h(x) = \eta\mu x + |\eta\mu x|$, $x \in [0, 2\pi]$.

(β) Για τις f, g να γίνει και η γραφική τους παράσταση.

Β. i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = e^x - \lambda x, \quad \lambda > 0.$$

ii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$e^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 18η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x+\alpha & , \ x\le 0 \\ e^{\beta x} & , \ x>0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+3x^2+x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για τη μικρότερη τιμή του α που θα βρείτε, να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x)=1821$ και γιατί ;

ΘΕΜΑ 3ο

i) Αν $\alpha,\beta>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x+\beta^x\ge 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=1$.

ii) Αν $\alpha>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x\ge x+1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$. Στη συνέχεια να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 4ο

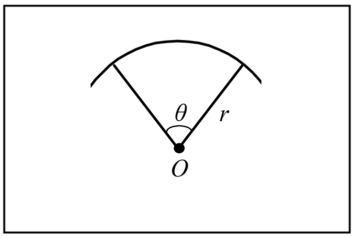
Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & , \ x\ne 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και στη συνέχεια ότι η ευθεία $y=0$ (ο άξονας $x'x$) είναι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$.

ii) Ο άξονας $x'x$ έχει με την C_f άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της C_f.

iii) Η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β. Ένα σύρμα μήκους 20m διατίθεται για την περίφραξη ενός ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα *r* του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου.



Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 19η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

i) $f(x)=x^2-2x+1$, $[0,2]$ ii) $f(x)=\eta\mu 3x$, $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$

iii) $f(x)=1+\sigma\upsilon\nu 2x$, $[0,\pi]$ iv) $f(x)=|x|$, $[-1,1]$.

Β. Αν για τις συναρτήσεις f,g ισχύουν $f'(x)=g^2(x)$ και $g'(x)=-f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=[f(x)]^3+[g(x)]^3$ είναι σταθερή. Να βρείτε τον τύπο της φ, αν $f(0)=1$ και $g(0)=0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x+1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

Β. Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδό $400m^2$, το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περίφραξη.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2,\ \mu\varepsilon\ \ \alpha<\beta<\gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο *M* της C_f που απέχει από το σημείο *A* τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο *M* είναι κάθετη στην *AM*.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu x$ στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

Β. Αν f,g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με

$$f(0)=g(0) \quad \text{και} \quad f'(x)>g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι

$$f(x)<g(x) \quad \text{στο} \quad (-\infty,0) \quad \text{και} \quad f(x)>g(x) \quad \text{στο} \quad (0,+\infty).$$

Καλή Μελέτη !!!

Παράγωγος

ΕΡΓΑΣΙΑ 20η

Στην εργασία που ακολουθεί δίνεται μια εξαιρετική ευκαιρία να λύσετε ξανά κάποια από τα πιο σημαντικά θέματα του σχολικού σας βιβλίου.
Σε οποιαδήποτε δυσκολία να ανατρέχετε στο τετράδιό σας , στο βιβλίο λύσεων ή στον καθηγητή σας !

ΘΕΜΑ 1ο

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ ii) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ iii) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

ΘΕΜΑ 2ο

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$.

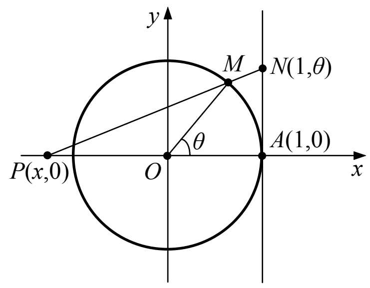
ΘΕΜΑ 3ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\dfrac{9}{2}, 0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο *M* της C_f που απέχει από το σημείο *A* τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο *M* είναι κάθετη στην *AM*.

B. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1cm και η *ε* εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο *A*. Το τόξο *AM* είναι *θ* rad και το ευθ. τμήμα *AN* είναι *θ* cm. Η ευθεία *MN* τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $P(x,0)$. Να αποδείξετε ότι:

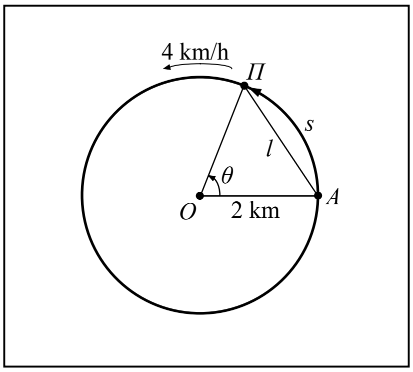


i) $x = \dfrac{\theta\,\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta}{\theta - \text{ημ}\theta} = x(\theta)$ ii) $\lim\limits_{\theta \to 0} x(\theta) = -2$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι $\mathrm{E}=(1+\text{συν}\theta)\text{ημ}\theta$. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta\in(0,\pi)$ για την οποία εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Β. Ένας πεζοπόρος *Π* ξεκινάει από ένα σημείο *Α* και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας $\rho=2\,\text{km}$ με ταχύτητα $\upsilon=4\,\text{km/h}$. Αν *S* είναι το μήκος του τόξου *ΑΠ* και ℓ το μήκος της απόστασης *ΑΠ* του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιμή *t*:



(Α) Να αποδείξετε ότι

i) $\theta=\dfrac{S}{2}$ και $\ell=4\text{ημ}\dfrac{\theta}{2}$, ii) $S=4t$, $\theta=2t$ και $\ell=4\text{ημ}t$.

(Β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ℓ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ℓ, όταν

α) $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$, β) $\theta=\pi$ γ) $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$;

Καλή Μελέτη !!!